This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**Over dit boek**

Dit is een digitale kopie van een boek dat al generaties lang op bibliotheekplanken heeft gestaan, maar nu zorgvuldig is gescand door Google. Dat doen we omdat we alle boeken ter wereld online beschikbaar willen maken.

Dit boek is zo oud dat het auteursrecht erop is verlopen, zodat het boek nu deel uitmaakt van het publieke domein. Een boek dat tot het publieke domein behoort, is een boek dat nooit onder het auteursrecht is gevallen, of waarvan de wettelijke auteursrechttermijn is verlopen. Het kan per land verschillen of een boek tot het publieke domein behoort. Boeken in het publieke domein zijn een stem uit het verleden. Ze vormen een bron van geschiedenis, cultuur en kennis die anders moeilijk te verkrijgen zou zijn.

Aantekeningen, opmerkingen en andere kanttekeningen die in het origineel stonden, worden weergegeven in dit bestand, als herinnering aan de lange reis die het boek heeft gemaakt van uitgever naar bibliotheek, en uiteindelijk naar u.

**Richtlijnen voor gebruik**

Google werkt samen met bibliotheken om materiaal uit het publieke domein te digitaliseren, zodat het voor iedereen beschikbaar wordt. Boeken uit het publieke domein behoren toe aan het publiek; wij bewaren ze alleen. Dit is echter een kostbaar proces. Om deze dienst te kunnen blijven leveren, hebben we maatregelen genomen om misbruik door commerciële partijen te voorkomen, zoals het plaatsen van technische beperkingen op automatisch zoeken.

Verder vragen we u het volgende:

+ *Gebruik de bestanden alleen voor niet-commerciële doeleinden* We hebben Zoeken naar boeken met Google ontworpen voor gebruik door individuen. We vragen u deze bestanden alleen te gebruiken voor persoonlijke en niet-commerciële doeleinden.

+ *Voer geen geautomatiseerde zoekopdrachten uit* Stuur geen geautomatiseerde zoekopdrachten naar het systeem van Google. Als u onderzoek doet naar computervertalingen, optische tekenherkenning of andere wetenschapsgebieden waarbij u toegang nodig heeft tot grote hoeveelheden tekst, kunt u contact met ons opnemen. We raden u aan hiervoor materiaal uit het publieke domein te gebruiken, en kunnen u misschien hiermee van dienst zijn.

+ *Laat de eigendomsverklaring staan* Het “watermerk” van Google dat u onder aan elk bestand ziet, dient om mensen informatie over het project te geven, en ze te helpen extra materiaal te vinden met Zoeken naar boeken met Google. Verwijder dit watermerk niet.

+ *Houd u aan de wet* Wat u ook doet, houd er rekening mee dat u er zelf verantwoordelijk voor bent dat alles wat u doet legaal is. U kunt er niet van uitgaan dat wanneer een werk beschikbaar lijkt te zijn voor het publieke domein in de Verenigde Staten, het ook publiek domein is voor gebruikers in andere landen. Of er nog auteursrecht op een boek rust, verschilt per land. We kunnen u niet vertellen wat u in uw geval met een bepaald boek mag doen. Neem niet zomaar aan dat u een boek overal ter wereld op allerlei manieren kunt gebruiken, wanneer het eenmaal in Zoeken naar boeken met Google staat. De wettelijke aansprakelijkheid voor auteursrechten is behoorlijk streng.

**Informatie over Zoeken naar boeken met Google**

Het doel van Google is om alle informatie wereldwijd toegankelijk en bruikbaar te maken. Zoeken naar boeken met Google helpt lezers boeken uit allerlei landen te ontdekken, en helpt auteurs en uitgevers om een nieuw leespubliek te bereiken. U kunt de volledige tekst van dit boek doorzoeken op het web via `http://books.google.com`

LSoc 3072.10

Harvard College Library

FROM

The Musée Teyler

# ARCHIVES

DU

# MUSÉE TEYLER

## Série II, Volume X.

HAARLEM. — LES HÉRITIERS LOOSJES.
1907.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIC,
G. E. SCHULTZE.

1,296
L Soc 3072.10

# TABLE DES MATIÈRES.

Avis.

Fondation de M. P. TEYLER VAN DER HULST à Haarlem.

Programm der Teylerschen Theologischen Gesellschaft für das Jahr 1907.

Programma van Teylers Tweede Genootschap voor het jaar 1907.

Surfaces de révolution à courbure moyenne constante, par Z. P. BOUMAN. Pag. 1

Les courbes de plissement et leur point double chez les mélanges de substances normales, dans le cas que les volumes moléculaires sont inégaux, par J. J. VAN LAAR ..... „ 19

L'expression pour le potentiel moléculaire des composantes d'un mélange binaire normale, dans l'état liquide, par J. J. VAN LAAR..... „ 45

L'âge des différentes assises englobées dans la série du „Forest-bed" ou le Cromerien, par EUG. DUBOIS..... „ 59

Études sur les eaux souterraines des Pays-Bas, par EUG. DUBOIS..... „ 75

La charge de contact entre une paroi poreuse et des solutions salines, par E. VAN DER VEN ..... „ 85

Sur l'allure des courbes de plissement chez les mélanges de substances normales, et les équilibres possibles entre une phase gazeuze et une ou deux phases liquides, par J. J. VAN LAAR ..... „ 109

La pluralité des périodes glaciaires dans les dépôts pleistocènes et pliocènes des Pays-Bas, par EUG. DUBOIS..... „ 163

Expérience de culture à l'ombre faite avec du tabac de Déli sur la côte orientale de Sumatra, par le Dr. F. W. T. HUNGER..... „ 181

Points singuliers des courbes gauches données par les équations: $x = t^n$, $y = t^{n+r}$, $z = t^{n+r+m}$, par W. A. VERSLUYS..... „ 253

Sur la réduction d'un système quelconque de forces dans l'espace $E_4$ à quatre dimensions, par P. H. SCHOUTE..... „ 367

Recherches sur la circulation du sang, par J. L. HOORWEG..... „ 381

La charge de contact entre une paroi poreuse et des solutions salines, par E. VAN DER VEN..... „ 433

Sur quelle échelle s'accomplit le phénomène du transport atmosphérique de sel marin, par EUG. DUBOIS..... „ 461

L Sc 3072.10

# ARCHIVES

DU

# MUSÉE TEYLER

SÉRIE II, VOL. X.

PREMIÈRE PARTIE.

HAARLEM. — LES HÉRITIERS LOOSJES.
1905.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIC,
G. E. SCHULZE.

# ARCHIVES

DU

# MUSÉE TEYLER

---

SÉRIE II, VOL. X.

Première partie.

---

HAARLEM. — LES HÉRITIERS LOOSJES.

1905.

PARIS, GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIC, G. E. SCHULZE.

# AVIS.

En ouvrant cette nouvelle série l'Institut scientifique et littéraire de la fondation Teyler a l'honneur d'informer les lecteurs des Archives, que M. M. les Directeurs ont résolu de lui en confier dorénavant la rédaction, qui, à partir de ce jour, se fera sous sa responsabilité.

Les Archives, comme l'indique déjà leur titre, contiendront d'abord la description scientifique des principaux instruments de précision et des diverses collections que la fondation possède, ainsi que les résultats des expériences et des études, qui seront faites par leur moyen, soit que ce travail soit fait par les conservateurs de ces collections, soit par d'autres, auxquels les Directeurs en auront accordé l'usage.

En second lieu, et pour tant que l'espace disponible ne sera pas occupé par ces publications obligatoires, les pages des Archives seront ouvertes aux savants, dont les travaux scientifiques ont rapport à une des branches, dont la culture a été recommandée à l'Institut par son fondateur.

Pour de plus amples informations à cet égard on est prié de s'adresser au Secrétaire de l'Institut,

E. VAN DER VEN.

HAARLEM, janvier 1881.

The Musée Teyler

# PROGRAMM

DER

# TEYLERSCHEN THEOLOGISCHEN GESELLSCHAFT

ZU HAARLEM,

für das Jahr 1906.

---

Die Direktoren der Teylerschen Stiftung und die Mitglieder der Teylerschen Theologischen Gesellschaft haben in der Sitzung vom 18. Oktober 1905 ihr Urteil abgegeben über die Arbeit, die sie erhalten haben als Antwort auf die Frage:

> „Die Gesellschaft verlangt eine Antwort auf die Frage: Welche Rolle hat das Luthertum gespielt im Niederländischen Protestantismus vor 1618: welchen Einfluss haben Luther und die deutsche Reformation auf die Niederlande und auf Niederländer geübt und wie ist es zu erklären, dass diese Richtung gegenüber anderen in den Hintergrund getreten ist?"

Der holländisch geschriebenen Arbeit, die das Motto trägt: „non omnia possumus omnes" kann der Preis nicht zuerkannt werden. Sie enthält grösstenteils bekannte Dinge über die ersten Jahre der Reformation in den Niederlanden und über die alten Reformierten, wofür zumeist einige mehr oder weniger populäre Schriften als Quellen gedient haben. Von dem niederländischen Luthertum des 16 Jahrhunderts weiss der Verfasser nur sehr wenig. Eine historische Untersuchung wird nicht geführt. Von

manchen sehr bekannten Schriften und Tatsachen hat der Verfasser offenbar nie gehört. Dass darum die sonderbarsten Versehen mitunterlaufen, ist nicht zu verwundern. Die „philosophische" Erklärung, die der Verfasser vom Rückgang des Luthertums gibt (die Superiorität des Calvinismus) ist wahrlich nicht von der Art, dass sie all' diese Gebrechen wieder gut machen könnte.

---

Ungünstig lautet auch das Urteil über zwei holländisch geschriebenen Arbeiten, die eingesandt worden waren als Antwort auf die Frage:

> „Die Gesellschaft verlangt eine Abhandlung über die Entstehung der jüdischen Synagoge und ihre Geschichte bis zur Zeit von Akiba".

Die eine Arbeit, unter dem Motto: „Gottlos denkt, wer geschichtslos denkt", ist nicht unverdienstlich, was die Form betrifft. Dagegen befriedigt der Inhalt nicht. Der erste Teil besteht aus einer breiten, lauter bekannte Dinge enthaltenden historischen Einleitung, bei der sich häufig die Frage aufdrängt, was die Auseinandersetzung doch eigentlich mit dem Thema zu schaffen hat. Zudem begeht der Verfasser den Fehler, die Synagoge sofort ohne genügende Motivierung aufzufassen als eine geistige Strömung oder Richtung im Judentum. Der Entstehung der Synagoge als Institut wird im zweiten Teil eine kurze Untersuchung gewidmet, die indessen sehr unzureichend ist. Der Verfasser dringt in das Problem durchaus nicht ein. In den übrigen Kapiteln des zweiten Teils versucht der Verfasser den Einfluss der Synagoge zu schildern. Aber auch hier bleibt er beim Allgemeinen und Bekannten stehen. So wird man vornehmlich wenig befriedigt von Kap. VI: die Synagoge in der Diaspora, wovon ein viel lebendigeres und reicheres Bild hätte gegeben werden können. Die ganze Arbeit ist wenig mehr als Kompilation, bringt uns in keiner Hinsicht weiter und kann darum nicht mit dem Preise gekrönt werden.

Wissenschaftlich höher steht die zweite Arbeit mit dem Motto aus Zunz' gottesdienstlichen Vorträgen: „Der öffentliche Gottesdienst der Synagoge ward das Panier jüdischer Nationalität, die Aegide

des jüdischen Glaubens". Der Verfasser hat begriffen, worauf es bei der Beantwortung dieser Preisfrage ankommt. Er widmet der Frage nach dem Aufkommen der Synagoge eine ernstliche Untersuchung. Doch kann auch diese Arbeit auf den Preis keinen Anspruch machen. Dafür trägt sie zu sehr die Spuren der Übereilung an sich. Der Verfasser, verfällt fortwährend in Wiederholungen, die Erörterung ist öfters verwirrt, die Argumente sind häufig schwach. Auch ist der Stil schlecht und die Sprache äusserst fehlerhaft. Zudem kommt die Geschichte der Synagoge entschieden zu kurz.

---

Ausgeschrieben sind noch die folgenden Preisfragen:

1. Zur Beantwortung vor 1. Januar 1906:

„Die Gesellschaft verlangt eine Geschichte der eschatologischen Vorstellungen innerhalb der Grenzen des Neuen Testaments."

2. Zur Beantwortung vor 1. Januar 1907:

„Wie verhält sich der Calvinismus unserer Tage zu dem des 16. Jahrhunderts hinsichtlich seiner Lehren?"

3. Die neue Preisfrage zur Beantwortung vor 1. Januar 1908 lautet:

„Was ergibt sich aus den Schriften des Erasmus über seine theoretische und praktische Stellung zur Religion?"

Der Preis besteht in einer goldenen Medaille von *f* 400 an innerem Wert, die ausgehändigt wird, sobald die gekrönte Arbeit druckfertig vorliegt.

Man kann sich bei der Beantwortung des Holländischen, Lateinischen, Französischen, Englischen oder Deutschen (nur mit Lateinischer Schrift) bedienen. Auch müssen die Antworten voll-

ständig eingesandt werden, da keine unvollständige zur Preisbewerbung zugelassen wird. Alle eingesandten Antworten fallen der Gesellschaft als Eigentum anheim, welche die gekrönten, mit oder ohne Uebersetzung, unter ihre Werke aufnimmt, sodass die Verfasser sie nicht ohne Erlaubnis der Stiftung herausgeben dürfen. Auch behält die Gesellschaft sich vor, von den nicht mit dem Preis gekrönten nach Gutfinden Gebrauch zu machen, mit oder ohne Vermeldung des Namens der Verfasser, doch im ersteren Falle nicht ohne ihre Bewilligung. Auch können die Einsender nicht anders Abschriften ihrer Antworten bekommen als auf ihre Kosten. Die Antworten müssen nebst einem versiegelten Namenszettel, mit einem Denkspruch versehen, eingesandt werden an die Adresse: „Fundatiehuis van wijlen den Heer P. TEYLER VAN DER HULST, te Haarlem."

---

# TABLE DES MATIÈRES.

Surfaces de révolution à courbure moyenne constante,
par Z. P. Bouman.

Les courbes de plissement et leur point double chez les mélanges de substances normales, dans le cas que les volumes moléculaires sont inégaux,
par J. J. van Laar.

L'expression pour le potentiel moléculaire des composantes d'un mélange binaire normale, dans l'état liquide, par J. J. van Laar.

L'âge des différentes assises englobées dans la série du „Forest-bed" ou le Cromerien, par Eug. Dubois.

# FONDATION

DE

# P. TEYLER VAN DER HULST.

## À HAARLEM.


**Directeurs.**

A. HERDINGH.
L. P. ZOCHER.
P. LOOSJES.
Mr. A. W. THÖNE.
J. J. VAN OORDE.

**Secrétaire.**

Mr. A. A. VAN DER MERSCH.

**Trésorier.**

P. DROSTE.

**Conservateur du Cabinet de Physique.**

Dr. E. VAN DER VEN.

**Conservateur du musée de Paléontologie et de Minéralogie.**

*Prof.* Dr. EUG. DUBOIS.

**Bibliothécaire.**

G. C. W. BOHNENSIEG.

**Conservateur des Collections de tableaux, de dessins et de gravures.**

H. J. SCHOLTEN.

**Conservateur du cabinet numismatique.**

Jhr. H. M. RIDDER BARONET SPEELMAN.

# MEMBRES DES SOCIÉTÉS TEYLERIENNES.

---

**De la première Société ou Société de théologie.**

*Prof.* Dr. S. CRAMER.
*Prof.* Dr. I. J. DE BUSSY.
Dr. J. G. BOEKENOOGEN.
*Prof.* Dr. D. E. J. VÖLTER.
Dr. A. C. DUKER.
Dr. H. J. ELHORST.

---

**De la seconde Société.**

Dr. E. VAN DER VEN.
H. J. SCHOLTEN.
J°. DE VRIES.
*Prof.* Dr. HUGO DE VRIES.
*Prof.* Dr. P. J. BLOK.
Dr. H. J. DE DOMPIERRE DE CHAUFEPIE.

Gift

# SURFACES DE RÉVOLUTION À COURBURE MOYENNE CONSTANTE

PAR

Z. P. BOUMAN.

Dans la „Differentialgeometrie" de Luigi Bianchi (traduction allemande de M. Lukat) les surfaces de révolution à courbure moyenne constante ont été traitées à la page 190 et suivantes, et les trois types de surfaces de révolution pseudosphériques y sont longuement discutées. A ma connaissance, il n'a pas encore été fait jusqu'ici d'étude approfondie sur les surfaces de révolution à courbure moyenne constante. Cependant, celles ci ont certainement une grande importance, parce qu'on peut facilement les rendre visibles. L'on sait que le physicien Plateau a réussi à les engendrer dans ses ingénieuses expériences avec des figures à l'huile dans une solution d'alcool, et l'on peut apprendre plus de détails sur ce point dans ses mémoires [1]) sur ce sujet. Il déduit aussi de considérations purement géometriques [2]) la forme mathématique probable de ces surfaces de révolution. Un examen analytique sur ce sujet présente sans doute un certain intérêt, car ce n'est que par cette voie qu'on peut établir une concordance mathématique entre les expériences et la théorie.

Terquem [3]) donne une description d'expériences qu'il a faites sur les surfaces de révolution précitées, qu'il produisait au moyen de lamelles de savon entre deux cylindres d'égale grandeur,

---

[1]) Parus dans Pogg. Ann. etc.

[2]) Pogg. Ann., CVII.

[3]) Terquem: Sur les surfaces de révolution, limitant les liquides, dénués de pesanteur; C. R, T. 92, pag. 407.

parallèles, placés normalement sur le même axe (fig. 1) et dont les ouvertures se faisaient face. Le cylindre inférieur était fermé du côté inférieur, le cylindre supérieur à sa partie supérieure. Au moyen d'un tube (*a*) il pouvait y insuffler ou en aspirer de l'air. Dans une plaque qui ferme le cylindre inférieur, une ouverture (*b*) avait été pratiquée qui pouvait être fermée au moyen d'une lamelle de savon. On peut juger par la forme de cette lamelle de la pression exercée dans l'intérieur des cylindres.

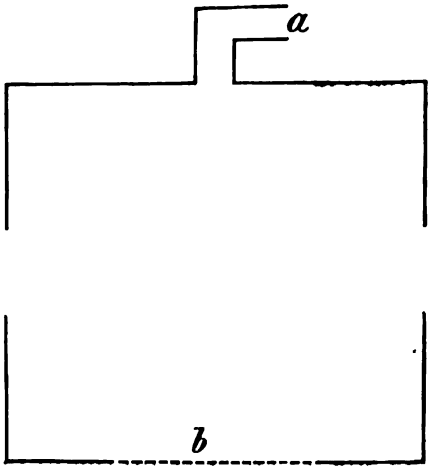



Fig. 1.

Le résultat principal de ses expériences consiste à mon avis dans la démonstration physique que, lorsque le tube (*a*) est ouvert — de façon que la surface de révolution devient une surface minima — la distance des deux cylindres ne peut pas dépasser une certaine valeur critique. Il trouve que cette valeur est égale à 0,6627... du diamètre du cylindre. Ce résultat et d'autres pareils ont été mathématiquement démontrés pour la première fois par Lindelöf [1]).

(Terquem fait aussi la remarque que, lorsque la distance des cylindres est plus petite que la distance critique, il y a deux surfaces minima, tout au moins deux surfaces possédant une courbure moyenne zéro. Cependant une des deux seulement est une surface minima réelle, l'autre satisfait, il est vrai, à l'équation différentielle des surfaces minima, mais elle n'a pas, étant donnés les deux anneaux, la surface le plus petite possible).

Pour le cas général que les cylindres n'ont pas le même diamètre ceci a été pleinement démontré par Hancock [2]); pour des cylindres à diamètre égal, cela se démontre très facilement. L'on n'a qu'à poser les équations

$$x = m \cosh \nu \cos \omega$$
$$y = m \cosh \nu \sin \omega$$
$$z = m \nu$$

[1]) Lindelöf: Sur les limites, entre lesquelles le caténoide est une surf. min.; Act. Soc. Sc. Fenn., T. IX, 1871.

[2]) Annals of Mathematics (Virginia), X.

pour les surfaces de révolution du caténoïde, tournant autour de l'axe $Z$ comme directrice. Si l'on examine, à la façon ordinaire, l'enveloppe de la courbe méridienne

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = m \cosh \nu, \quad z = m \nu$$

l'on trouve deux lignes droites qui passent par l'origine des coor-

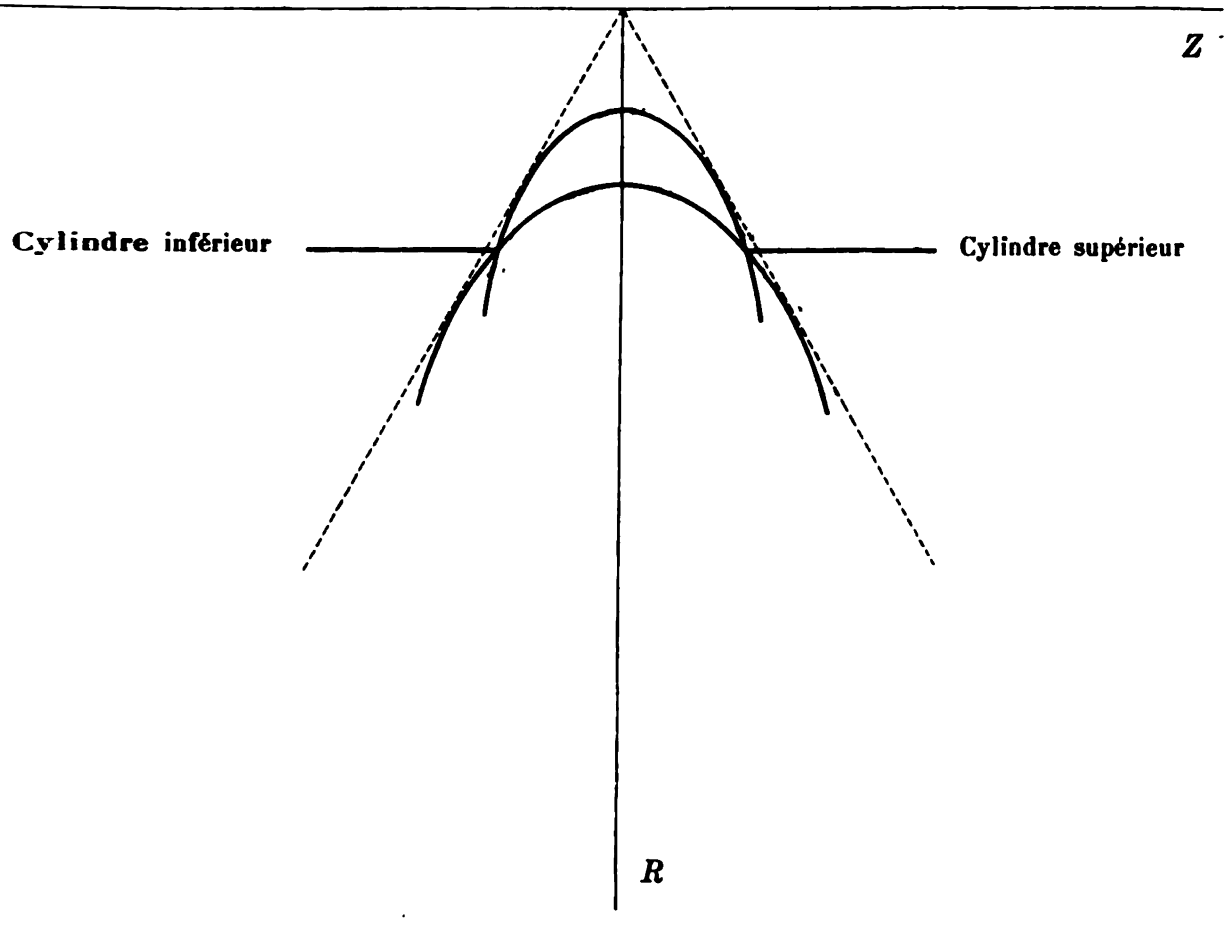



Fig. 2.

données $(R\,Z)$, tandis que la tangente de l'angle que ces droites forment avec l'axe $R$, est déterminée par l'équation

$$e^{\sqrt{1+\alpha^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha^2}} + \frac{1}{\alpha}$$

où $\alpha$ indique la tangente. On vérifie aisément que $\alpha = 0{,}6627$ satisfait d'une façon très approximative à cette équation transcendante.

Si nous tirons (fig. II) les deux droites, que j'appellerai, pour

la concision, les lignes $\alpha$ — l'on verra aisément que deux surfaces de révolution du caténoïde sont possibles, lorsque la distance des cylindres est plus petite que $\alpha \times$ du diamètre du cylindre. Les deux courbes méridiennes doivent toucher les droites. Si la distance des cylindres est juste 0,6627.... $\times$ du diamètre, les deux surfaces de révolution coincident. Que seulement la surface extérieure des deux surfaces minima figurées est une surface minima, c'est ce qu'on peut déduire d'un théorème de LINDELÖF, ce qui a déjà été démontré par HANCOCK.

Lorsque la distance des cylindres est suffisamment petite, il est possible de produire deux surfaces de courbure moyenne zéro (ce qui est impossible, si la distance est trop grande). Terquem [1]) a démontré expérimentalement à quelles conditions sont soumises la formation et l'existence de la surface minima intérieure, et de plus, il a réussi à produire des surfaces de révolution qui peuvent se former entre les deux surfaces à courbure zéro et des deux côtés de ces surfaces. Ce sont respectivement les surfaces de révolution à courbure moyenne négative et positive.
Si la distance des cylindres est juste 0,6627 $\times$ du diamètre, des surfaces à courbure moyenne négative ne sont pas possibles; si la distance est encore plus grande, des surfaces à courbure moyenne positive sont seulement possibles, dont l une a la courbure la plus petite possible. Terquem promet d'étudier la question plus à fond mathématiquement et expérimentalement, mais c'est en somme tout ce qu'il a dit à ce sujet.

Je m'étais déjà autrefois occupé de cette question et j'avais fait des expériences à peu près semblables à celles de Terquem (d'ailleurs sans avoir eu connaissance de son traité), et je trouvais la confirmation de ses résultats. Mais afin de pouvoir discuter à fond les résultats, je me vis forcé d'établir mathématiquement la forme des surfaces de révolution dans les cas de courbure moyenne positive et négative. Dans le présent traité j'ai voulu exposer la partie purement mathématique, c'est à dire la déduction des équations pour les surfaces en question et la forme des courbes méridiennes qui en résultent.

On peut obtenir de différentes manières la forme de l'élément linéaire des surfaces ci-dessus mentionnées et leur représentation sphérique. En m'inspirant du livre déjà cité de Bianchi, voici la voie que j'ai prise.

---

[1]) l. c.

Bianchi démontre la proposition suivante: le carré de l'élément linéaire d'une surface $W$, exprimé dans les coordonnées curvilignes $(u, v)$, peut être réduit à la forme

$$ds^2 = \frac{du^2}{\beta^2} + \frac{dv^2}{\theta'^2(\beta)}$$

où $\beta$ est une fonction de $u$ et $v$.

Les rayons de courbure principaux de la surface $W$ sont alors représentés par les équations:

$$\frac{1}{r_2} = \theta(\beta), \quad \frac{1}{r_1} = \theta(\beta) - \beta\,\theta'(\beta).$$

Nous adoptons de plus le théorème bien connu de Bonnet-Darboux que les lignes de courbure pour les surfaces à courbure moyenne constante sont isothermes. Si nous nous représentons $u$ et $v$ comme les paramètres isométriques et si nous posons que

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = H,$$

ou $H$ représente la courbure moyenne constante,

alors $\quad 2\theta - \beta\,\theta' = H$

donc $\quad 2\theta = C\beta^2 + H \quad$ ($C$ constante d'intégration)

et $\quad \theta' = C\beta$

Pris sur des paramètres isométriques, il faut que

$$\beta^2 = \theta'^2(\beta) \qquad \text{donc } C = 1$$

donc $\quad 2\theta = \beta^2 + H \quad$ et $\quad \theta' = \beta$

et alors on trouve tout de suite

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{2}H - \frac{1}{2}\beta^2 \qquad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}\beta^2$$

$$E = G = \frac{1}{\beta^2}$$

$$D = -\frac{1}{2\beta^2}(H + \beta^2) \qquad D'' = -\frac{1}{2\beta}(H - \beta^2)$$

$$e = \frac{1}{4\beta^2}(H + \beta^2)^2 \qquad g = \frac{1}{4\beta^2}(H - \beta^2)^2$$

$$F = D' = f = 0$$

où $E$, $F$, $G$, $e$, $f$, $g$, $D$, $D'$ et $D''$ sont les symboles de Gauss.

Je dois tout de suite appeler l'attention sur un simple théorème, à savoir:

$$e - g = H$$

donc: Si l'on prend une surface à courbure moyenne constante $H$ sur les coordonnées isométriques des lignes de courbure, les deux coefficients $e$ et $g$ de la représentation sphérique présentent la différence constante $H$. Pour les surfaces minima, il en résulte la condition connue

$$e = g;$$

de plus, l'on trouve facilement:

$$e = \frac{(Hr_1 - 1)^2}{Hr_1^2 - 2r_1}, \quad g = \frac{1}{Hr_1^2 - 2r_1}.$$

Le théorème mentionné ci-dessus nous porte à essayer de réduire l'élément linéaire de la sphère à une forme telle que les deux coefficients acousent la différence nommée.

Si nous prenons les points d'une sphère, suivant la méthode ordinaire, sur les coordonnées $\omega$ (azimuth) et $\Theta$ (distance polaire), nous obtenons alors

$$ds^2 = \sin^2 \Theta \, . \, d\omega^2 + d\Theta^2.$$

Veut-on réduire cette forme à

$$ds^2 = e\, du^2 + g\, dv^2$$

où

$$e - g = H,$$

et si l'on pose $\Theta = \Theta(u, v)$, $\omega = \omega(u, v)$ l'on arrive aux conditions:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial v} \cdot \frac{\partial\Theta}{\partial u} + \sin^2 \Theta \frac{\partial\omega}{\partial v} \cdot \frac{\partial\omega}{\partial u} = o$$

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2 + \sin^2 \Theta \left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2 = e$$

$$\sin^2 \Theta \left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)^2 = g$$

De ces équations l'on déduit les deux équations simultanées

$$\frac{\partial\Theta}{\partial v} \cdot \frac{\partial\Theta}{\partial u} + \sin^2 \Theta \frac{\partial\omega}{\partial v} \cdot \frac{\partial\omega}{\partial u} = o$$

$$\sin^2 \Theta \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)^2 = H.$$

Ces deux équations simultanées ne peuvent être résolues. On peut d'ailleurs facilement déduire l'équation, qui satisfait à la

fonction $\Theta$. A cet effet, on multiplie la première des deux équations par $i\,(=\sqrt{-1})$, on y ajoute et en soustrait respectivement la seconde; l'on trouve:

$$\sin^2\Theta\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}+i\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}+i\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)^2=H$$

$$\sin^2\Theta\left(\frac{\partial\omega}{\partial u}-i\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}-i\frac{\partial\Theta}{\partial v}\right)^2=H.$$

De là on résout la valeur de $\frac{\partial\omega}{\partial u}+i\frac{\partial\omega}{\partial v}$ et de $\frac{\partial\omega}{\partial u}-i\frac{\partial\omega}{\partial v}$ et l'on trouve ainsi $\frac{\partial\omega}{\partial v}$ et $\frac{\partial\omega}{\partial u}$. Si l'on introduit maintenant la condition d'intégrabilité, l'on obtient alors l'équation en question pour $\Theta$. Seulement elle est de nature si compliquée que je m'abstiens de l'écrire ici.

Dans le cas de surfaces de révolution des résultats sont plus faciles à démontrer Alors $\Theta$ et $\omega$ ne sont respectivement que des fonctions d'un des deux paramètres $u$ et $v$. Nous posons

$$\omega=\omega(v)\quad,\quad\Theta=\Theta(u),$$

donc $$ds^2=\sin^2\Theta\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2dv^2+\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2du^2$$

De plus nous avons trouvé

$$e=\frac{(Hr_1-1)^2}{Hr_1^2-2r_1}=\frac{1}{2r_2-Hr_2^2}\quad g=\frac{1}{Hr_1^2-2r_1}=\frac{(Hr_2-1)^2}{2r_2-Hr_2^2}.$$

Si $H=0$, nous trouvons: $e=\frac{1}{2r_2}=-\frac{1}{2r_1}$ et $g=-\frac{1}{2r_1}=\frac{1}{2r_2}$.

Si nous nous rappelons la forme du caténoïde (courbe méridienne des surfaces de révolution minima), et si, dès maintenant, nous admettons qu'un rayon de courbure doit être pris positif, lorsqu'il se trouve situé du côté de l'axe de révolution, alors il est évident que

$r_2$ doit être pris égal au rayon, lequel correspond aux lignes de courbure $\Theta=$ const. ou $u=$ const.

Si donc nous posons $ds^2=e\,dv^2+g\,du^2$ et $e-g=H$,

alors il faut que $e=\sin^2\Theta\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2$, $g=\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2$

et par conséquent

$$\sin^2\Theta\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2-\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2=H\ ^{1)}.$$

Pour satisfaire à cette équation, l'on doit poser

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial v}\right)^2=C^2 \text{ et } C^2\sin^2\Theta-H=\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2$$

où $C$ signifie une constante.

De plus nous avons

$$e=\frac{1}{2r_2-Hr_2^2}=C^2\sin^2\Theta$$

d'où nous concluons

$$r_2=\frac{1}{H}\pm\frac{1}{H}\sqrt{1-\frac{H}{C^2\sin^2\Theta}}=\frac{1}{H}\pm\frac{1}{HC\sin\Theta}\sqrt{C^2\sin^2\Theta-H}.$$

et de plus

$$r_1=\frac{1}{H}\pm\frac{1}{H\sqrt{1-\frac{H}{C^2\sin^2\Theta}}}=\frac{1}{H}\pm\frac{1}{H}\frac{C\sin\Theta}{\sqrt{C^2\sin^2\Theta-H}}$$

Comme nous le montrerons ci-bas, les courbes se répètent périodiquement le long de l'axe $Z$, de sorte que l'on a toujours affaire à un cercle de gorge plus ou moins étroit ou large. Si, pour comprendre facilement les surfaces minima dans notre examen, nous plaçons l'origine des coordonnées dans le centre du plus petit cercle de gorge, l'on doit naturellement choisir le signe inférieur dans nos dernières formules.

(Pour $H=0$ l'on trouve d'après la methode usuelle:

$$r_2=\frac{1}{2C^2\sin^2\Theta}\qquad r_1=-\frac{1}{2C^2\sin^2\Theta}$$

tandis que

$$C^2\sin^2\Theta=\left(\frac{\partial\Theta}{\partial u}\right)^2$$

Pour obtenir toutes les surfaces minima, l'on doit varier $C^2$ de 0 jusqu'à $\infty$).

Il n'est pas difficile d'exprimer les $x$, $y$ et $z$ (coordonnées cartésiennes) en $u$ et $v$.

---

[1]) Il va sans dire, que $f=0$, et ne présente pas de nouvelles conditions.

Si l'on pose, ce qui est permis pour les surfaces de révolution:

$$x = f(\Theta) \cos \omega$$
$$y = f(\Theta) \sin \omega$$
$$z = f_1(\Theta)$$

où $\Theta = \Theta(u)$ et $\omega = Cv$,

alors $E = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = C^2 f^2$ et de plus $E = e r_2^2 = C^2 \sin^2 \Theta . r_2^2$

$G = \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = (f'^2 + f_1'^2)\left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)^2$ et de plus $G = g r_1^2 = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)^2 r_1^2$.

(Si l'on applique ici l'équation $C^2 \sin^2 \Theta - H = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)^2$ et si l'on introduit les valeurs de $r_1$ et $r_2$ l'on trouve $E = G$).

Des équations ci-dessus l'on déduit pour la determination de $f$ et $f_1$:

$$f^2 = r_2^2 \sin^2 \Theta \quad \text{ou} \quad f = r_2 \sin \Theta$$
$$f'^2 + f_1'^2 = r_1^2 \quad \text{ou} \quad f_1' = r_1 \sin \Theta$$

L'on trouve cette dernière équation à l'aide de $f = r_2 \sin \Theta$ et en tenant bien compte des valeurs de $r_1$ et $r_2$.

Nous prenons de plus le complément $\varphi$ (la hauteur) de la distance polaire $\Theta$, alors $\Theta$ est égal à $\frac{1}{2}\pi - \varphi$, et nos équations prennent la forme suivante: L'équation $C^2 \sin \Theta - H = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial u}\right)^2$ pour la détermination de $\Theta$ comme fonction de $u$ devient

$$C^2 \cos^2 \varphi - H = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2$$

donc

$$\sqrt{C^2 - H}\, du = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{C^2}{C^2 - H} \sin^2 \varphi}}$$

Si nous posons: $\frac{C^2}{C^2 - H} = k^2$

alors l'on trouve:

$$\frac{C}{k} u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{C^2}{C^2 - H} \sin^2 \varphi}}$$

De plus nous posons $u_1 = \frac{C}{k} u$ , donc

$$u_1 = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \text{ ou } \varphi = am.\, u_1 \left(k^2 = \frac{C^2}{C^2 - H}\right)$$

Les fonctions $f_1$ et $f$ peuvent s'exprimer facilement par le seul paramètre $u_1$.

Nous avons: $f = r_2 \sin \Theta = \frac{\sin \Theta}{H} \pm \frac{1}{HC} \sqrt{C^2 \sin^2 \Theta - H}$

$$f = \frac{1}{H} cn\, u_1 \pm \frac{1}{kH} dn\, u_1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \Theta} = r_1 \sin \Theta = \frac{\sin \Theta}{H} \pm \frac{1}{H} \frac{C \sin^2 \Theta}{\sqrt{C^2 \sin^2 \Theta - H}}$$

ou

$$-\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = \frac{\cos \varphi}{H} \pm \frac{1}{H} \frac{C \cos^2 \varphi}{\sqrt{C^2 \cos^2 \varphi - H}}.$$

donc $f_1 = -\frac{1}{H} \sin \varphi \mp \frac{C}{H\sqrt{C^2 - H}} \int_0^{\varphi} \frac{\cos^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{C^2}{C^2 - H} \sin^2 \varphi}}$

On en déduit

$$f_1 = -\frac{1}{H} sn\, u_1 \mp \frac{k}{H} u_1 \pm \frac{1}{kH} Z(u_1)$$

où

$$Z(u_1) = \int_0^{u_1} k^2 sn^2 u_1 \, du_1$$

Nous pouvons maintenant exprimer facilement les $x$, $y$ et $z$.

Dans la suite, nous considérerons simplement $f_1$ et $f$ comme les coordonnées de la courbe méridienne, afin de pouvoir examiner de plus près la forme de cette courbe. (Fig. III.)

Comme p. e. la valeur de $f$ dépend seulement d'intégrales elliptiques, celle-là prend la même valeur, après des périodes déterminées.

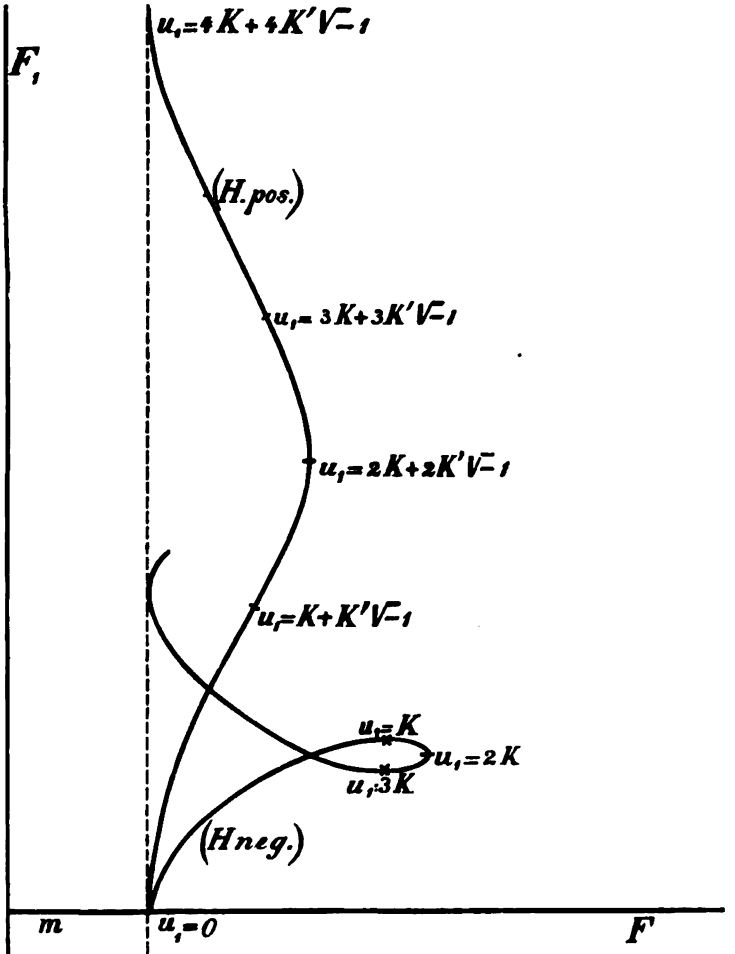



Fig. 3.

Le signe de $dn$ varie deux fois aussi vite que celui de $cn$, et nous obtiendrons par conséquent pour $f$ une valeur maximum et minimum. Nous posons l'axe $f$, là où $f$ a la plus petite valeur, et nous devons alors choisir dans la formule pour $f$ le signe inférieur, et comme conséquence aussi le signe inférieur pour $f_1$. Nous trouvons facilement pour $u_1 = 0$ ($\varphi = 0$, ou $\theta = 90^0$, la normale à la surface est perpendiculaire à l'axe de révolution):

$$f_1 = 0$$

$$f = \frac{1}{H} - \frac{1}{kH}$$

Pour $u_1 = 0$ $f$ est le rayon du cercle de gorge que nous représentons dès maintenant par $m$ pour nous orienter plus facilement et nous trouvons:

$$m = \frac{1}{H} - \frac{1}{kH}$$

par conséquent $k = \frac{1}{1 - Hm}$

de plus $k^2 = \frac{C^2}{C^2 - H}$, et pas conséquent $C^2 = \frac{H}{2Hm - H^2m^2}$,

d'où nous pouvons tirer la conclusion remarquable

$$Hm \underset{<}{=} 2$$

Avant de procéder à la discussion détaillée des formules trouvées, il est souhaitable d'examiner les diverses valeurs du module $k$ dans les divers cas, où $H = 0$, est positif ou négatif. Au moyen de l'égalité $k = \frac{1}{1 - Hm}$ l'on trouve le tableau suivant:

| | |
|---|---|
| $H$ positif $(0 < Hm < 1)$: | $k$ a toutes les valeurs de $+1$ jusqu'à $+\infty$ |
| $H$ positif $(1 < Hm < 2)$: | $k$ a toutes les valeurs de $-1$ jusqu'à $-\infty$. |
| $H$ négatif | $k$ a toutes les valeurs de $0$ jusqu'à $1$ |
| $H = 0$ | $k = 1$. |

Comme il s'agit de trouver la valeur de $k^2$, le tableau se réduit à

| | |
|---|---|
| $H$ positif $(Hm < 2)$ | $k^2$ entre 1 et $\infty$ $(k^2 > 1)$ |
| $H$ negatif | $k^2$ entre 0 et 1 $(0 < k^2 < 1)$ |
| $H = 0$ | $k^2 = 1$ |

Si l'on veut calculer numériquement $f$ et $f_1$ dans les divers cas au moyen des tables de Legendre, afin que l'on puisse tracer et construire les diverses surfaces, l'on écrit:

I°. $H$ négatif, $k^2 < 1$.

$$f_1 = -\frac{1}{H}\sin\varphi + \frac{1}{Hk}\int\frac{k^2\cos^2\varphi}{\Delta\varphi}d\varphi \quad \Delta\varphi = \sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}$$

ou

$$f_1 = -\frac{1}{H}\sin\varphi + \frac{k^2 - 1}{Hk}\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{1}{Hk}\int\Delta\varphi\, d\varphi;$$

de plus $k = \frac{1}{1 - Hm}$ (voyez plus haut), donc $\frac{1}{H} = \frac{mk}{k - 1}$

par conséquent

$$f_1 = -\frac{mk}{k-1}\sin\varphi + m(k+1)\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{m}{k-1}\int\Delta\varphi\, d\varphi$$

tandisque

$$f = \frac{mk}{k-1}\cos\varphi - \frac{m}{k-1}\Delta\varphi.$$

$A.$

II°. $H$ positif, $k^2 > 1$.

Nous posons $k \sin \varphi = \sin \psi$ [1]) donc $\Delta \varphi = \cos \psi$

et trouvons facilement $d\varphi = \dfrac{\cos \psi \, d\psi}{k \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \psi}}$,

donc $$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{d\varphi}{\cos \psi} = \frac{d\psi}{k \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \psi}}$$

Si nous introduisons $k_1 = \frac{1}{k}$, donc $|k_1| < 1$,

alors $$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{k_1 \, d\psi}{\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \psi}} = \frac{k_1 \, d\psi}{\Delta_1 \psi}$$

où $$\sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \psi} = \Delta_1 \psi .$$

De plus, après quelques calculs faciles, nous obtenons

$$\Delta \varphi . d\varphi = \frac{k_1^2 - 1}{k_1} \frac{d\psi}{\Delta_1 \psi} + \frac{1}{k_1} \Delta_1 \psi . d\psi$$

et enfin, après substitution des valeurs obtenues ainsi

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \frac{m k_1}{k_1 - 1} \sin \psi - \frac{m}{k_1 - 1} \int \Delta_1 \psi \, d\psi \\ f &= \frac{m k_1}{k_1 - 1} \cos \psi - \frac{m}{k_1 - 1} \Delta_1 \psi \end{aligned}\right\} B$$

Dans les formules $A$ et $B$, $k$ respect $k_1$, sont plus petits que 1, et les tables bien connues de Legendre sont applicables aux diverses valeurs de $\arcsin k$ (ou $\arcsin k_1$) et $\psi$.

III°. $H = 0$, $k = 1$.

Si nous posons $k = 1$ dans les formules $A$ par exemple, celles-ci prennent la valeur $\infty - \infty$. Après examen ordinaire nous trouvons:

$$f = \left[\frac{k \cos \varphi - \Delta\varphi}{k - 1}\right]_{k=1} = \frac{m}{\cos \varphi}$$
$$f_1 = m \, l . \, tg \, (45 + \tfrac{1}{2} \varphi) .$$

Si nous posons $l . \, tg \, (45 + \frac{1}{2} \varphi) = p$, ou $tg \, (45 + \frac{1}{2} \varphi) = e^p$ alors nous avons:

$$\cos \varphi = \frac{2e^p}{e^{2p} + 1}$$

---

[1]) En agissant ainsi, je m'autorise de $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$, où $k^2 \sin^2 \varphi < 1$.

donc

$$f = m\frac{e^p + e^{-p}}{2} = m \cosh . p, \quad f_1 = m . p$$

les équations connues du caténoïde.

Les équations $B$ donnent le même résultat.

Les formules ci-dessus permettent de construire point par point la courbe, pour chaque valeur de $H$ et de $m$, le module étant donné. Si nous voulons maintenant indiquer la forme générale des deux courbes ($H$ positif et $H$ négatif) nous procédons de la façon la plus pratique de cette manière:

Nous groupons ensemble les formules obtenues ci-dessus

$$f_1 = -\frac{1}{H} sn\, u_1 + \frac{k}{H} u_1 - \frac{1}{kH} Z(u_1)$$

$$f = \frac{1}{H} cn\, u_1 - \frac{1}{kH} dn\, u_1 ,$$

que nous transformons au moyen de l'égalité $k = \frac{1}{1 - mH}$ ou $\frac{1}{H} = m\frac{k}{k-1}$ en

$$f_1 = -m\frac{k}{k-1} sn\, u_1 + \frac{m k^2}{k-1} u_1 - \frac{m}{k-1} Z(u_1)$$

et $$f = \frac{m k}{k-1} cn\, u_1 - \frac{m}{k-1} dn\, u_1 .$$

I°. $H$ négatif, $0 < k^2 < 1$.

Comme on le sait, $Z(u_1) = \int_0^{u_1} k^2 sn^2 u_1 . du_1 = \frac{\Theta''(0)}{\Theta^2(0)} u_1 - \frac{\Theta'(u_1)}{\Theta(u_1)}$ ou le $\Theta$ est la fonction elliptique bien connue.

La valeur de $f$ a la période $4K$, et tel est aussi le cas avec les parties $sn\, u_1$ et $\frac{\Theta'(u_1)}{\Theta(u_1)}$ du second membre de $f_1$.

Donc toutes les fois que $u_1$ accuse un accroissement de $4K$, $f_1$ s'est accru d'une quantité constante, tandis que $f$ a acquis la même valeur. Les points où $u_1$ s'est accru de $4K$ se trouvent par conséquent à égale distance sur une droite, parallèle à l'axe $f_1$. La longueur de ces distances est facile à écrire.

Pour $u_1 = 0$, on a $f_1 = 0$ et $f = m$, comme ce doit être.

Nous trouvous facilement:

$$\frac{\partial f_1}{\partial f} = \frac{\partial f_1}{\partial u} : \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{cn\, u_1}{sn\, u_1}$$

ce qui peut se deduire de façon élémentaire.

De là on conclut

$$\frac{\partial f_1}{\partial f} = 0 \quad \text{pour } u_1 = K \text{ ou } u_1 = 3K$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial f} = \infty \quad \text{pour } u_1 = 2K.$$

De plus

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} = \frac{m}{k-1}(-k\,cn\,u_1\,dn\,u_1 + k^2\,cn^2\,u_1) = \frac{km}{k-1}\,cn\,u_1\,(\;dn\,u_1 + k\,cn\,u_1$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial u_1^2} = \frac{m}{k-1} \times k\,sn\,u_1\,(dn\,u_1 - k\,cn\,u_1)^2\,.$$

Pour $u_1 = K$: $\quad \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} = \dfrac{m}{k-1} \times 0 = 0$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial u_1^2} = \frac{m}{k-1} \times k \times k'^2 \quad \text{où} \quad k'^2 = 1 - k^2$$

Pour $u_1 = 3K$: $\quad \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} = 0$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial u_1^2} = \frac{m}{k-1} \times -k \times k'^2\,.$$

Seulement pour $u_1 = K$ ou $u_1 = 3K$ l'on obtient $\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} = 0$, donc il n'y a que ce maximum et minimum.

Dans le cas de $u_1 = K$, $f_1$ a atteint un maximum, dans le cas de $u_1 = 3K$ $f_1$ est un minimum [1])

Je laisse au lecteur à déduire la proposition suivante qui est très simple:

les valeurs de $f$ pour $u_1 = K$ ou $u_1 = 3K$ forment la moyenne géométrique entre les valeurs de $f$ pour $u_1 = 0$ et $u_1 = 2K$.

On trouve également avec facilité que: la valeur de $f_1$ pour $u_1 = 2K$ est la valeur moyenne des valeurs de $f_1$ pour $u_1 = K$ et $u_1 = 3K$.

Comme on peut le voir par la formule pour $\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}$ décroît régulièrement de $u_1 = 0$ jusqu'à $u_1 = K$, devient negatif,

---

[1]) Il s'ensuit aussi, que les valeurs de $k$ entre 0 et $-1$, qui ne se présentent pas, n'ont pas de signification essentielle. Si par exemple $k = -\frac{1}{2}$, les parties de la courbe, situées au dessus et au dessous de l'axe $F$, sont inverties simplement.

atteint la plus grande valeur négative pour $u_1 = 2K$, et devient de nouveau zéro pour $u_1 = 3K$ pour accroître après de nouveau jusqu'à $u_1 = 4K$, et pour atteindre pour $u_1 = 4K$ la même valeur que pour $u_1 = 0$.

Nous pouvous tirer les mêmes conclusions pour les valeurs de $\frac{\partial f}{\partial u_1}$ ; $\frac{\partial f}{\partial u_1}$ devient zéro pour $u_1 = 0$ et $u_1 = 2K$ (respect. minimum et maximum pour $f$).

Des considérations ci-dessus, l'on déduit suffissamment la forme des courbes (pour la courbure moyenne négative) comme elle est representée par la figure ci-contre 3, et à laquelle Plateau a donné le nom de Nodoïde.

II° $H$ positif; $k^2 > 1$.

Si l'on veut donner des valeurs déterminées à $k$, l'on doit se reporter aux formules $A$ et $B$; le cas $k^2 = \infty$ p. e. se résout alors facilement, car l'on a $k_1 = 0$ lequel accuse tout de suite la forme cylindrique. Cependant nous pouvons facilement déterminer la forme générale de la courbe, sans effectuer le changement de $k$ en $k_1$.

Comme $k^2 > 1$, la période de $f$ et des membres periodiquement variables de $f_1$ $\left(sn\, u_1 \text{ et } \frac{\Theta'(u_1)}{\Theta(u_1)}\right)$ est ici $4K + 4K'\sqrt{-1}$.

De plus nous avons ici comme ci-dessus

$$\frac{df_1}{df} = \frac{cn\, u_1}{sn\, u_1}.$$

Comme on le sait, l'on a $sn\, u_1 = 0$ pour $u_1 = 0$ et $u_1 = 2K + 2K'\sqrt{-1}$, donc $\frac{df_1}{df} = \infty$ pour ces valeurs de $u_1$.

Mais $cn\, u_1$ ne peut pas devenir zéro, mais atteint un minimum quand

$$-sn^2\, u_1 \,.\, dn\, u_1 - cn^2\, u_1 \,.\, dn\, u_1 = 0$$
$$\text{ou } dn\, u_1 = 0$$

ce qui est seulement possible lorsque $u_1 = K + K'\sqrt{-1}$

ou $$u_1 = 3K + K'\sqrt{-1}.$$

Nous trouvons facilement pour ces minima

$$\frac{df_1}{df} = -k'\sqrt{-1}\ , \text{ quand } u_1 = K + K'\sqrt{-1} \text{ etc.}$$

Cette valeur n'est pas imaginaire, car $k^2 > 1$, et c'est pourquoi $k' = \sqrt{1-k^2}$ est imaginaire, donc $k'\sqrt{-1}$ a une signification réelle.

De plus

$$\frac{df_1}{df} = -k'\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}\sqrt{1-k^2} = \sqrt{k^2-1} = \frac{1}{1-Hm}\sqrt{Hm(2-Hm)}$$

Ceci donne pour $Hm = 1$ (cylindre) $\frac{df_1}{df} = \infty$, pour $Hm = 2$ (sphère) $\frac{df_1}{df} = 0$ comme minimum.

Si de plus nous nous rappelons les formules données ci-dessus pour $\frac{\partial f_1}{\partial u_1}$ et $\frac{\partial^2 f_1}{\partial u_1^2}$ alors l'on voit que $\frac{\partial f_1}{\partial u_1}$ ne peut jamais devenir zéro et que la courbe va toujours en s'élevant parallèle à l'axe $F^1$.

Pour $u_1 = 4K + 4K'\sqrt{-1}$, $f$ a la même valeur que pour $u_1 = 0$.

Pour $u_1 = 2K + 2K'\sqrt{-1}$, $\frac{\partial f}{\partial u_1}$ atteint la valeur zéro comme pour $u_1 = 0$ et $u_1 = 4K + 4K'\sqrt{-1}$; dans le premier cas $f$ a une valeur maximum, dans les deux derniers cas une valeur minimum. Les valeurs elles mêmes sont faciles à écrire.

L'on peut aussi démontrer facilement que la valeur de $f$ lorsque $u_1 = K + K'\sqrt{-1}$ (ou $u_1 = 3K + 3K'\sqrt{-1}$) forme la moyenne géometrique entre les valeurs de $f$ pour $u_1 = 0$ et $u_1 = 2K + 2K'\sqrt{-1}$.

La valeur de $f_1$ pour $u_1 = 2K + 2K'\sqrt{-1}$ est la moyenne arithmétique entre la valeur de $f_1$, lorsque $u_1 = K + K'\sqrt{-1}$ et la valeur de $f_1$, lorsque $u_1 = 3K + 3K'\sqrt{-1}$.

La forme générale de la courbe pour $H$ positif est aussi représentée par la figure 3. Cette courbe a été nommée par Plateau Onduloïde.

Il sera assez superflu de dire que pour $H$ negatif la courbe se répète pour les valeurs de $u_1$ plus grandes que $4K$, et la même chose a lieu pour $H$ positif, pour les valeurs de $u_1$ plus grandes que $4K + 4K'\sqrt{-1}$.

---

# LES COURBES DE PLISSEMENT

ET LEUR

# POINT DOUBLE CHEZ LES MÉLANGES DE SUBSTANCES NORMALES, DANS LE CAS QUE LES VOLUMES MOLÉCULAIRES SONT INÉGAUX

PAR

J. J. VAN LAAR.

---

## § 1.

Dans un Mémoire antérieur [1]) j'ai fait voir, que l'équation de la courbe de plissement, savoir

$$\left.\begin{array}{c} x(1-x)\Theta^3\left[(1-2x)v-3x(1-x)\beta\right]+\sqrt{a}\,.\,(v-b)^2 \\ \left[3x(1-x)\Theta(\Theta-\beta\sqrt{a})+a(v-b)(v-3b)\right]=0 \\ RT=\frac{2}{v^3}\left[x(1-x)\Theta^2+a(v-b)^2\right] \end{array}\right\}\,.\,(1)$$

où $\Theta=\alpha v-\beta\sqrt{a}$, $\alpha=\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}$ et $\beta=b_2-b_1$, donne lieu à *deux* courbes distinctes (voir la planche, fig. 1 et 2).

Lorsque le rapport des deux températures critiques *dépasse* une certaine limite, on aura le cas de la fig. 1, où l'une des deux courbes $C_1A$ va de la température critique la plus basse $C_1$ au point $A$, où $T=0$, $v=b$, $x=0$; tandis que l'autre va de la température critique la plus élevée $C_2$ jusqu'à la „troisième" température critique $C_0$, où $v=b$, tandis que les valeurs de $T$ et de $x$ dépendant des équations (1).

---

[1]) Voir V. K. A. v. W. Amsterdam du 7 Juin 1905, p. 14–29. La déduction de l'équation de la courbe de plissement est donné dans les V. K. A. v. W. du 5 Avril 1905, p. 685–696.

Lorsque au contraire le rapport des deux températures critiques est *au dessous* de la limite mentionnée, on aura le cas de la fig. 2, où on aura les deux courbes $C_1 C_2$ et $C_0 A$.

Dans le cas-limite, où les deux cas se confondent, on aura un *point double* $P$.

Or, nous avons calculé les données diverses des deux courbes de plissement dans les deux cas, et les données du point double, seulement dans la supposition simplificatrice que $\beta$ serait $= 0$, c.-à-d. que $b_1 = b_2$; et on verra facilement, que le cours des lignes de plissement sera modifié seulement *quantitativement*, et non qualitativement, quand $\beta$ n'est pas $= 0$. Egalement les données du point double subiront dans ce cas plus général une modification plus ou moins forte.

Ce sera le but de l'étude suivant de déduire les valeurs des coördonnées du point double $P$ dans le cas le plus général. Alors nous saurons en même temps pour tous les cas possibles le rapport des deux températures critiques, où aura lieu la transition des deux cas, représentées dans les figg. 1 et 2 du Mémoire cité, de sorte que nous pourrons prédire pour une valeur quelconque du rapport nommé, si l'un on l'autre des deux cas se présentera.

## § 2.

En premier lieu nous réduirons la première des équations (1) — la projection de la courbe dans l'espace sur le plan $v, x$ — dans une forme plus homogène. Or, comme je viens d'exécuter cela dans un Mémoire récent „Sur l'élévation moléculaire de la température critique la plus basse" [1]), je renvoie le lecteur intéressé, quant aux déductions successives, à ce Mémoire.

En posant

$$\frac{\sqrt{a_1}}{\alpha} = \varphi \quad ; \quad \frac{b_1}{v} = \omega \quad ; \quad \frac{\beta}{v} = n\omega, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

nous aurons, $\sqrt{a}$ étant $= \sqrt{a_1} + x(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}) = \sqrt{a_1} + x\alpha$, et $b = b_1 + x(b_2 - b_1) = b_1 + x\beta$:

---

[1]) V. K. A. v. W. Amsterdam du 14 Juillet 1905, p. 108—116.

$$\frac{\sqrt{a}}{\alpha} = \varphi + x = \psi \quad ; \quad \frac{b}{v} = (1 + nx)\,\omega,$$

et le résultat des substitutions sera l'équation [1])

$$(1 - \psi n \omega)^3 \left[(1 - 2x) - 3x(1 - x)\, n\omega\right] + 3\,\psi\,(1 - (1 + nx)\,\omega)^2$$
$$(1 - \psi n \omega)(1 - 2\psi n \omega) + \frac{\psi^3 (1 - (1 + nx)\,\omega)^3 (1 - 3(1 + nx)\,\omega)}{x(1 - x)} = 0.$$

Pour des valeurs données de $\varphi$ et de $n$ on aura donc $\omega$ exprimé en fonction de $x$.

Posons encore, pour simplifier:

$$\underline{1 - \psi n \omega = z} \quad ; \quad \underline{1 - (1 + nx)\,\omega = y}; \ldots\ldots\ldots (3)$$

alors l'équation précédente devient:

$$\left.\begin{aligned} f = z^3 \left[(1 - 2x) - 3x(1 - x)\, n\omega\right] + 3\,\psi\, y^2 z (2z - 1) + \\ + \frac{\psi^3 y^3 (3y - 2)}{x(1 - x)} = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (a)$$

Le point double est donné maintenant par les deux équations

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial \omega} = 0.$$

Donc, en remarquant que $(\psi = \varphi + x)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\,n\omega \;;\; \frac{\partial z}{\partial \omega} = -\psi n \;;\; \frac{\partial y}{\partial x} = -\,n\omega \;;\; \frac{\partial y}{\partial \omega} = -\,(1 + nx),$$

nous aurons encore les équations:

$$\left.\begin{aligned} z^3 \left[-2 - 3(1 - 2x)\, n\omega\right] - 3z^2 n\omega\lambda' + 3y^2 z (2z - 1) - \\ - 6\,\psi y z (2z - 1)\, n\omega - 3\,\psi y^2 (4z - 1)\, n\omega + \\ + \frac{3\psi^2 y^3 (3y - 2) - \psi^3 (12y^3 - 6y^2)\, n\omega}{x(1 - x)} + \frac{\psi^3 y^3 (3y - 2)(1 - 2x)}{x^2 (1 - x)^2} = 0 \end{aligned}\right\} (b)$$

et

$$\left.\begin{aligned} z^3 (-3x(1 - x)\, n) - 3z^2 \psi n \lambda' - 6\,\psi y z (2z - 1)(1 + nx) - \\ - 3\,\psi y^2 (4z - 1)\,\psi n - \frac{\psi^3 (12y^3 - 6y^2)(1 + nx)}{x(1 + x)} = 0 \end{aligned}\right\}, (c)$$

lorsque $\qquad \lambda' = (1 - 2x) - 3x(1 - x)\, n\omega.$

Ce sont les équations $(a)$, $(b)$ et $(c)$ combinées, qui donneront, après élimination successive, les valeurs de $\psi$ $(\varphi)$ $\omega$ et $x$, exprimées dans le seul paramètre $n$.

---

[1]) Voir p. 110.

Cependant, comme nous irons le voir, cette élimination et la solution définitive de ce problème est loin d'être facile.

## § 3.

Multiplions l'équation ($a$) par $\psi$, ($b$) par $\psi^2$ et ($c$) par $\psi\omega$. On obtient alors, puisque

$$\psi n \omega = 1 - z \quad ; \quad (1 + nx)\,\omega = 1 - y,$$

les équations:

$$\left.\begin{array}{l}
z^3 \lambda + 3\psi^2 y^2 z (2z - 1) + \dfrac{\psi^4 y^3 (3y - 2)}{x(1-x)} = 0 \ldots\ldots (a) \\[2ex]
\left.\begin{array}{l}
\psi z^3 [-2\psi - 3(1-2x)(1-z)] - 3z^2(1-z)\lambda - 3\psi^2 y \\
[-yz(2z-1) + 2z(2z-1)(1-z) + y(4z-1)(1-z)] + \\
+ \dfrac{3\psi^4 y^2 [y(3y-2) - 2(2y-1)(1-z)]}{x(1-x)} - \dfrac{\psi^5 y^3 (3y-2)(1-2x)}{x^2(1-x)^2} = 0
\end{array}\right\} (b) \\[2ex]
\left.\begin{array}{l}
-3z^3(1-z)x(1-x) - 3z^2(1-z)\lambda - 3\psi^2 y [2(1-y)z(2z-1) + \\
\quad + y(4z-1)(1-z)] - \dfrac{6\psi^4 y^2 (2y-1)(1-y)}{x(1-x)} = 0
\end{array}\right\} (c)
\end{array}\right\},$$

où $$\lambda = \psi\lambda' = \psi(1-2x) - 3(1-z)x(1-x) \ldots\ldots (\alpha)$$

Nous déformerons en premier lieu l'équation ($b$).

Comme

$$\psi(1-2x) = \lambda + 3(1-z)x(1-x),$$

on aura:

$$\begin{array}{l}
-2\psi^2 z^3 - 3z^3(1-z)\{\lambda + 3(1-z)x(1-x)\} - 3z^2(1-z)\lambda - \\
-3\psi^2 y [\quad yz(2z-1) + 2z(2z-1)(1-z) + y(4z-1)(1-z)] + \\
+ \dfrac{3\psi^4 y^2 [y(3y-2) - 2(2y-1)(1-z)]}{x(1-x)} - \\
\qquad - \dfrac{\psi^4 y^3 (3y-2)\{\lambda + 3(1-z)x(1-x)\}}{x^2(1-x)^2} = 0,
\end{array}$$

ou bien

$$\begin{array}{l}
-2\psi^2 z^3 - 3z^3(1-z)\lambda - 9z^3(1-z)^2 x(1-x) - 3z^2(1-z)\lambda - \\
-3\psi^2 y [-yz(2z-1) + 2z(2z-1)(1-z) + y(4z-1)(1-z)] + \\
+ \dfrac{3\psi^4 y^2 [y(3y-2) - 2(2y-1)(1-z)]}{x(1-x)} - \dfrac{\psi^4 y^3 (3y-2)\lambda}{x^2(1-x)^2} - \\
\qquad - \dfrac{3\psi^4 y^3 (3y-2)(1-z)}{x(1-x)} = 0.
\end{array}$$

Substitution de la valeur de $\lambda$, tirée de ($a$), donne maintenant:

$$\begin{aligned}
&-2\psi^2 z^3 + \{9\psi^2 y^2 z(2z-1)(1-z)\} - 9z^3(1-z)^2 x(1-x) + \\
&+ \left\{9\psi^2 y^2(2z-1)(1-z) + \frac{3\psi^4 y^3(3y-2)(1-z)}{zx(1-x)}\right\} - \\
&-3\psi^2 y[-yz(2z-1) + 2z(2z-1)(1-z) + y(4z-1)(1-z)] + \\
&+ \frac{3\psi^4 y^2[y(3y-2) - 2(2y-1)(1-z)]}{x(1-x)} + \\
&+ \left\{\frac{3\psi^6 y^5(3y-2)(2z-1)}{z^2x^2(1-x)^2} + \frac{\psi^8 y^6(3y-2)^2}{z^3x^3(1-x)^3}\right\} = 0.
\end{aligned}$$

Le terme $\frac{3\psi^4 y^3(3y-2)(1-z)}{x(1-x)}$ dans le commencement de l'expression précédente a disparu contre un terme identique avec le signe — à la fin de cette expression.

Après quelques légères réductions l'équation dernière se transforme en

$$\begin{aligned}
&-2\psi^2 z^3 + 9\psi^2 y^2(2z-1)(1-z^2) - 3\psi^2 y[-yz(2z-1) + \\
&+ 2z(2z-1)(1-z) + y(4z-1)(1-z)] - 9z^3(1-z)^2 x(1-x) + \\
&+ \frac{3\psi^4 y^2[y(3y-2) - 2(2y-1)z(1-z)]}{zx(1-x)} + \\
&+ \frac{3\psi^6 y^5(3y-2)(2z-1)}{z^2x^2(1-x)^2} + \frac{\psi^8 y^6(3y-2)^2}{z^3x^3(1-x)^3} = 0.
\end{aligned}$$

Posons maintenant:

$$\frac{\psi^2 y}{zx(1-x)} = u; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

alors on obtient, en divisant par $\psi^2$:

$$\left.\begin{aligned}
&-2z^3 + 9y^2(2z-1)(1-z^2) - 3y[-yz(2z-1) + \\
&+ 2z(2z-1)(1-z) + y(4z-1)(1-z)] - \frac{9yz^2(1-z)^2}{u} + \\
&+ 3y[y(3y-2) - 2(2y-1)z(1-z)]u + \\
&+ 3y^3(3y-2)(2z-1)u^2 + y^3(3y-2)^2u^3 = 0
\end{aligned}\right\} \quad (b)$$

En second lieu nous déformerons l'équation ($c$).

Substitution de $\lambda$, tirée de ($a$) donne:

$$\begin{aligned}
&-3z^3(1-z)x(1-x) + \left\{9\psi^2 y^2(2z-1)(1-z) + \frac{3\psi^4 y^3(3y-2)(1-z)}{zx(1-x)}\right\} - \\
&-3\psi^2 y[2(1-y)z(2z-1) + y(4z-1)(1-z)] - \frac{6\psi^4 y^2(2y-1)(1-y)}{x(1-x)} = 0,
\end{aligned}$$

ou bien

$$-3z^3(1-z)x(1-x)-3\psi^2 y\,[2y(1-z)^2+2(1-y)z(2z-1)]+$$
$$+\frac{3\psi^4 y^2\,[y(3y-2)(1-z)-2(2y-1)(1-y)z]}{zx(1-x)}=0.$$

En divisant par $-3\psi^2 y$, et après introduction de $u$ d'après (4), nous obtenons:

$$\frac{z^2(1-z)}{u}+2\,[y(1-z)^2+(1-y)z(2z-1)]-$$
$$-[y(3y-2)(1-z)-2(2y-1)(1-y)z]\,u=0,$$

ou bien l'équation quadratique en $u$:

$$\left.\begin{array}{l}[y(3y-2)(1-z)-2(2y-1)(1-y)z]\,u^2-\\ \quad -2\,[y(1-z)^2+(1-y)z(2z-1)]\,u-z^2(1-z)=0\end{array}\right\}.\ (c)$$

Les équations ($b$) et ($c$) combinées donnerent, après élimination de $u$, la grandeur $y$ en fonction de $z$, donc la solution provisoire du problème que nous nous avons posé.

## § 4.

On peut encore simplifier un peu l'équation ($b$), en substituant la valeur de $\frac{z^2(1-z)}{u}$ tirée de ($c$) dans le terme $-\frac{9yz^2(1-z)^2}{u}$. Alors on obtiendra:

$$-2z^3+9y^2(2z-1)(1-z^2)-3y\,[-yz(2z-1)+2z(2z-1)(1-z)+$$
$$+y(4z-1)(1-z)]+18y(1-z)\,[y(1-z)^2+(1-y)z(2z-1)]-$$
$$-9y(1-z)\,[y(3y-2)(1-z)-2(2y-1)(1-y)z]\,u+$$
$$+3y\,[y(3y-2)-2(2y-1)z(1-z)]\,u+$$
$$+3y^3(3y-2)(2z-1)u^2 \quad y^3(3y-2)^2u^3=0,$$

où les deux termes avec $u$ peuvent être réunis en un seul terme

$$3y\,[y(3y-2)\{1-3(1-z)^2\}-2(2y-1)(3y-2)z(1-z)]\,u,$$

c.-à-d.

$$3y(3y-2)\,[y\{1-3(1-z)^2\}-2(2y-1)z(1-z)]\,u.$$

En posant

$$\underline{z=1-q}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

l'équation (*b*) se transformera en

$$[9y^2(1-2q)q(2-q)+3y^2(1-q)(1-2q)-3y^2q(3-4q)+ \\ +18y^2q^3-18y^2q(1-q)(1-2q)]+[-6yq(1-q)(1-2q)+ \\ +18yq(1-q)(1-2q)]-2(1-q)^3+3y(3y-2)[y(1-4q+q^2)+ \\ +2q(1-q)]u+3y^3(3y-2)(1-2q)u^2+y^3(3y-2)^2u^3=0,$$

ou bien en

$$3y^2(1-3q)^2+12yq(1-q)(1-2q)-2(1-q)^3+ \\ +3y(3y-2)[y(1-4q+q^2)+2q(1-q)]u+ \\ +3y^3(3y-2)(1-2q)u^2+y^3(3y-2)^2u^3=0.$$

Enfin nous écriverons:

$$\underline{y=1-p}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

et l'équation dernière deviendra:

$$\left.\begin{array}{l}3p^2(1-3q)^2-6p(1-4q+3q^2+4q^3)+(1-15q^2+26q^3)+ \\ +3(1-p)(1-3p)[(1-2q-q^2)-p(1-4q+q^2)]u+ \\ +3(1-p)^3(1-3p)(1-2q)u^2+(1-p)^3(1-3p)^2u^3=0\end{array}\right\}. \quad (b)$$

Substituation de $z=1-q$ et $y=1-p$ dans l'équation (*c*) donne après quelques réductions:

$$\left.\begin{array}{l}[p^2(4-q)-2p(1+q)+q]u^2-2[p(1-3q+q^2)+q^2]u- \\ \qquad -q(1-q)^2=0\end{array}\right\}. \quad (c)$$

Et cette équation quadratique a pour solution:

$$u=\frac{p(1-3q+q^2)+q^2+(p-q)\sqrt{1-2q(1-q)}}{p^2(4-q)-2p(1+q)+q},$$

le discriminant étant

$$[p(1-3q+q^2)+q^2]^2+q(1-q)^2[p^2(4-q)-2p(1+q)+q]= \\ =(p-q)^2\{1-2q(1-q)\}.$$

(Le second racine avec le signe — ne satisfera pas).

Or, puisqu'on a:

$$(4-q)[p^2(4-q)-2p(1+q)+q]= \\ =[p(4-q)-(1+q)]^2-\{\sqrt{1-2q(1-q)}\}^2$$

et

$$(4-q)[p(1-3q+q^2)+q^2+(p-q)\sqrt{\ }]= \\ =[p(4-q)-(1+q)+\sqrt{\ }][(1-3q+q^2)+\sqrt{\ }],$$

ou pourra diviser le nominateur et le dénominateur par

$$p(4-q)-(1+q)+\sqrt{1-2q(1-q)},$$

et l'on obtiendra:

$$u = \frac{(1 - 3q + q^2) + \sqrt{1 - 2q(1-q)}}{p(4-q) - (1+q) - \sqrt{1 - 2q(1-q)}},$$

ou bien

$$u = \frac{\dfrac{1 + q + \sqrt{\phantom{x}}}{4 - q} - q}{p - \dfrac{1 + q + \sqrt{\phantom{x}}}{4 - q}}.$$

En posant maintenant:

$$\frac{1 + q + \sqrt{1 - 2q(1-q)}}{4 - q} = k, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

on aura finalement:

$$u = \frac{k - q}{p - k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

*Remarque.* Dans le cas que nous avons étudié déjà autrefois, [1]) on avait $n = 0$, donc $z = 1$, $q = 0$, et la valeur de $u$, tirée de ($c$), deviendrait alors:

$$u = \frac{p \pm p}{4p^2 - 2p}.$$

Or, l'équation ($c$) sur le page 27 du Mémoire cité donnerait:

$$u = \frac{\psi^2 y}{x(1-x)} = \frac{1}{1 - 2y} = \frac{1}{2p - 1}.$$

Nous voyons donc — comme nous l'avons déjà remarqué plus haut — que seulement le signe + satisfera.

§ 5.

Il nous reste donc seulement la substitution de $u = \dfrac{k - q}{p - k}$ dans la dernière équation ($b$), pour avoir $p = f(q)$. Cette substitution s'effectuera cependant plus facilement, lorsque nous introduisons:

$$u' = u + 1 = \frac{p - q}{p - k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8^a)$$

[1]) Mémoire cité. (V. K. A. v. W. 7 Juin 1905.)

L'équation ($b$) deviendra alors avec $u = u' - 1$:

$$(p-q)^2\,[9p^3 - 24p^2 + p(25-24q) - 2(6-13q)] -$$
$$-3(p-q)[9p^4 - 3p^3(9+q) + p^2(29+q) - p(13-3q) + (2-q)]u' +$$
$$+3(1-p)^3(1-3p)(3p-2q)u'^2 + (1-p)^3(1-3p)^2u'^3 = 0.$$

Substituant maintenant pour $u'$ sa valeur, *on peut diviser l'équation dernière par* $(p-q)^2$. Multiplication par $(p-k)^3$ donnera ensuite:

$$(p-k)^3\,[9p^3 - 24p^2 + p(25-24q) - 2(6-13q)] -$$
$$-3(p-k^2\,[9p^4 - 3p^3(9+q) + p^2(29+q) - p(13-3q) + (2-q)] +$$
$$+3(p-k)(1-p)^3(1-3p)(3p-2q) + (1-p)^3(1-3p)^2(p-q) = 0,$$

ou bien, réduction faite:

$$3p^3\,[(1-3q) - 3k(1-2q) + 3k^2(1+q) - 3k^3] -$$
$$-3p^2\,[(2-3q) - 4k(1+q) + k^2(4+25q) - 8k^3] +$$
$$+p\,[(1+3q) + 3k(1-14q) + 3k^2(1+23q) - k^3(25-24q)] -$$
$$-[q - 6kq + 3k^2(2-q) - 2k^3(6-13q)] = 0$$

Les termes avec $p^6$, $p^5$ et $p^4$ ont disparu nettement.

Pour procéder plus loin, il faut exprimer maintenant la valeur de $q$ en function de $k$ L'équation (7) donnera:

$$q = \frac{2k(1-2k)}{1-2k-k^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

et notre équation dernière deviendra après substitution:

$$3p^3(1-9k+15k^2-3k^3) - 6p^2(1-2k)(1-5k-3k^2+21k^3-2k^4):$$
$$:(1-2k-k^2) + p(1+7k-100k^2+272k^3-181k^4-71k^5):$$
$$:(1-2k-k^2) - 2k(1-2k)(1-3k-9k^2+23k^3):(1-2k-k^2) = 0.$$

Multiplication par $(1-2k-k^2)$ et division par $p(1-2k-k^2) - 2k(1-2k)$ donnera enfin:

$$3p^2(1-9k+15k^2-3k^3) - 6p(1-2k)(1-4k-k^2) +$$
$$+(1-3k-9k^2+23k^3) = 0.$$

Nous trouvons donc comme résultat de nos calculs une équation *quadratique*, de même que dans le cas simple $\beta = 0$. Alors on a $q = 0$, et donc $k = 1/2$ d'après (7); de sorte que l'équation dernière devient dans ce cas:

$$-\tfrac{3}{8}p^2 + \tfrac{1}{8} = 0,$$

ou bien $3p^2 = 1$, $p = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$, la même valeur que nous avons trouvé autrefois. (voir p. 27 du Mémoire cité plus haut).

La solution de l'équation générale pour $p$ sera:

$$p = \frac{(1-2k)(1-4k-k^2)+(1-k)(1-3k)\sqrt{\tfrac{1}{3}(2-8k+9k^2)}}{1-9k+15k^2-3k^3} \quad . . (10)$$

Pour $k = \frac{1}{2}$ cela devient:

$$p = \frac{-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{8}} = \sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

d'où nous voyons, que l'autre racine ne satisfera pas.

## § 6.

Maintenant nous pouvons déjà mieux promener la vue sur la solution du problème, que nous nous avons posé.

En effet, $k$ étant donné en fonction de $q$ par (7), nous aurons par (10) $p$ exprimé en $q$. D'ailleurs $u = \frac{\psi^2 y}{zx(1-x)}$ sera connu alors en vertu de (8); de sorte que $\frac{\psi^2}{x(1-x)}$ sera également connu en fonction de $q$, $y$ étant $= 1-p$ et $z = 1 \quad q$. Mais nous avons encore une autre relation entre $\psi$ et $x$, c.-à-d. l'équation ($a$) du § 3, où on peut substituer $\lambda$ par sa valeur, donnée par ($\alpha$). Ces deux relations nous donneront donc $\psi$ (et par conséquent $\varphi$) et $x(1-x)$ séparément, toujours encore en fonction de $k$ ou $q$.

Alors les équations (3) nous fourniront $\omega$ et $n$ en fonction de $k$, de sorte que nous pourrons exprimer maintenant $\varphi$, $x$ et $\omega$ *en fonction de* $n$, et notre problème aura trouvé sa solutions définitive.

Mais nous ne sommes pas encore si loin.

En vertu de (8) et (9) nous avons:

$$u = \frac{k - \frac{2k(1-2k)}{1-2k-k^2}}{p-k} = -\frac{k(1-k)^2}{(p-k)(1-2k-k^2)},$$

donc, $u$ étant $= \frac{\psi^2}{x(1-x)} \frac{1-p}{1-q}$, où $1-q = \frac{(1-k)(1-3k)}{1-2k-k^2}$, aussi:

$$\frac{\psi^2}{x(1-x)} = -\frac{k(1-k)^3(1-3k)}{(1-p)(p-k)(1-2k-k^2)^2}.$$

Il faut donc exprimer $1-p$ et $p-k$ en $k$. De l'équation (10) il s'ensuit:

$$1-p=\frac{1-k}{N}\left[(-3k+5k^2)-(1-3k)\sqrt{\tfrac{1}{3}(2-8k+9k^2)}\right]=\frac{1-k}{N}\,l_1$$

$$p-k=\frac{(1-k)(1-3k)}{N}\left[1-3k+k^2+\sqrt{\phantom{x}}\right]=\frac{(1-k)(1-3k)}{N}\,l_2,$$

$N$ étant $1-9k+15k^2-3k^3$.

Nous trouvons donc:

$$\frac{\psi^2}{x(1-x)}=-\frac{k(1-k)N^2}{(1-2k-k^2)^2\,l_1 l_2}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

ou bien, comme

$$l_1 l_2=(1-k)\left[\tfrac{1}{3}(-2+3k+12k^2-15k^3)+ \right.$$
$$\left. +(-1+2k-3k^2)\sqrt{\phantom{x}}\right]=(1-k)\,B,$$

aussi:

$$\frac{\psi}{x(1-x)}=-\frac{k\,N^2}{(1-2k-k^2)^2\,B}.$$

Lorsqu'on écrit $B'$ pour $\tfrac{1}{3}(-2+3k+12k^2-15k^3)-(-1+2k-3k^2)\sqrt{\phantom{x}}$, on aura:

$$\underline{BB'=-\tfrac{2}{9}N^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

de sorte que la relation dernière devient:

$$\underline{\frac{\psi^2}{x(1-x)}=\frac{9}{2}\,\frac{k\,B'}{(1-2k-k^2)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

L'équation ($a$) (voir § 3) était:

$$(1-q)^3\lambda+3\psi^2(1-p)^2(1-q)(1-2q)+\frac{\psi^4(1-p)^3(1-3p)}{x(1-x)}=0,$$

où $$\lambda=\psi(1-2x)-3qx(1-x).$$

Avec $\frac{\psi^2}{x(1-x)}=f$ cela devient donc:

$$(1-q)^3\left[\psi(1-2x)-3qx(1-x)\right]+3fx(1-x)(1-p)^2(1-q)(1-2q)+$$
$$+fx^2(1-x)(1-p)^3(1-3p)=0,$$

ou bien

$$x(1-x)\left[-3q(1-q)^3+3f(1-p)^2(1-q)(1-2q)+\right.$$
$$\left.+f^2(1-p)^3(1-3p)\right]=-\psi(1-2x)(1-q)^3;$$

donc, en quadratant:

$$x(1-x)[\quad]^2 = f\{1-4x(1-x)\}(1-q)^6,$$

d'où l'on peut résoudre:

$$x(1-x) = \frac{f(1-q)^6}{[\quad]^2 + 4f(1-q)^6},$$

ou enfin

$$x(1-x) = \frac{1}{f\left[\frac{3(1-p)^2(1-2q)}{(1-q)^2} + f\frac{(1-p)^2(1-3p)}{(1-q)^3} - \frac{3q}{f}\right]^2 + 4}. \quad (\beta)$$

Or, en vertu de (9) on aura:

$$1-2q = \frac{1-6k+7k^2}{1-2k-k^2},$$

et en vertu de (10):

$$1-3p = \frac{1-3k}{N}[(-2+3k+3k^2) - 3(1-k)\sqrt{\quad}] = \frac{1-3k}{N} l_3.$$

L'expression $f[\quad]^2$ devient donc, avec la valeur de $f = \frac{\psi^2}{x(1-x)}$ que nous avons trouvé plus haut (voir l'équation ($\alpha$)):

$$-\frac{k(1-k)N^2}{(1-2k-k^2)^2 l_1 l_2}\left[\frac{3(1-6k+7k^2)1-2k-k^2)l_1^2}{N^2(1-3k)^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{k(1-k)(1-2k-k^2)l_1^2 l_3}{N^2(1-3k)^2 l_2} + \frac{6(1-2k)(1-2k-k^2)l_1 l_2}{N^2(1-k)}\right]^2,$$

en substituant pour $q$, $1-q$, $1-2q$, $1-p$ et $1-3q$ leurs valeurs, trouvées plus haut. On peut écrire aussi:

$$-\frac{k(1-k)l_1 l_2}{N^2(1-3k)^4}\left[3(1-6k+7k^2)\frac{l_1}{l_2} - k(1-k)\frac{l_1}{l_2}\frac{l_3}{l_2} + \right.$$
$$\left. + \frac{6(1-2k)(1-3k)^2}{1-k}\right]^2.$$

D'ailleurs on trouve facilement:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{(2-5k) - 3\sqrt{\tfrac{1}{3}(2-8k+9k^2)}}{1-k}; \quad \frac{l_3}{l_2} = \frac{3}{1-k}\{-k-\sqrt{\quad}\}$$

$$\frac{l_1}{l_2}\frac{l_3}{l_2} = \frac{6}{(1-k)^2}[(1-5k+7k^2) - (1-4k)\sqrt{\quad}].$$

L'expression, que nous venons de réduire, devient ainsi:

$$-\frac{9\,k\,l_1 l_2}{N^2(1-k)(1-3\,k)^4}\left[(4-35\,k+96\,k^2-85\,k^3)+\right.$$
$$\left.+(-3+20\,k-29\,k^2)\sqrt{\phantom{x}}\right]^2=-\frac{9\,k\,l_1 l_2\,A^2}{N^2(1-k)(1-3\,k)^4}.$$

Avec $l_1 l_2=(1-k)B$ on aura donc:

$$-\frac{9\,k\,A^2 B}{N^2(1-3\,k)^4}=\frac{2\,k\,A^2}{(1-3\,k)^4 B'},$$

en vertu de la relation (11).

Et maintenant nous pouvons écrire pour $x(1-x)$ en vertu de ($\beta$):

$$\underline{x(1-x)=\frac{(1-3\,k)^4\,B'}{2\,k\,A^2+4(1-3\,k)^4\,B'}=\frac{(1-3k)^4\,B'}{P}}\,,\quad\ldots\ (13)$$

où $A=(4-35\,k+96\,k^2-85\,k^3)+(-3+20\,k-29\,k^2)\sqrt{\tfrac{1}{3}(2-8k+9k^2)}$,

et $B'=\tfrac{1}{3}(-2+3\,k+12\,k^2-15\,k^3)-(-1+2\,k3-k^2)\sqrt{\phantom{x}}$.

## § 7.

J'ai tâché maintes fois de réducer l'expression $\frac{A^2}{B'}$ ou bien $\frac{B'}{P}$, mais il ne me semble pas possible de mettre le second membre de (13) dans une forme plus simple.

L'équation (13) est en certain sens la base de tous les calculs suivants: les grandeurs $A$, $B'$ et $P$ y joueront un rôle important.

En premier lieu on peut calculer $x$ de

$$x=\tfrac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-4\,x(1-x)}\right),$$

donnant:

$$\underline{x}=\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{\frac{2\,k\,A^2}{P}}\right]=\underline{\frac{1}{2}\left[1+2\,A\sqrt{\frac{\tfrac{1}{2}k}{P}}\right]}\quad\ldots\ (14)$$

Le signe — est changé en +, puisque $A$ est négatif (e. a. pour $k=\tfrac{1}{2}$).

En second lieu nous trouvons la valeur de $\psi$ au moyen de l'équation (12). En effet, cette équation nous donne immédia-

tement, en substituant pour $x(1-x)$ sa valeur donnée par (13):

$$\psi^2 = \frac{(1-3k)^4 B'}{P} \times \frac{9}{2} \frac{k B'}{(1-2k-k^2)^2},$$

c.-à-d.

$$\underline{\psi = -\frac{3B'(1-3k)^2}{1-2k-k^2}\sqrt{\frac{1/2\, k}{P}}} \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

Nous avons attribué au second membre le signe —, parceque $B'$ est positif, tandis qu'au contraire $1-2k-k^2$ est négatif.

Comme $\psi = \varphi + x$, nous trouvons facilement pour $\varphi$:

$$\underline{\varphi = -1/2 + \left[-A - \frac{3B'(1-3k)^2}{1-2k-k^2}\right]\sqrt{\frac{1/2\, k}{P}}} \quad \ldots (16)$$

Dans le § 2 nous avons posé (vois (3)):

$$1 - \psi n \omega = z \quad ; \quad 1 - (1 + nx)\omega = y.$$

Mais en vertu de (5) et (6) cela devient:

$$\psi n \omega = q \quad ; \quad (1 + nx)\omega = p.$$

On y tire:

$$n\omega = \frac{q}{\psi} \quad ; \quad \omega + \frac{qx}{\psi} = p,$$

donc

$$\underline{\omega = p - \frac{qx}{\psi}} \quad ; \quad \underline{n = \frac{1}{\frac{p}{q}\psi - x}} \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

On trouve donc la valeur de $\omega$ en substituant pour $p$, $q$, $x$ et $\psi$ resp. leurs valeurs, tirées de (10), (9), (14) et (15). L'expression pour $\omega$ ne s'y simplifiera pas cependant.

Quant à l'expression pour $n$, nous la mettrons en rapport avec $\Theta = \frac{T_2}{T_1}$ [1] et $\pi = \frac{p_2}{p_1}$, donc avec le rapport des deux températures critiques et des deux pressions critiques. Et nous ferons de même avec l'expression pour $\varphi$. Or, comme il s'ensuit de (2):

$$n = \frac{\beta}{b_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_1} = \frac{b_2}{b_1} - 1 = \frac{\Theta}{\pi} - 1,$$

[1]) Nous fesons remarquer, que la grandeur $\Theta$ a ici une signification tout autre que celle de la grandeur $\Theta$ dans l'équation (1).

$\Theta$ étant $= \frac{a_2}{b_2} : \frac{a_1}{b_1}$ et $\pi = \frac{a_2}{b_2^2} : \frac{a_1}{b_1^2}$, nous aurons en premier lieu:

$$\frac{\Theta}{\pi} = 1 + n = 1 + \frac{1}{\frac{p}{q}\psi - x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

Mais en second lieu on a, en vertu de (2):

$$\varphi = \frac{\sqrt{a_1}}{\alpha} = \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}},$$

donc

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}} - 1 .$$

Pour $\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}}$ ou peut écrire évidemment $\frac{\Theta}{\sqrt{\pi}}$, et nous aurons:

$$\frac{\Theta}{\sqrt{\pi}} = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{1}{\psi - x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

Puisque $p$, $q$, $\psi$ et $x$ peuvent être exprimés tous dans le seul paramètre $k$, on a deux relations, c.-à.-d (18) et (19), qui expriment $\Theta$ et $\pi$ en $k$, de sorte que nous pourrons aussi exprimer $\Theta$ en $\pi$, en eliminant $k$. Mais cela ne peut pas s'effectuer explicitement.

Il ne nous reste donc pas autre chose que d'attribuer à $k$ diverses valeurs successives, et de calculer les valeurs correspondantes de $\Theta$ et $\pi$. Ainsi nous aurons pour le point double la valeur de $\Theta$, lorsque la valeur de $\pi$ est donnée.

De (18) et (19) il s'ensuit encore:

$$\left.\begin{aligned} \Theta &= \left(\frac{1 + \psi - x}{\psi - x}\right)^2 : \frac{1 + \frac{p}{q}\psi - x}{\frac{p}{q}\psi - x} \\ \pi &= \left(\frac{1 + \psi - x}{\psi - x}\right)^2 : \left(\frac{1 + \frac{p}{q}\psi - x}{\frac{p}{q}\psi - x}\right)^2 \end{aligned}\right\} , \ldots\ldots (20)$$

étant la solution définitive de notre problème.

§ 8.

Le *lieu* des divers points doubles se trouvera en eliminant $k$ de

$$x = \frac{1}{2}\left[1 + 2A\sqrt{\frac{{}^1/_2\, k}{P}}\right]; \quad \omega = p - \frac{q\,x}{\psi},$$

après substitution de $A$, $P$, $p$, $q$ et $\psi$ par leurs valeurs (toutes exprimés en $k$). Mais comme cela n'est pas possible explicitement non plus, il faudra également attribuer à $k$ une série de valeurs et calculer les valeurs correspondantes de $x$ et $\omega$.

Il y a ici cependant *deux* cas-limites.

Le *premier* est celui de $\beta = 0$, c. à. d. $b_2 = b_1$. Alors on aura $\Theta = \pi$, c.-à-d. le rapport des deux *pressions* critiques suivra *entièrement* celui des deux *températures* critiques. C'est là le cas, que nous avons étudié déjà dans un Mémoire antérieur. Alors $n = 0$, donc $z = 1$ $(q = 0)$ et $1 - y = \omega$, donc $\omega = p$. La valeur de $k$ sera donc $= {}^1/_2$ (d'après (7)).

Pour $A$ nous obtenons par conséquent:

$$A = \left(4 - \frac{35}{2} + \frac{96}{4} - \frac{85}{8}\right) + \left(-3 + \frac{20}{2} - \frac{29}{4}\right)\sqrt{\frac{1}{3}\left(2 - \frac{8}{2} + \frac{9}{4}\right)},$$

ou bien

$$A = -{}^1/_8 - {}^1/_8\sqrt{{}^1/_3} = -{}^1/_8\,(1 + {}^1/_3\sqrt{3}).$$

Pour $B'$ nous trouverons:

$$B' = \frac{1}{3}\left(-2 + \frac{3}{2} + \frac{12}{4} - \frac{15}{8}\right) - \left(-1 + \frac{2}{2} - \frac{3}{4}\right)\sqrt{\frac{1}{3}\left(2 - \frac{8}{2} + \frac{9}{4}\right)},$$

c.-à-d.

$$B' = {}^5/_{24} + {}^3/_8\sqrt{{}^1/_3} = {}^1/_{24}\,(5 + 3\sqrt{3}).$$

La grandeur $P$ devient par suite:

$$P = 2\,k\,A^2 + 4\,(1 - 3\,k)^4\,B' = {}^1/_{64}\,(1 + {}^1/_3\sqrt{3})^2 + {}^1/_{24}\,(5 + \sqrt{3}),$$

ou bien

$$P = {}^1/_{96}\,(2 + \sqrt{3}) + {}^1/_{96}\,(5 + 3\sqrt{3}) = {}^1/_{96}\,(7 + 4\sqrt{3}).$$

Pour $\sqrt{\frac{\frac{1}{2}k}{P}}$ on obtient donc:

$$\sqrt{\frac{\frac{1}{2}k}{P}} = \sqrt{24(7-4\sqrt{3})} + 2\sqrt{6}(2-\sqrt{3}),$$

de sorte que nous trouvons pour $x$:

$$x = \tfrac{1}{2}\left[1 - \tfrac{1}{4}(1 + \tfrac{1}{3}\sqrt{3})\,2\sqrt{6}(2-\sqrt{3})\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{6}(1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{3})\right],$$

c.-à-d.

$$x = \tfrac{1}{2}(1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{6}) = \underline{0{,}2412,}$$

la même valeur, que nous avons trouvé autrefois. C'est donc un bon contrôle sur l'exactitude des équations générales que nous venons de déduire.

La valeur de $\psi$ deviendra d'après (15):

$$\psi = -\frac{\frac{1}{8}(5 + 3\sqrt{3}) \times \frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}}\,2\sqrt{6}(2-\sqrt{3}) = \tfrac{1}{4}\sqrt{6}(1+\sqrt{3}),$$

ou bien

$$\psi = \tfrac{1}{4}(3\sqrt{2} + \sqrt{6}) = 1{,}673,$$

donc

$$\varphi = \psi - x = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{2} + \sqrt{6}) = \underline{1{,}432.}$$

La valeur de $\Theta$ peut être calculée de (18), donnant $\Theta = \pi$, en connexion avec (19), donnant:

$$\sqrt{\Theta} = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1{,}698,$$

donc

$$\underline{\Theta = 2{,}887.}$$

Comme $\omega = p$, l'équation (10) donne immédiatement:

$$\omega = \frac{\frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{8}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3} = \underline{0{,}5773,}$$

encore tout-à-fait identique avec la valeur, que nous trouvâmes autrefois. Quant à la valeur de $T$ dans le point double, nous pourrons la calculer de la seconde des deux équations (1). Mais nous n'exécuterons pas cette partie du calcul.

Le *deuxième* cas-limite est celui de $\underline{\pi = 1}$; c.-à-d. le rapport des deux pressions critiques ne suit *point du tout* celui des tem-

pératures critiques. C'est le cas, auquel s'approchent beaucoup de mélanges binaires. Les températures critiques s'éloignent parfois fortement l'une de l'autre, tandis que les pressions critiques sont sensiblement égales entre elles, ou ne diffèrent pas beaucoup.

Dans le cas où $\pi = 1$, on aura $\frac{a_2}{b_2^2} = \frac{a_1}{b_1^2}$, donc

$$a_1 : a_2 = b_1^2 : b_2^2.$$

D'ailleurs on aura évidemment:

$$\Theta = \frac{T_2}{T_1} = \frac{b_2}{b_1}.$$

Puisque $\frac{1}{\varphi} = \frac{\alpha}{\sqrt{a_1}} = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1}} = \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}} - 1$, et $n = \frac{\beta}{b_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_1} = \frac{b_2}{b_1} - 1$, on aura dans le cas $\pi = 1$, où $\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}} = \frac{b_2}{b_1}$, la relation:

$$n = \frac{1}{\varphi}.$$

Nous aurons donc en vertu de (3):

$$z = 1 - (\varphi + x)\frac{1}{\varphi}\,\omega = 1 - \left(1 + \frac{x}{\varphi}\right)\omega,$$

tandis que $y$ est également $= 1 - \left(1 + \frac{x}{\varphi}\right)\omega$. Il s'ensuit que l'on a $y = z$, donc $p = q$.

Comme dans le point double $p - k = \frac{(1-k)(1-3k)}{N}\,l_2$ (voir plus haut), tandis que de (9) il s'ensuit $q - k = \frac{k(1-k)^2}{1 - 2k - k^2}$, on voit que $p - q$ aura un facteur $1 - k$, de sorte que $p = q$ entraîne $k = 1$, donnant $q = 1$, $p = 1$, c.-à-d $y = 0$, $z = 0$.

Calculons maintenant les valeurs de $A$, $B'$ et $P$.

Pour $A$ on trouve:

$$A = -20 - 12\sqrt{1/3} \times \sqrt{3} = -32.$$

Pour $B'$ nous trouverons:

$$B' = 1/3\,(-2) + 2\sqrt{1/3} \times 3 = 4/3\,.$$

Et on obtient donc pour $P$:

$$P = 2 \times 1024 + 64 \times {}^{1}/_{3} = \frac{256 \times 25}{3},$$

de sorte que $\sqrt{\frac{{}^{1}/_{2}\, k}{P}}$ deviendra:

$$\sqrt{\frac{{}^{1}/_{2}\, k}{P}} = \sqrt{\frac{{}^{3}/_{2}}{256 \times 25}} = {}^{1}/_{160} \sqrt{6}.$$

Pour $x$ on trouvera par suite:

$$x = {}^{1}/_{2} \left(1 - 64 \times {}^{1}/_{160} \sqrt{6}\right) = {}^{1}/_{2} (1 - {}^{2}/_{5} \sqrt{6}) = \underline{0{,}0101}.$$

L'équation (15) donne pour $\psi$:

$$\psi = -\frac{4 \times 4}{-2} \times {}^{1}/_{160} \sqrt{6} = {}^{1}/_{20} \sqrt{6} = 0{,}1225,$$

de sorte qu'on trouve pour $\varphi$:

$$\varphi = \psi - x = -{}^{1}/_{2} + {}^{1}/_{4} \sqrt{6} = {}^{1}/_{4} (-2 + \sqrt{6}) = \underline{0{,}1124}.$$

La valeur de $\omega$ peut être déterminée de (17), donnant:

$$\omega = 1 - \frac{x}{\psi} = \frac{\varphi}{\psi} = 5 (1 - {}^{1}/_{3} \sqrt{6}) = \underline{0{,}9175}.$$

Pour $\theta$ on aura en vertu de (20):

$$\theta = \frac{1 + \psi - x}{\psi - x} = 1 + \frac{1}{\psi - x} = 1 + \frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{4}{-2 + \sqrt{6}},$$

donc

$$\theta = 5 + 2 \sqrt{6} = \underline{9{,}899}.$$

En récapitulant les valeurs que nous avons trouvé dans les deux cas, nous aurons le tableau suivant.

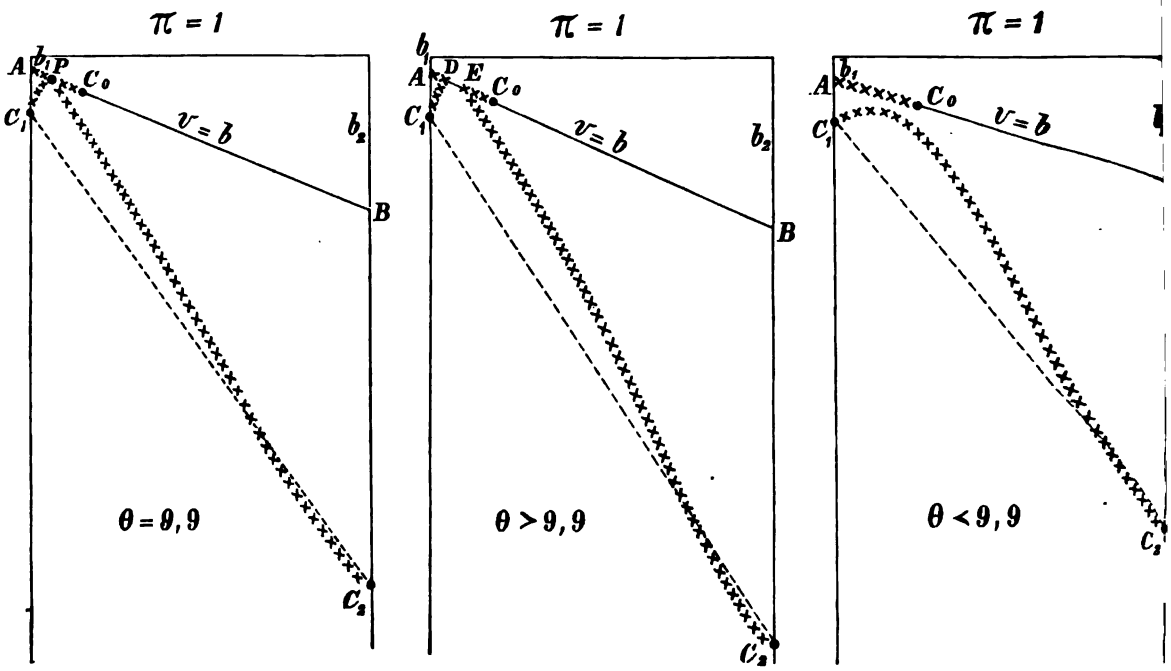
| Point double. | |
|---|---|
| $k = {}^{1}/_{2}$ | $k = 1$ |
| $(b_1 = b_2;\ \theta = \pi)$ | $(\pi = 1)$ |
| $x = 0{,}2412$ | $x = 0{,}0101$ |
| $\omega = 0{,}5773$ | $\omega = 0{,}9175$ |
| $\varphi = 1{,}432$ | $\varphi = 0{,}1124$ |
| $\theta = 2{,}887$ | $\theta = 9{,}899$ |

Puisque $\frac{b}{v} = (1 + n x)\, \omega,$

on aura dans le cas $\pi = 1$, où dans le point double $y = 1 - (1 + nx)\omega = 0$:

$$\frac{b}{v} = 1,$$

*de sorte que le point double se trouve dans le cas* $\pi = 1$ *sur la droite* $v = b$. (Voir la fig. 1).




Comme nous l'avons déduit pour le cas $\beta = 0$ ($\Theta = \pi$) (voir le Mémoire cité), on trouvera également pour le cas $\pi = 1$, que pour des valeurs de $\Theta$, qui *dépassent* 9,9, la courbe de plissement montrera un cours comme est représenté par la fig. 2, tandis que pour des valeurs de $\Theta$, qui sont *inférieures* à 9,9, on aura un cours continu de $C_1$ jusqu'a $C_2$, comme dans la fig. 3.

Or, comme il sera très exceptionnel, que la température critique de l'un des deux components excède de 10-fois la température critique de l'autre component, on pourra dire que dans la *majorité* des cas on aura — lorsque $\pi = 1$ — *le cas de la fig. 3.*

§ 9.

Maintenant nous voulons regarder le cas $\pi = 1$ encore un peu de plus près.

En premier lieu nous déduirons les valeurs, que nous venons de trouver, directement de l'équation ($a$) (voir § 2).

Nous avons vu dans le paragraphe précédent, qu'avec $\pi = 1$ correspond $y = z$, en vertu de $n = \frac{1}{\varphi}$. L'équation ($a$) deviendra donc, après division par $z^3$ (resp. $y^2 z$ et $y^3$):

$$f = (1-2x) - 3x(1-x)\frac{1-y}{\psi} + 3\psi(2y-1) + \frac{\psi^3(3y-2)}{x(1-x)} = 0,$$

remarquant que $n\omega = \frac{1-z}{\psi} = \frac{1-y}{\psi}$.

Avec $y = 1-p$ cela devient:

$$f = (1-2x) - \frac{3px(1-x)}{\psi} + 3\psi(1-2p) + \frac{\psi^3(1-3p)}{x(1-x)} = 0 \quad . \quad (a)$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial \omega} = 0$ sera identique avec $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial p} = 0$, $p$ étant une fonction de $x$ et $\omega$, on aura pour le point double:

$$\left.\begin{aligned} -2 - \frac{3p(1-2x)}{\psi} + \frac{3px(1-x)}{\psi^2} + 3(1-2p) + \\ + \frac{3\psi^2(1-3p)}{x(1-x)} - \frac{\psi^3(1-3p)(1-2x)}{x^2(1-x)^2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (b)$$

et

$$-\frac{3x(1-x)}{\psi} - 6\psi - \frac{3\psi^3}{x(1-x)} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (c)$$

Cette dernière équation peut s'écrire:

$$\frac{x(1-x)}{\psi^2} + 2 + \frac{\psi^2}{x(1-x)} = 0,$$

donnant

$$\frac{\psi^2}{x(1-x)} = -1,$$

ce qui est impossible.

La raison que nous avons trouvé néanmoins dans le paragraphe précédent une solution pour les conditions du point double, consiste en ceci, que là nous n'avons pas divisé par le facteur $z^3$. Or $z = 0$, c.-à-d. la droite $v = b$, et donc aussi le point $P$, satisfait à la fois l'équation ($a$) et les équations ($b$) et ($c$). Nous avons donc seulement déterminé le point *commun* des *deux parties* de la

courbe de plissement, c-à-d. de $z = 0$ ($v = b$) et de la partie $C_1 C_2$, donnée par l'équation ($a$) dans la forme de celle du paragraphe présent. Cette solution satisfera *identiquement* les équations ($b$) et ($c$) du § 2 (à cause du facteur $z^3$), mais *non* les équations ($b$) et ($c$) sur le page 39.

Il sera donc le plus simple, pour trouver les données du point $P$, de combiner directement ladite équation ($a$) avec l'équation $z = 0$ ($v = b$).

En substituant donc $p = 1$ dans ($a$), nous trouvons:

$$1 - 2x - \frac{3x(1-x)}{\psi} - 3\psi - \frac{2\psi^3}{x(1-x)} = 0,$$

équation, qui mène après réduction convenable ($\psi = \varphi + x$) à

$$x^2(2 + 9\varphi + 9\varphi^2) - x\varphi(3 - 3\varphi - 8\varphi^2) + 2\varphi^4 = 0,$$

c.-à-d. à une équation quadratique. La solution en est:

$$x = {}^1/_2\,\varphi\,\frac{(1 - 3\varphi - 8\varphi^2) \pm \sqrt{1 - 6\varphi - 23\varphi^2 - 24\varphi^3 - 8\varphi^4}}{2 + 9\varphi + 9\varphi^2}.$$

Comme le discriminant est $= (1 + \varphi)^2 (1 - 8\varphi - 8\varphi^2)$, on aura aussi:

$$x = {}^1/_2\,\varphi\,\frac{(1 - 3\varphi - 8\varphi^2) \pm (1 + \varphi)\sqrt{1 - 8\varphi - 8\varphi^2}}{2 + 9\varphi + 9\varphi^2} \quad \ldots (21)$$

Le discriminant sera $= 0$, lorsque $1 - 8\psi - 8\varphi^2 = 0$, donnant:

$$\varphi = {}^1/_4(-2 + \sqrt{6}) = 0{,}1124,$$

étant la même valeur que nous avons trouvé dans le § 8. En effet, le discriminant étant $= 0$, ceci indique le cas, où il y a justement encore intersection des deux lignes $AB$ ($v = b$) et $C_1 C_2$ dans un point tangent (quasi-double).

Pour des valeurs de $\varphi$, *supérieures* à la valeur trouvée, on aura des racines *imaginaires*, donc le cas de la fig. 3; pour des valeurs *inférieures* à cette valeur, il y aura intersection en deux points $D$ et $E$, comme dans la fig. 2

Puisque pour $\pi = 1$ on a $\Theta = 1 + \frac{1}{\varphi} = 9,9$ d'après (19), on aura aussi, que pour des valeurs de $\Theta > 9,9$ le cas de la fig. 2 se présentera, tandis que pour des valeurs de $\Theta < 9,9$ on aura le cas de la fig. 3.

Calculons maintenant les valeurs de $x$ pour les points $D$ et $E$, lors-

que $\theta$ s'élève de 9,9 jusqu'à $\infty$, ou bien $\varphi$ s'abaisse de 0,11 jusqu'à 0.

Lorsque $\varphi = 0$, les valeurs de $x$ sont toutes les deux $= 0$. Mais quand $\varphi$ a une valeur dans le voisinage de 0,11, l'une des deux valeur de $x$ sera $< 0{,}01$, tandis que l'autre sera $> 0{,}01$. La première décroîtra continuellement jusqu'à 0, tandis que la seconde atteindra une valeur maximale, et se mouvra alors également vers zéro.

Pour de très faibles valeurs de $\varphi$ on aura approximativement, $\sqrt{1 - 8\varphi - 8\varphi^2}$ étant $= 1 - 4\varphi - 12\varphi^2 \ldots$ et donc $(1 + \varphi)\sqrt{\phantom{x}} = 1 - 3\varphi - 16\varphi^2$:

$$x = \tfrac{1}{2}\varphi \frac{(1 - 3\varphi - 8\varphi^2) \pm (1 - 3\varphi - 16\varphi^2)}{2 + 9\varphi},$$

donc

$$x_1 = \varphi \frac{1 - 3\varphi}{2 - 9\varphi} = \tfrac{1}{2}\varphi \quad ; \quad x_2 = \frac{4\varphi^3}{2} = 2\varphi^3.$$

La valeur *maximale* de $x_1$ sera atteint, lorsque $\varphi = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}077$. Cette valeur maximale elle même sera $= \tfrac{1}{18}(9 - 5\sqrt{3}) - = 0{,}0189$, et pour la valeur correspondante de $x_2$ on trouvera $\tfrac{1}{36}(33 - 19\sqrt{3}) = 0{,}0014$.

La valeur de $\varphi$, pour laquelle la distance des deux racines sera maximale, ne coincide pas avec la valeur de $\varphi$ que nous venons de calculer. On trouvera $\varphi = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}\sqrt{-3 + 6\sqrt{6}} = 0{,}070$.

Nous aurons ainsi les valeurs suivantes.

| | | |
|---|---|---|
| $\varphi = 0{,}1124$ | $x_1 = 0{,}0101$ | $x_2 = 0{,}0101$ |
| $\varphi = 0{,}10$ | $x_1 = 0{,}0167$ | $x_2 = 0{,}0040$ |
| $\varphi = 0{,}077$ | $x_1 = 0{,}0189$ | $x_2 = 0{,}0014$ |
| $\varphi = 0{,}01$ | $x_1 = 0{,}0051$ | $x_2 = 0{,}0000$ |
| $\varphi = 0{,}001$ | $x_1 = 0{,}0005$ | $x_2 = 0{,}0000$ |
| $\varphi = 0$ | $x_1 = 0$ | $x_2 = 0$ |

## § 10.

L'équation ($a$) du § 9 nous donnera le cours entier de la courbe de plissement $\omega = f(x)$ pour toutes les valeurs de $\varphi$.

Puisque $p = q$ (voie pag. 36), on aura pour $\omega$ d'après (17):

$$\omega = p\left(1 - \frac{x}{\varphi}\right) = p\,\frac{\varphi}{\varphi + x}, \text{ donc } p = \omega\,\frac{\varphi + x}{\varphi}.$$

L'équation ($a$) deviendra donc:

$$1 - 2x - \frac{3\omega x(1-x)}{\varphi} + 3(\varphi + x)\left(1 - 2\omega\frac{\varphi + x}{\varphi}\right) + \\ + \frac{(\varphi + x)^3\left(1 - 3\omega\frac{\varphi + x}{\varphi}\right)}{x(1-x)} = 0,$$

et l'on y tire immédiatement:

$$\omega = {}^1/_3\,\varphi\,\frac{(1-2x)x(1-x) + 3(\varphi + x)x(1-x) + (\varphi + x)^3}{x^2(1-x)^2 + 2(\varphi + x)^2 x(1-x) + (\varphi + x)^4},$$

ou bien

$$\omega = {}^1/_3\,\varphi\,\frac{x(1-x^2) + 3\varphi x(1-x) + (\varphi + x)^3}{[x(1-x) + (\varphi + x)^2]^2},$$

c.-à-d.

$$\omega = {}^1/_3\,\varphi\,\frac{x(1 + 3\varphi + 3\varphi^2) + \varphi^3}{[x(1 + 2\varphi) + \varphi^2]^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

On pourra écrire encore plus symétriquement:

$$\omega = {}^1/_3\,\varphi\,\frac{x(1+\varphi)^3 + (1-x)\varphi^3}{[x(1+\varphi)^2 + (1-x)\varphi^2]^2}.$$

Avec $\varphi = {}^1/_9$ nous calculons p. e. pour la courbe $C_1 P C_2$ de la fig. 1 le tableau suivant.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x = 0$ | $\omega = 0{,}33 = {}^1/_3$ | ${}^v/_{b_1} = 3$ | $x = 0{,}3$ | $\omega = 0{,}10$ | ${}^v/_{b_1} = 10$ |
| 0,002 | 0,70 | 1,43 | 0,4 | 0,079 | 13 |
| 0,005 | 0,89 | 1,12 | 0,5 | 0,064 | 16 |
| 0,008 | $0{,}93^3$ | $1{,}07^2$ | 0,6 | 0,054 | 19 |
| 0,01 | $0{,}92^5$ | $1{,}08^1$ | 0,7 | 0,046 | 22 |
| 0,05 | 0,47 | 2,13 | 0,8 | 0,041 | $24^4$ |
| 0,1 | 0,28 | 3,57 | 0,9 | 0,036 | $27^8$ |
| 0,2 | 0,15 | 6,67 | 1,0 | $0{,}033 = {}^1/_{30}$ | 30 |

Comme $\frac{b}{v} = \left(1 + \frac{x}{\varphi}\right)\omega$, on aura chez $x = 0{,}01$, $\frac{b}{v} = 1{,}09 \times$ $\times\, 0{,}92^5 = 1{,}01$; et chez $x = 0{,}008$, $\frac{b}{v} = 1{,}07^2 \times 0{,}933 = 1{,}00$. Nous trouvons donc en effet le point $P$ dans le voisinage de $x = 0{,}01$. Avec $\varphi = 0{,}1124$ au lieu de $\varphi = {}^1/_9$ nous aurions trouvé exactement $x = 0{,}01$.

Il va de soi, que lorsque $\pi$ n'est pas exactement $= 1$, mais $= 1 + \delta$ p. e., le point double $P$ se trouvera un peu au dessous de

la droite $AB\,(v=b)$; il y aura alors deux courbes de plissement distinctes, c-a-d. $C_1PA$, dont la partie $PA$ demeurera continuellement au dessous de la droite $AB$, et $C_2PC_0$, où $C_0$ est la „troisième" température critique. (voir le Mémoire cité).

En effet, cette troisième température critique sera donnée par la valeur maximale de $T$ dans la courbe d'intersection de la „surface spinodale" et du plan $v=b$. Cette surface spinodale est déterminée par la seconde des équations (1), donnant pour $v=b$:

$$RT=\frac{2}{b^3}\,x(1-x)(\alpha b-\beta\sqrt{a})^2,$$

c.-à-d.
$$RT=\frac{2(b_1\sqrt{a_2}-b_2\sqrt{a_1})^2}{b_1^3}\,\frac{x(1-x)}{(1+rx)^3},$$

puisque $\alpha b-\beta\sqrt{a}=\alpha(b_1+x\beta)-\beta(\sqrt{a_1}+x\alpha)=\alpha b_1-\beta\sqrt{a_1}=$ $=b_1\sqrt{a_2}-b_2\sqrt{a_1}$, tandis que $b=b_1\left(1+\frac{\beta}{b_1}x\right)=b_1(1+rx)$.

Or, la valeur maximale de $\frac{x(1-x)}{(1+rx)^3}$ sera donnée évidemment par

$$(1+rx)(1-2x)-3rx(1-x)=0\ \ldots\ldots\ (a)$$

La première des équations (1) donne pour le point d'intersection de la courbe de plissement et de la droite $v=b$:

$$x(1-x)(\alpha b-\beta\sqrt{a})^3\left[(1-2x)b-3x(1-x)\beta\right]=0,\ \ldots\ (b)$$

et cette dernière équation sera donc toujours satisfaite par

$$(1-2x)b-3x(1-x)\beta=0,$$

ou bien, en divisant par $b_1$, par

$$(1+rx)(1-2x)-3rx(1-x)=0,$$

c.-à-d. par $(a)$. (q. e. d.). [1])

---

[1]) Puisque $r=\frac{\beta}{b_1}=\frac{b_2-b_1}{b_1}=\frac{b_2}{b_1}-1=\Theta-1$, lorsque $\pi=1$, la valeur de $x$ dans le point $C_0$ sera:

$$x_0=\frac{1}{r}\left[r+1-\sqrt{r^2+r+1}\right]=\frac{1}{\Theta-1}\left(\Theta-\sqrt{\Theta^2-\Theta+1}\right).$$

Mais comme $\Theta=1+\frac{1}{\varphi}$ (voir p. 40), on aura aussi:

$$x_0=1+\varphi-\sqrt{1+\varphi+\varphi^2}.$$

Cela donne $x_0=0{,}052$ pour $\varphi=0{,}1124$, $x_0=0{,}031$ pour $\varphi=0{,}077$, donc toujours des valeurs supérieures aux valeurs correspondantes de $x_1$ (voir le tableau sur le p. 41). Or, ce sera toujours le cas. Pour de faibles valeurs $x_1$ s'approche à $\frac{1}{2}\varphi-\frac{3}{4}\varphi^2$, tandisque $x_0$ s'approchera à $\frac{1}{2}\varphi-\frac{3}{8}\varphi^2$.

La conclusion principale de tout ce qui précède est donc, que le point double se présentera lorsque la valeur de $\Theta = \frac{T_2}{T_1}$ sera comprise entre 2.9 (dans le cas $\Theta = \pi$) et 9,9 (dans le cas $\pi = 1$). Un cours *anomal* de la courbe de plissement existera seulement — chez des mélanges de substances normales — quand le rapport des deux températures critiques est très élevé, c.-à.-d. (selon la valeur de $\pi$) supérieur à 3 jusqu'à 10. Alors il y aura une courbe spinodale de $C_1$ jusqu'à $A$, et non de $C_1$ jusqu'à $C_2$.

Nous savons que ce cas se présente p.e. chez *l'éthane* et *l'alcoöl méthylique.*

Or, les données critiques de ces deux substances sont les suivantes.

| | | |
|---|---|---|
| $C_2H_6$ | $T_1 = 32°$ C. | $p_1 = 49$ atm. |
| $CH_3OH$ | $T_2 = 241°$ „ | $p_2 = 80$ „ |

Pour $\Theta$ nous trouvons par suite:

$$\Theta = \frac{273 + 241}{273 + 32} = \frac{514}{305} = 1{,}69.$$

Et pour $\pi$

$$\pi = \frac{80}{49} = 1{,}63.$$

Nous nous trouvons donc dans le cas $\Theta = \pi$ ($\beta = 0$). Il faudra par conséquent que $\Theta$ soit $> 2{,}9$ pour des substances *normales.* Dans notre exemple $\Theta$ est seulement 1,7, mais dans le mélange en question une des deux composantes — l'alcoöl méthylique — est une substance *fort anomale,* et c'est là la cause, que la valeur-limite de $\Theta$ est abaissée si considérablement.

Août—Septembre 1905.

# L'EXPRESSION POUR LE POTENTIEL MOLÉCULAIRE DES COMPOSANTES D'UN MÉLANGE BINAIRE NORMALE, DANS L'ÉTAT LIQUIDE.

PAR

J. J. VAN LAAR.

---

## § 1.

Nous savons que l'expression pour le *potentiel thermodynamique total* d'un mélange, consistant d'un nombre quelconque de composantes, est la suivante:

$$\left.\begin{aligned} Z = -\Sigma(n_1 k_1) T(\log T - 1) + [\Sigma(n_1(e_1)_0) - T\Sigma(n_1(s_1)_0)] - \\ - \int p\,dV + pV + RT\Sigma(n_1 \log n_1) \end{aligned}\right\}, \quad (1)$$

où $k_1$, $k_2$, etc.; $(e_1)_0$, $(e_2)_0$, etc.; $(s_1)_0$, $(s_2)_0$, etc. ont la signification bien connue.

On aura donc, en différentiant par rapport à $n_1$ (le nombre des *Gr. mol.* de la première composante) pour le potentiel *moléculaire* $\mu_1$ de cette première composante:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 = \frac{\partial Z}{\partial n_1} = -k_1 T(\log T - 1) + [(e_1)_0 - T(s_1)_0] - \\ - \frac{\partial}{\partial n_1}\left[\int p\,dV - pV - RT\Sigma n_1 . \log \Sigma n_1\right] + RT\frac{\partial}{\partial n_1}\Sigma\left(n_1 \log \frac{n_1}{\Sigma n_1}\right) \end{aligned}\right\},$$

en remplaçant $\Sigma(n_1 \log n_1)$ par $\Sigma\left(n_1 \log \frac{n_1}{\Sigma n_1}\right) + \Sigma(n_1 \log \Sigma n_1)$, dont le second terme peut être écrit aussi $\Sigma n_1 . \log \Sigma n_1$.

Posons maintenant:

$$\underline{-k_1 T(\log T - 1) + [(e_1)_0 - T(s_1)_0] = C_1}, \quad \ldots \quad (2)$$

où $C_1$ sera donc une fonction de la température seulement.

D'ailleurs nous écrirons:

$$\int p dV - pV \quad RT \Sigma n_1 . \log \Sigma n_1 = \Omega \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

L'expression pour $\mu_1$ deviendra par suite:

$$\mu_1 = C_1 - \frac{\partial \Omega}{\partial n_1} + RT \log \frac{n_1}{\Sigma n_1},$$

parce que

$$\frac{\partial}{\partial n_1} \sum \left( n_1 \log \frac{n_1}{\Sigma n_1} \right) = \log \frac{n_1}{\Sigma n_1},$$

$$\sum \left( n_1 \log \frac{n_1}{\Sigma n_1} \right) \text{ étant} = (n_1 \log n_1 + n_2 \log n_2 + \ldots) - \\ - (n_1 + n_2 + \ldots) \log \Sigma n_1.$$

En écrivant $\omega_1$ pour $\frac{\partial \Omega}{\partial n_1}$ et $c_1$ pour $\frac{n_1}{\Sigma n_1}$, nous pourrons écrire aussi:

$$\mu_1 = C_1 - \omega_1 + RT \log c_1 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

La formule (4) pour $\mu_1$ est tout-à-fait générale, et se rapporte donc à tous les états de la matière.

C'est la grandeur $\omega_1$, qui donne de si grandes difficultés dans le calcul de $\mu_1$.

§ 2.

Pour exprimer $\Omega$ et $\omega_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial n_1}$, il faut connaitre une équation d'état. Or l'équation de M. VAN DER WAALS, dont nous ferons usage dans la suite est la suivante:

$$p = \frac{\Sigma n_1 . RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

où $a$ et $b$ sont encore des fonctions de $n_1$, $n_2$, etc. Nous supposerons que $b$ ni $a$ dépendent directement de $V$ ou de $T$.

Alors on aura:

$$\int p\, dV = \Sigma n_1 . RT \log (V - b) + \frac{a}{V},$$

par conséquent:

$$\Omega = \Sigma n_1 . RT \log (V - b) + \frac{a}{V} - pV - RT \Sigma n_1 . \log \Sigma n_1 \ldots (6)$$

Pour $\omega_1$ nous trouverons donc:

$$\omega_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial n_1} = RT \log (V - b) + \frac{\Sigma n_1 . RT}{V - b}\left(\frac{\partial V}{\partial n_1} - \frac{db}{dn_1}\right) -$$
$$- \frac{a}{V^2}\frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{1}{V}\frac{da}{dn_1} - p\frac{\partial V}{\partial n_1} - RT(1 + \log \Sigma n_1).$$

Mais comme

$$\frac{\Sigma n_1 . RT}{V - b} - \frac{a}{V^2} - p = 0,$$

d'après (5), nous aurons simplement:

$$\omega_1 = RT\left(\log \frac{V - b}{\Sigma n_1} - 1\right) - \frac{\Sigma n_1 . RT}{V - b}\frac{db}{dn_1} + \frac{1}{V}\frac{da}{dn_1} \ldots (7)$$

Pour des mélanges *binaires* de composantes *normales* on aura:

$$n_1 = 1 - x \quad ; \quad n_2 = x \quad ; \quad \Sigma n_1 = n_1 + n_2 = 1,$$

et l'équation (7) deviendra:

$$\omega_1 = RT(\log (v - b) - 1) - \frac{RT}{v - b}\left(b - x\frac{db}{dx}\right) + \frac{1}{v}\left(2a - x\frac{da}{dx}\right), . (7^a)$$

lorsque nous écrivons $v$ au lieu de $V$ pour le volume total de 1 Gr. mol. du mélange. Et puisque

$$b = n_1 b_1 + n_2 b_2 \quad ; \quad a = n_1^2 a_1 + 2 n_1 n_2 a_{12} + n_2^2 a_2, \ldots . (8)$$

on pourra remplacer $\frac{db}{dn_1}$ par $b - x\frac{db}{dx}$, $b$ étant une fonction *homogène* du *premier* degré par rapport à $n_1$ et $n_2$, et $\frac{da}{dn_1}$ par $2a - x\frac{da}{dx}$, $a$ étant une fonction *homogène* du *second* degré par rapport à $n_1$ et $n_2$.

Si nous avions posé immédiatement $n_1 = 1 - x$ et $n_2 = x$, nous aurions pu écrire:

$$\omega_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial n_1} = \Omega - x\frac{\partial \Omega}{\partial x},$$

$\Omega$ étant d'après (6) également une fonction *homogène* du *premier* degré par rapport à $n_1$ et $n_2$. Car

$$\Sigma n_1 . RT \log (V - b) - RT \Sigma n_1 . \log \Sigma n_1 = RT . \Sigma n_1 \log \frac{V - b}{\Sigma n_1},$$

où $\frac{V-b}{\Sigma n_1}$ sera évidemment du degré *zéro* par rapport à $n_1$ et $n_2$.

De l'équation d'état mise dans la forme:

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5^a)$$

on trouve maintenant:

$$\int p\,dv = RT \log (v-b) + \frac{a}{v},$$

et $\Omega$ deviendra:

$$\Omega = RT \log (v-b) + \frac{a}{v} - pv. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6^a)$$

Pour $\frac{\partial \Omega}{\partial x}$ on obtiendra donc:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{RT}{v-b}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{db}{dx}\right) - \frac{a}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{v}\frac{da}{dx} - p\frac{\partial v}{\partial x},$$

ou bien:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\frac{RT}{v-b}\frac{db}{dx} + \frac{1}{v}\frac{da}{dx}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$\frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} - p$ étant $= 0$.

Nous trouvons ainsi pour $\omega_1$:

$$\omega_1 = \left[RT \log (v-b) + \frac{a}{v} - pv\right] - x\left[-\frac{RT}{v-b}\frac{db}{dx} + \frac{1}{v}\frac{da}{dx}\right]. \quad (10)$$

Pour démonstrer que (10) est identique avec ($7^a$), il suffit de remplacer $pv$ par $\frac{RTv}{v-b} - \frac{a}{v}$, de sorte que nous trouvons:

$$\omega_1 = RT(\log (v-b) - 1) + \frac{2a}{v} - RT\left(\frac{v}{v-b} - 1\right) - \\ - x\left[-\frac{RT}{v-b}\frac{db}{dx} + \frac{1}{v}\frac{da}{dx}\right],$$

ou bien

$$\omega_1 = RT(\log (v-b) - 1) - \frac{RT}{v-b}\left(b - x\frac{db}{dx}\right) + \frac{1}{v}\left(2a - x\frac{da}{dx}\right),$$

c.-à-d. ($7^a$).

Comme nous aurons d'après (8):

$$b = (1-x)b_1 + xb_2 \;;\; a = (1-x)^2 a_1 + 2x(1-x)a_{12} + x^2 a_2, \quad (8^a)$$

on trouvera facilement:

$$\left.\begin{aligned} \frac{db}{dn_1} &= b - x\frac{db}{dx} = b_1 \\ \frac{da}{dn_1} &= 2a - x\frac{da}{dx} = 2\left[(1-x)\,a_1 + x a_{12}\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (11)$$

§ 3.

Nous mettrons maintenant (10) dans une autre forme.

Pour $\Omega = RT \log(v-b) + \frac{a}{v} - pv$ on peut écrire:

$$RT\left[\log(v-b) - 1\right] + \left[\frac{a}{v} - p(v-b) + RT\right] - pb.$$

Or on aura d'après (5ᵉ):

$$\begin{aligned} \frac{a}{v} - p(v-b) + RT &= \frac{a}{v} + \frac{a}{v^2}(v-b) \\ &= \frac{a}{b} - \frac{a(v-b)}{bv} + \frac{a}{v^2}(v-b) \\ &= \frac{a}{b} - \frac{a}{b}\frac{(v-b)}{v}\left(1 - \frac{b}{v}\right) \\ &= \frac{a}{b}\left(1 - \frac{(v-b)^2}{v^2}\right). \end{aligned}$$

La première partie de $\omega_1$ devient donc:

$$\Omega = RT\left[\log(v-b) - 1\right] + \frac{a}{b}\left(1 - \frac{(v-b)^2}{v^2}\right) - pb \;.\;. \; (12)$$

La seconde partie de $\omega_1$ est $-x\frac{\partial\Omega}{\partial x}$. Déterminons donc $\frac{\partial\Omega}{\partial x}$, mais à présent d'une manière un peu différente que dans le § 2.

*a*) Pour

$$\frac{\partial}{\partial x} RT\left[\log(v-b) - 1\right]$$

on peut écrire successivement:

$$RT\frac{\partial}{\partial x}\log(v-b) = RT\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{RT}{p+{}^{a}/_{v^2}} =$$

$$= -RT\frac{\partial}{\partial x}\log\left(p+\frac{a}{v^2}\right) = -\frac{RT}{p+{}^{a}/_{v^2}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{a}{v^2} =$$

$$= -(v-b)\frac{\partial}{\partial x}\frac{a}{v^2} = -\frac{a}{v^2}(v-b)\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{a}{v^2} =$$

$$= -\frac{a}{v^2}(v-b)\frac{d}{dx}\log\frac{a}{b^2} - \frac{a}{v^2}(v-b)\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{b^2}{v^2} =$$

$$= -[RT-p(v-b)]\frac{d}{dx}\log\frac{a}{b^2} - 2\frac{a}{b}\frac{v-b}{v}\frac{\partial}{\partial x}\frac{b}{v} \quad \ldots (\alpha)$$

*b*) Pour

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a}{b}\left(1-\frac{(v-b)^2}{v^2}\right)\right]$$

on aura immédiatement:

$$\left(1-\frac{(v-b)^2}{v^2}\right)\frac{d}{dx}\frac{a}{b} - 2\frac{a}{b}\frac{v-b}{v}\frac{\partial}{\partial x}\frac{v-b}{v},$$

ou bien

$$\left(1-\frac{(v-b)^2}{v^2}\right)\frac{d}{dx}\frac{a}{b} + 2\frac{a}{b}\frac{v-b}{v}\frac{\partial}{\partial x}\frac{b}{v} \quad \ldots\ldots (\beta)$$

*c*) Finalement nous pouvons écrire:

$$\frac{\partial}{\partial x}(pb) = p\frac{db}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\gamma)$$

L'expression pour $\frac{\partial\Omega}{\partial x}$ devient ainsi (les termes avec $\frac{\partial}{\partial x}\frac{b}{v}$ disparaîtront):

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \left(1-\frac{(v-b)^2}{v^2}\right)\frac{d}{dx}\frac{a}{b} - [RT-p(v-b)]\frac{d}{dx}\log\frac{a}{b^2} - p\frac{db}{dx}. \quad (13)$$

Jusqu'ici nous n'avons introduit aucune approximation. Les formules (12) et (13) sont encore tout-à-fait générales et exactes — tant que l'équation d'état ($5^a$) est exacte.

Or, lorsque nous voulons déduire une expression pour $\omega_1$ pour les *liquides* dans le voisinage du *point de fusion*, il sera toujours permis de négliger $\frac{(v-b)^2}{v^2}$ auprès de l'unité, et aussi — chez les pres-

sions ordinaires — le terme $p(v-b)$ auprès de $RT$. En effet, dans

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT$$

on pourra dans ce cas toujours négliger $p$ auprès de $\frac{a}{v^2}$.

Egalement le terme $pb$ sera négligeable par rapport à $\frac{a}{b}$, et de même le terme $p\frac{db}{dx}$ auprès de $\frac{d}{dx}\frac{a}{b}$.

Pour $\omega_1=\Omega-x\frac{\partial\Omega}{\partial x}$ nous aurons par conséquent, en combinant (12) et (13):

$$\omega_1=\left[RT(log\,(v-b)-1)+\frac{a}{b}\right]-x\left[\frac{d}{dx}\frac{a}{b}-RT\frac{d}{dx}log\frac{a}{b^2}\right]. \quad (14)$$

C'est M. VAN DER WAALS qui a déduit pour la première fois d'une manière un peu différente cette formule pour $\omega_1$, et qui a tiré surtout l'attention sur le terme $RT\frac{d}{dx}\frac{a}{b^2}$, que l'on avait constamment négligé.

Le but principal de cette étude était en premier lieu la déduction de l'expression générale (13), et en second lieu la discussion de la valeur du terme supplémentaire désigné.

La formule (14) peut donc être employé dans tous les cas où $\left(\frac{v-b}{v}\right)^2$ est négligeable auprès de l'unité, et $p$ auprès de $\frac{a}{v^2}$, c.à.d. chez les *liquides* sur une étendue assez considérable: dans la plupart des cas dès le point de fusion jusqu'au delà du point d'ébullition. Mais lorsque nous négligeons aussi le terme $RT\frac{d}{dx}log\frac{a}{b^2}$, cette étendue deviendra plus petit, et nous examinerons dans quels cas on pourra faire usage de (14), dépourvu du terme supplémentaire.

*Remarque.* Nous aurions aussi pu déduire (13) directement de l'expression (9). Mais nous préférons la déduction précédente, puisque celle-ci nous donne $\frac{\partial}{\partial x}RT(log\,(v-b)-1)$ et $\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{a}{b}\left(1-\frac{(v-b)^2}{v^2}\right)\right]$ séparément.

Exécutons cependant la déduction désignée.

Pour $-\frac{RT}{v-b}\frac{db}{dx}+\frac{1}{v}\frac{da}{dx}$ on peut écrire:

$$-p\frac{db}{dx}-\frac{a}{v^2}\frac{db}{dx}+\frac{1}{v}\frac{da}{dx}.$$

Or, nous aurons:

$$\frac{a}{v^2}=\frac{a}{b^2}\left(1-\frac{(v-b)^2}{v^2}\right)-\frac{2a(v-b)}{bv^2}$$

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{b}\left(1-\frac{(v-b)^2}{v^2}\right)-\frac{v-b}{v^2},$$

de sorte que l'on a:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}=-p\frac{db}{dx}+\frac{1}{b}\left(1-\frac{(v-b)^2}{v^2}\right)\frac{da}{dx}-\frac{v-b}{v^2}\frac{da}{dx}-$$

$$-\frac{a}{b^2}\left(1-\frac{(v-b)^2}{v^2}\right)\frac{db}{dx}+\frac{2a(v-b)}{bv^2}\frac{db}{dx}$$

$$=-p\frac{db}{dx}+\left(1-\frac{(v-b)^2}{v^2}\right)\frac{d}{dx}\frac{a}{b}-\frac{a}{v^2}(v-b)\frac{d}{dx}\log\frac{a}{b^2},$$

identique à (13), $\frac{a}{v^2}(v-b)$ étant $=RT-p(v-b)$.

§ 4.

Nous pouvons écrire maintenant, en vertu de (4) et (14):

$$\left.\begin{aligned}\mu_1=C_1-\left[RT(\log(v-b)-1)+\frac{a}{b}\right]+\\ +x\left[\frac{d}{dx}\frac{a}{b}-RT\frac{d}{dx}\log\frac{a}{b^2}\right]+RT\log(1-x)\end{aligned}\right\}\ldots(15)$$

Et parceque

$$\mu_1=\frac{\partial Z}{\partial x_1}=Z-x\frac{\partial Z}{\partial x}\quad;\quad\mu_2=Z+(1-x)\frac{\partial Z}{\partial x},$$

on aurait trouvé pour $\mu_2$ — le potentiel moléculaire de la seconde composante:

$$\mu_2=C_2-\left[\Omega+(1-x)\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right]+RT\log x.$$

Deux grandeurs nous offrent un intérêt spécial. Ce sont les grandeurs

$$\mu_1'-(\mu_1')_0\qquad\text{et}\qquad\frac{\partial\mu_1'}{\partial x},$$

où $\mu_1'$ désigne la fonction $\mu_1 - RT\log(1-x)$, c.-à-d. $C_1 - \left(\Omega - x\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)$.

Quant à $\mu_1' - (\mu_1')_0$, nous avons évidemment:

$$\mu_1' - (\mu_1')_0 = x\left(\frac{\partial\mu_1'}{\partial x}\right)_0 + \frac{1}{2}x^2\left(\frac{\partial^2\mu_1'}{\partial x^2}\right)_0 + \ldots$$

$$= x\left[x\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}\right]_0 + {}^1/_2\, x^2\left[x\frac{\partial^3\Omega}{\partial x^3} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}\right]_0 + \ldots,$$

parceque $\frac{\partial}{\partial x}\left(\Omega - x\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right) = -x\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}$.

Or, $\left(x\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}\right)_0$ sera $= 0$ en vertu du facteur $x$. De même $\left(x\frac{\partial^3\Omega}{\partial x^3}\right)_0$. Nous aurons donc:

$$\left.\begin{aligned}\mu_1' - (\mu_1')_0 &= \frac{1}{2}x^2\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}\right)_0 + \ldots = \\ &= \frac{1}{2}x^2\left[\frac{d^2}{dx^2}\frac{a}{b} - RT\frac{d^2}{dx^2}\log\frac{a}{b^2}\right]_0 + \ldots\end{aligned}\right\} \ldots (16)$$

Quant à $\frac{\partial\mu_1'}{\partial x}$, nous aurons de suite:

$$\frac{\partial\mu_1'}{\partial x} = x\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2},$$

et nous voyons donc, qu'il sera très utile de connaître les valeurs exactes de $\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}$ et de $\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}\right)_0$.

Comme

$$\frac{a}{b} - x\frac{da}{dx\,b} = \frac{a_1}{b_1} - \frac{Ax^2}{b_1 b^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

où $$A = a_1 b_2^2 - 2a_{12}b_1 b_2 + a_2 b_1^2$$

[étant facilement à vérifier à l'aide de ($8^a$)], on trouvera:

$$-x\frac{d^2}{dx^2}\frac{a}{b} = \frac{d}{dx}\left[\frac{a}{b} - x\frac{d}{dx}\frac{a}{b}\right] = -\frac{A}{b_1}\frac{d}{dx}\frac{x^2}{b^2} =$$

$$= -\frac{2A}{b_1}\frac{x}{b}\frac{b - x\frac{db}{dx}}{b^2} = -\frac{2Ax}{b^3},$$

$b - x\frac{db}{dx}$ étant $= b_1$.

Pour $\frac{d^2}{dx^2}\frac{a}{b}$ nous aurons par conséquent:

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{a}{b} = \frac{2A}{b^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17^a)$$

Le terme $\frac{d^2}{dx^2} \log \frac{a}{b^2}$ donnera consécutivement, comme nous l'avons déjà déduit dans un Mémoire antérieur (voir Arch. TEYLER (2) IX, 3e Partie, p. 7—8 (1905)):

$$\log \frac{a}{b^2} = 2 \log \frac{(1-x)\sqrt{a_1} + x\sqrt{a_2}}{(1-x)b_1 + x b_2}.$$

$$\frac{d}{dx} \log \frac{a}{b^2} = 2\left[\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{\sqrt{a}} - \frac{b_2-b_1}{b}\right] \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \log \frac{a}{b^2} &= 2\left[\frac{(b_2-b_1)^2}{b^2} - \frac{(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})^2}{a}\right] \\ &= \frac{2}{ab^2}(b_2\sqrt{a_1}-b_1\sqrt{a_2})[(b_2\sqrt{a_1}-b_1\sqrt{a_2}) + \\ &\qquad + 2b(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})] \end{aligned}\right\}, \quad (18^a)$$

lorsqu'on admet la relation $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$, donc

$$a = [(1-x)\sqrt{a_1} + x\sqrt{a_2}]^2,$$

de sorte que la grandeur $A$ dans (17) et ($17^a$) deviendra:

$$A = (b_2\sqrt{a_1} - b_1\sqrt{a_2})^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Pour $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}$ on trouve ainsi:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \frac{2A}{b^3} - \frac{2RT\sqrt{A}}{ab^2}[\sqrt{A} + 2b(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})],$$

ou bien

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \frac{2\sqrt{A}}{b^2}\left[\frac{\sqrt{A}}{b} - \frac{RT}{a}[\sqrt{A} + 2b(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1})]\right] \ldots (19)$$

§ 5.

Nous déterminerons maintenant la valeur de $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}$ pour $x=0$ et pour $x=1$.

Comme

$$\frac{a_1}{b_1} = 7RT_1 \quad ; \quad \frac{a_2}{b_2} = 7RT_2,$$

on aura pour $x=0$, quand $a=a_1$, $b=b_1$:

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{2\,(b_2 \sqrt{7 b_1 R T_1} - b_1 \sqrt{7 b_2 R T_2})}{b_1^2} \Bigg[$$

$$\left[\frac{id.}{b_1} - \frac{RT}{7 b_1 R T_1}\,[id. + 2 b_1 (\sqrt{7 b_2 R T_2} - \sqrt{7 b_1 R T_1}]\right],$$

c.-à-d., en divisant par $(\sqrt{7 b_1 R T_1})^2$:

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{14\,R T_1}{b_1}\left(b_2 - b_1 \sqrt{\frac{b_2 T_2}{b_1 T_1}}\right)\Bigg[$$

$$\left[\frac{b_2 - b_1 \sqrt{\frac{b_2 T_2}{b_1 T_1}}}{b_1} - \frac{1}{7}\frac{T}{T_1}\left\{\frac{b_2 - b_1 \sqrt{\frac{b_2 T_2}{b_1 T_1}}}{b_1} + 2\left(\sqrt{\frac{b_2 T_2}{b_1 T_1}} - 1\right)\right\}\right].$$

Avec

$$\frac{b_2}{b_1} = \varphi \quad ; \quad \frac{T_2}{T_1} = \theta$$

cela devient:

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}\right)_0 = 14\,R T_1\,(\varphi - \sqrt{\varphi\theta})\,[(\varphi - \sqrt{\varphi\theta}) - {}^1/_{14}\,\{(\varphi - \sqrt{\varphi\theta}) + 2\,(\sqrt{\varphi\theta} - 1)\}]$$

$$= 14\,R T_1\,\varphi^2\left(1 - \sqrt{\frac{\theta}{\varphi}}\right)\left[\left(1 - \sqrt{\frac{\theta}{\varphi}}\right) - {}^1/_{14}\left\{\left(1 - \sqrt{\frac{\theta}{\varphi}}\right) + 2\left(\sqrt{\frac{\theta}{\varphi}} - \frac{1}{\varphi}\right)\right\}\right],$$

en supposant $T$ dans le voisinage du point de fusion de la première composante, c.-à-d. $T = {}^1/_2\,T_1$.

Or, en écrivant

$$\frac{p_2}{p_1} = \pi,$$

nous aurons évidemment:

$$\pi = \frac{\theta}{\varphi},$$

parce que $\pi = \frac{a_2}{b_2^2} : \frac{a_1}{b_1^2}$, $\theta = \frac{a_2}{b_2} : \frac{a_1}{b_1}$ et $\varphi = b_2 : b_1$.

Nous obtenons donc:

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}\right)_0 = 14\,R T_1\,\frac{\theta^2}{\pi^2}\,(1 - \sqrt{\pi})\left[(1 - \sqrt{\pi}) - {}^1/_{14}\left\{1 + \sqrt{\pi} - 2\frac{\pi}{\theta}\right\}\right] \quad .. (20)$$

Le calcul de $\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}\right)_1$ donnera d'une manière tout-à-fait analogue:

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}\right)_1 = 14\,R T_1\,\frac{\pi}{\theta}\,(1 - \sqrt{\pi})\left[(1 - \sqrt{\pi}) - {}^1/_{14}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{1 + \sqrt{\pi}}{\theta}\right\}\right] \quad .. (20^a)$$

On voit clairement de ces résultats, que lorsque

$$\underline{\pi = 1},$$

c-à-d. lorsque les *pressions critiques* des deux composantes sont *égales*, $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}$ disparaîtra *entièrement*, et que nous aurons dans ce cas d'après (19):

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = 0,$$

$\sqrt{A} = b_2 \sqrt{a_1} - b_1 \sqrt{a_2}$ (voir ($\alpha$)) étant alors $= 0$.

L'expression

$$\Omega - x \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}$$

sera donc une constante, de sorte que l'on aura d'après (15):

$$\mu_1 = C_1 - \left[ RT (log (v_1 - b_1) - 1) + \frac{a_1}{b_1} \right] + RT\, log\, (1 - x),$$

c.-à-d.

$$\underline{\mu_1 = C_1' + RT\, log\, (1 - x)}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

où $C_1'$ est une fonction de la température seulement.

Lorsque $\pi$ est dans le *voisinage* de 1, l'équation (19) peut s'écrire:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = - \frac{2 \sqrt{A}}{b^2} \cdot \frac{RT}{a} \cdot 2\, b (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}),$$

parce que les termes avec $\sqrt{A}$ dans l'expression entre [ ] peuvent être négligés dans ce cas auprès des autres termes. On aura donc:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = - \frac{4\, RT \sqrt{A} (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1})}{b^3} \frac{b^2}{a}.$$

Mais $\frac{b^2}{a}$ ne variera alors que très faiblement avec $x$, puisque $\frac{a_1}{b_1^2} = \frac{a_2}{b_2^2}$ approximativement, de sorte que nous pouvons regarder $\frac{b^2}{a}$ comme une constante.

C'est pourquoi nous pouvons écrire:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \frac{2 \lambda T}{b^3},$$

où $\lambda$ aura, à cause du facteur $\sqrt{A}$, une valeur très faible.

Pour $\Omega - x \frac{\partial \Omega}{\partial x}$ on aura par suite:

$$RT(\log(v_1 - b_1) - 1) + \frac{a_1}{b_1} - \frac{\lambda T x^2}{b_1 b^2},$$

$\frac{d}{dx} \frac{x^2}{b_1 b^2}$ étant $= \frac{2x}{b^3}$ (comparer (17) et (17$^a$)), et l'expression pour $\mu_1$ deviendra donc:

$$\mu_1 = C_1' + \frac{\gamma T x^2}{(1 + r x)^2} + RT \log(1 - x), \quad \ldots\ldots \quad (21^a)$$

où $\gamma = \frac{\lambda}{b_1^3}$, tandis que nous avons remplacé $b$ par $b_1(1 + r x)$, où $r = \frac{b_2 - b_1}{b_1}$. Comme nous l'avons déjà remarqué, la valeur de $\gamma$ sera très faible dans le cas considéré, où $p_1$ n'est pas beaucoup éloigné de $p_2$.

Lorsque au contraire $\pi$ n'est pas dans le voisinage de l'unité, lorsque on a p. e.

$$\pi = \Theta,$$

on peut démontrer facilement, que dans la plupart des cas le terme *supplémentaire* dans $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}$, provenant de $RT \frac{d^2}{dx^2} \log \frac{a}{b^2}$, peut être négligé auprès du terme *principal*, provenant de $\frac{d^2}{dx^2} \frac{a}{b}$.

Car alors les expressions entre [ ] dans (20) et (20$^a$) deviendront resp.:

$$(1 - \sqrt{\Theta}) - {}^1/_{14}(\sqrt{\Theta} - 1) \quad (\text{pour } x = 0)$$

$$(1 - \sqrt{\Theta}) - {}^1/_{14} \frac{\sqrt{\Theta} - 1}{\Theta} \quad (\text{pour } x = 1).$$

Le rapport des deux termes désignés sera donc comme

$$14 : 1 \ (x = 0) \text{ et } 14\Theta : 1 \ (x = 1),$$

de sorte que p. e. pour $\Theta = 2$ ce rapport sera compris entre 14 et 28, d'où nous voyons clairement que le terme supplémentaire peut être négligé sans réserve. [1])

Dans ce cas on aura par conséquent d'après (19):

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \frac{2A}{b^3},$$

donc

$$\Omega - x\frac{\partial \Omega}{\partial x} = RT\,(log\,(v_1 - b_1) - 1) + \frac{a_1}{b_1} - \frac{A x^2}{b_1 b^2},$$

et nous trouverons pour $\mu_1$:

$$\underline{\mu_1 = C_1' + \frac{\alpha x^2}{(1 + rx)^2} + RT\,log\,(1 - x)} \quad , \ldots\ldots \quad (21^b)$$

$\alpha$ étant $= \frac{A}{b_1^3}$.

Nous pouvons conclure par conséquent, que l'expression ($21^b$) représentera dans la plupart des cas la valeur approchée de $\mu_1$ chez les mélanges de liquides normales, lorsque ceux-ci se trouvent dans le voisinage du point de fusion d'une des deux composantes, et à fortiori *chez des températures plus basses.* Car dans le seul cas $\pi = 1$, où le coëfficient $\gamma T$ subirait des variations considérables avec $T$, la grandeur $\gamma$, comme nous l'avons vu plus haut, aura une valeur très faible.

Janvier–Sept. 1905.

---

[1]) Un cas défavorable se présente chez les mélanges d'éther et $CS_2$. On a ici:

| | | |
|---|---|---|
| $CS_2$ | $T_2 = 548$ | $p_2 = 76$ atm. |
| Ether | $T_1 = 467$ | $p_1 = 35$ „ |

donc $\Theta = 1{,}17$ , $\pi = 2{,}17$.

Nous aurons par suite:

| | | |
|---|---|---|
| $x = 0$ | $1 - \sqrt{\pi} = -0{,}47$ | $^1/_{14}\left\{1 + \sqrt{\pi} - 2\frac{\pi}{\Theta}\right\} = -0{,}089$ |
| $x = 1$ | „ $= -0{,}47$ | „ $= -0{,}054$ , |

et le rapport des deux termes sera compris entre

5,3 : 1 ($x = 0$) et 8,8 : 1 ($x = 1$),

en moyen = 7 : 1. Toutefois le terme principal prépondéra même dans ce cas au terme supplémentaire.

---

Errata. p. 31, deux lignes au dessous de (13) lire $(-1 + 2k - 3k^2)\sqrt{\ }$.

# L'ÂGE DES DIFFÉRENTES ASSISES ENGLOBÉES DANS LA SÉRIE DU „FOREST-BED" OU LE CROMERIEN [1])

PAR

EUG. DUBOIS

---

Dans un article antérieur [2]) j'ai énoncé, en quelques mots, une opinion sur l'âge des différentes assises englobées dans le Cromerien, que je me propose, à présent, d'argumenter en détail.

Quoique le „Forest-bed", sur les côtes de Norfolk et de Suffolk, soit connu depuis un siècle et demi et soit, depuis longtemps, célèbre pour sa faune de mammifères et à cause de la position qu'il occupe, à la limite des formations pliocène et pléistocène, les nombreuses recherches qu'il a provoquées n'ont pas encore etabli l'accord sur son classement précis dans l'échelle stratigraphique.

Depuis l'excellente description de ces depôts, donneé par M. Clement Reid, [3]) on est généralement incliné à le rapporter au Pliocène. Cependant, plusieurs géologues insistent pour ranger l'ensemble de la Série du „Forest-bed" dans le Pléistocène. En effet, le

---

[1]) La substance de cet article est à peu près la même que celle d'une communication qui sera présentée, sous le même titre, à la séance du 17 Oct. 1905 de la Société belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie à Bruxelles.

[2]) L'âge de l'Argile de Tégelen et les espèces de Cervidés qu'elle contient. Archives du Musée Teyler, série 2, vol. 9, p. 607–608. Haarlem, 1905.

[3]) C. Reid, The Geology of the Country around Cromer. Memoirs of the Geological Survey of the United Kingdom. London, 1882.

– The Pliocene Deposits of Britain. Ibid., 1890.

consciencieux travail de M. Reid sur ces dépôts n'a pu faire disparaître l'équivoque de leur faune et de leur flore, équivoque qui faisait déjà supposer à Lyell, il y a plus de quarante ans, que peut être on aurait pu englober ici des dépôts appartenant à des âges différents. Quel contraste, en effet, entre une flore ne différant presque en rien de celle qui se trouve encore aujourd'hui dans le Norfolk et des types de mammifères comme ils sont propres aux pays chauds, types caractérisant le Pliocène et ayant vécu ailleurs au milieu d'une flore de caractère sub-tropical!

Le contraste n'est pas moins grand dans la faune des mammifères elle-même. A côté des *Elephas meridionalis*, *Rhinoceros etruscus*, *Equus Stenonis*, *Cervus verticornis* et plusieurs autres types de cerfs pliocènes, *Ovis Savinii* et *Arvicola intermedius*, on se trouve en présence d'espèces modernes et pléistocènes, telles que *Equus caballus*, *Sus scrofa*, *Cervus elaphus*, *Bison bonasus*, *Lutra vulgaris*, *Mustela martes*, *Ursus spelaeus*, *Hyaena spelaea*, *Canis lupus*, *Canis vulpes*, *Arvicola arvalis*, *Talpa europaea*, *Sorex vulgaris*, et même *Ovibos moschatus* et *Gulo luscus*, qui, bien qu'habitant en Europe la zone de Norfolk durant les periodes glaciaires, se sont aujourd'hui retirées dans la zone glaciale arctique.

M. Reid lui-même ajoute un élément nouveau à ces équivoques et contrastes, accentués déjà par son „Lower Freshwater-bed" qui aurait la même flore que l'„Upper Freshwater-bed", en admettant que la faune marine du Forest-bed aurait le même facies franchement arctique que celle du Crag de Weybourne. „Thus it is that in the Forest-bed we find a distinctly southern land fauna contemporaneous with an equally marked arctic marine fauna; the plants at the same time showing that the climate was much the same as that of Norfolk at the present day" [1]).

A bon droit, M. J. Geikie démontre que ces contrastes ne peuvent trouver leur interprétation, comme le voudrait M. Reid, dans des conditions géographiques différentes de celles d'aujourd'hui [2]).

M. F.-W. Harmer, le géologue qui a tant de mérite par ses études des dépôts pliocènes et pléistocènes du très intéressant bassin anglo-belge, qu'il a si bien défini, s'est efforcé de chercher une

---

[1]) C. Reid, The Geology of the Country around Cromer. Memoirs of the Geological Survey of the United Kingdom, p. 59. London. 1882.

[2]) J. Geikie, The great Ice Age. Third Edition, p. 332 etc. London, 1894.

autre solution de l'énigme. Il admet que le fleuve, l'ancien Rhin, qui a déposé dans le Norfolk et le Suffolk les ossements des mammifères caractéristiques d'un climat plus chaud que celui de ces contrées d'aujourd'hui, les y a apportés, soit sous forme de portions roulés et fragmentaires de squelettes, soit sous forme de cadavres, venant d'assez loin du Sud pour expliquer la différence avec la faune et la flore indigènes [1]).

Je crois cependant que, même à l'origine de l'ancien Rhin, le climat ne pouvait être assez différent de celui de son embouchure, surtout au temps où existaient ces animaux caractéristiques du Tertiaire, alors que les climats s'étaient certainement encore moins differenciés qu'ils le sont aujourd'hui. Ainsi, je ne puis voir dans cette hypothèse de M. Harmer qu'une tentative désespérée, quoique louable, à nous mener hors de l'impasse où nous a surtout conduit, avec les meilleures intentions, le travail de M. Reid.

Depuis que, il y a huit ans, l'existence de la faune et de la flore de l'argile de Tégelen est venue à ma connaissance, j'ai été frappé du fait que dans ce dépôt, qui paraît être le plus proche équivalent du Cromerien que l'on eut rencontré jusqu'ici, il ne s'est rien présenté d'analogue aux contrastes paléontologiques de ce dernier. Les plantes, aussi bien que les mammifères, appartenant, certainement à une même assise, bien délimitée, font partie d'une faune et d'une flore dont les rapports avec le Pliocène supérieur sont évidents. J'ai déjà signalé antérieurement sept espèces de mammifères qui, jusqu'à présent, ont été déterminées; cinq d'entre elles ont aussi été trouvées dans le „Forest-bed" et y sont des plus communes. Le fait que l'on n'a pas encore rencontré à Tégelen des restes de *l'Elephas meridionalis*, espèce très répandue dans le „Forest-bed", ni d'aucun autre Éléphant, est probablement dû à quelque circonstance locale, le gisement de Tégelen, où l'on a trouvé presque tous les ossements, n'étant qu'*une seule et même argilière*. C'est cette dernière circonstance aussi qui explique le nombre restreint des espèces de mammifères [2]). Il ne faut pas en déduire que l'on ait affaire à une faune pauvre. Au contraire, tout porte à croire qu'elle était d'une remarquable ri-

[1]) Bulletin de la Société belge de Géologie de Paléontologie et d'Hydrologie, Tome X (1896). Mémoires, p. 341, et Proceedings of The Geologists' Association. Vol. 17 (1902), p. 449.

[2]) Il y en a d'ailleurs quelques-unes qui ne sont pas encore determinées.

chesse. J'indiquerai seulement les trois espèces de Cerfs, appartenant à trois types largement différents entre eux. Évidemment, il n'y a lieu, non plus, à considérer celles-ci, avec *Rhinoceros etruscus* et *Equus Stenonis*, comme des simples survivants du Pliocène. Dans les dépôts pliocènes de la France centrale aussi, ce sont surtout des anciens types de Cerfs analogues qui caractérisent la faune. De même, dans le „Forest-bed", en faisant abstraction des Cerfs, représentés par plusieurs de ces types anciens, il ne reste, en fait de mammiféres terrestres, comme vraies espèces pliocènes (non encore rencontrées dans le Pléistocène), que *Elephas meridionalis*, *Rhinoceros etruscus*, *Equus Stenonis*, *Ovis Savinii* et *Arvicola intermedius;* encore faut il probablement en excempter cette dernière espèce, comme se continuant dans le Pléistocène.

Les mammifères et les plantes déterminés de Tégelen ont déjà été énumerés dans mon article sur l'Argile de Tégelen [1]). Le caractère de cette faune et de cette flore nous obligent à rapporter l'Argile de Tégelen au Pliocène supérieur.

Telle est la base qui m'a convié à rechercher l'interprétation des faits énigmatiques de la paléontologie des assises réunies dans le Cromerien ou la Série du „Forest-bed".

Après avoir étudié avec soin les descriptions des dépôts en question, (y comprises celles antérieures à la description de M. Reid) j'ai eu l'avantage de les visiter, sur les côtes de Norfolk et de Suffolk, sous la compétente direction de M. Clement Reid, puis j'ai relu les descriptions et je suis arrivé à la conclusion que les contrastes indiqués ne sont qu'apparents et non pas dans la nature des choses. Suivant ma manière de voir, on a, en effet, ainsi que le pressentit Lyell, réuni erronément des faunes et des flores de dépôts d'âges différents.

D'après la description, généralement acceptée, de M. Reid, la Série du Forest-bed ou le Cromerien, comme elle a, depuis, été nommée, consiste en trois divisions: un dépôt supérieur et un dépôt inférieur, tous deux d'eau douce, et un dépôt intermédiaire d'estuaire. C'est le dépôt moyen qui, particulièrement, à été nommé le „Forest-bed". Et c'est à tort, car il est prouvé que les bois, les souches et les racines d'arbres dont, en maints endroits, on y

[1]) Archives du Musée Teyler. Série 2. vol. 9, p. 606–607.

Les mollusques de l'argile de Tégelen appartiennent tous à des formes lacustres et terrestres, mais on leur a encore donné peu d'attention et l'on ne sait encore rien de précis sur le caractère de cette faune malacologique.

rencontre des accumulations, ont tous été flottés, n'indiquant nullement l'ancien sol d'un forêt.

C'est à cette assise qu'il faut attribuer la plupart des ossements de mammifères d'èspeces éteintes. Autrefois, on la nommait „Elephant-bed", à cause de l'abondance de molaires d'*Elephas meridionalis* qu'on y trouve, surtout à sa base.

Un bon nombre de ces ossements ont été trouvés hors du dépôt, sur la plage; mais souvent il était clair qu'ils devaient réellement provenir du dépôt, duquel ils furent lavés par les tempêtes. Cependant, quelquefois, comme nous le verrons dans la suite, le doute, quant à cette provenance, est tout indiqué. C'est le cas surtout pour ceux qui ont été obtenus par draguage.

Le dépôt contient aussi quelques coquilles marines, appartenant toutes à des espèces également connues du Crag de Weybourne, l'assise sous-jacente, et, rarement, des coquilles de mollusques d'eau douce et terrestres

Des espèces marines, *Mya truncata* et *Tellina baltica*, y ont quelquefois été trouvées avec les deux valves dans la position de vie.

Parmi les mammifères, plusieurs espèces habitaient la mer et des poissons marins y sont communs

C'est pour ces raisons que l'on considère cette division du Cromerien comme un dépôt d'estuaire.

Quant à sa constitution lithologique, cette division, dont l'épaisseur excède rarement 2 mètres, mais quelquefois atteint 6 mètres, se compose de gravier, souvent cimenté en un conglomérat ferrugineux, nommé „pan" dans la contrée, puis de sables et d'argiles laminées. Très fréquemment, il s'y trouve, à la base de cette division, une couche composée en grande partie de morceaux d'argile arrondis (clay-pebbles) avec des gâteaux de tourbe et du lignite

Il est important de remarquer que c'est au milieu de cette couche, reconstruite sans doute à l'aide de débris de destruction d'un *dépôt d'eau douce plus ancien*, que l'on trouve la plupart des ossements de mammifères de cette division Rarement, on y a recueilli des ossements de petites espèces; la plupart proviennent d'espèces de grande taille ou de taille moyenne tout au moins. Je ne pense pas qu'il faille en chercher la cause uniquement dans ce que l'on aurait négligé les ossements petits, comme le croit M. Reid. Le caractère du dépôt et son mode de formation me paraissent déjà impliquer la rareté des petits ossements

En effet, on ne peut s'attendre à trouver beaucoup de petits et par conséquent fragiles ossements au milieu d'un gravier comme celui qui renferme les ossements de l'Estuarine-bed, surtout si ceux-ci n'y ont été déposés qu'à l'état, plus fragile encore, de fossiles et non à l'état frais. C'est à cette dernière circonstance aussi que je crois devoir attribuer le fait que les ossements de cette division du Cromerien se trouvent généralement brisés. Je suis d'accord avec M. Reid qu'ils n'ont pas l'air d'avoir été roulés et ne puis me ranger à l'opinion antérieure de M. Harmer, d'après laquelle le fleuve qui se jetait dans l'estuaire, venant du Sud, y apportait des portions roulées et fragmentaires de squelettes et des dents de mammifères caractéristiques d'un climat plus chaud que celui qui régnait alors en Angleterre. [1]) A présent, M Harmer pense que le transport du Sud, des dépouilles de vertébrés, a eu lieu sous forme de cadavres. [2])

Il me paraît cependant qu'il serait difficile de se figurer ce transport assez loin pour justifier, à lui seul, l'aspect méridional de la faune. L'origine la plus lointaine aurait été de l'amont de l'ancien Rhin.

Cependant les ossements n'ont pas non plus l'aspect tout-à-fait intact, comme par exemple ceux de Tégelen, qui, presque toujours, ont conservé la plus fine sculpture superficielle, ce qui est très rare chez ceux de l'Estuarine-bed. Cette sculpture superficielle, chez ces derniers, s'est ordinairement plus ou moins usée et, dans beaucoup de cas, ils se présentent fendillés.

L'état fragmentaire des ossements et l'aspect de leur surface sont tels qu'ils devraient être, si les ossements provenaient de quelque dépôt d'argile préexistant et non lointain, duquel ils avaient été lavés sans trop de violence. Une fois, il est vrai, on a trouvé en connexion les os d'un pied d'éléphant, mais on peut se figurer que ces os, renfermés primitivement, en contact, dans une couche d'argile, furent lavés, enveloppés dans une lambeau d'argile, comme on les observe généralement à la base de l'Estuarine-bed.

On ignore la provenance précise de beaucoup des ossements de mammifères du Cromerien, surtout de ceux des grandes espèces;

---

[1]) Bulletin de la Société belge de Géologie etc., tome X (1896), Mémoires, p. 341.

[2]) F.-W. Harmer, A sketch of the later Tertiary History of East Anglia, p. 449. Proceedings of the geologists' Association, vol. 17 (1902). — Voir aussi: Proceedings of the Yorkshire Geological and Polytechnical Society, Vol. 15 (1904) p. 308.

ils ont été trouvés pas de simples pêcheurs ou autres gens manquant d'expérience scientifique; maintes fois, ils furent ramassés sur la plage. Cependant, il a été souvent possible, dans ces cas, de vérifier, avec une probabilité plus ou moins grande, le rapport avec l'horizon auquel il fallait les attribuer.

Quelquefois, les doutes que l'on peut soulever sur le rapport au Cromerien de certains vestiges signalés se changent presque en certitude d'ordre négatif.

De l'*Ovibos moschatus*, par exemple, cette espèce si imprévue au milieu des types pliocènes de la division moyenne du Cromerien, une portion de crâne a été trouvée par un pêcheur et on l'a attribuée *avec probabilité* au Forest-bed. Un autre spécimen est rapporté à la même origine, bien qu'il ait été dragué dans la Mer du Nord [1]). Dans ces circonstances, il me paraît prudent de n'attacher aucun poids à la prétendue présence de cette espèce arctique au milieu de la faune pliocène. En ce qui concerne *Hyaena spelaea*, est-il bien sûr que les dents, par lesquelles on a cru reconnaître cette espèce [2]), justifient la diagnose et que l'on n'ait pas affaire à quelque autre forme ressemblant à *Hyaena crocuta* et appartenant au Pliocène, telle que *H. Perrieri* et plusieurs autres? Quelques-uns des spécimens d'*Ursus spelaeus* donnent lieu à des remarques du même genre; d'autre part, plusieurs proviennent de la division supérieure du Cromerien. Si la mâchoire de *Gulo luscus*, décrite par M. E.-T. Newton, vient réellement de la partie inférieure du Cromerien, ainsi qu'il semble être le cas d'après les informations obtenues par M. Reid de l'auteur de la trouvaille [3]), cela ne nous oblige pas encore a admettre sa contemporanéité avec la faune pliocène dont on a trouvé tant de restes dans cette

---

[1]) E.-T. Newton. — The vertebrata of the Pliocene Deposits of Britain, p. 22. Memoirs of the Geological Survey of the United Kingdom, London, 1891. Dès la première description, par M. Boyd Dawkins, Prestwich a soutenu que l'horizon géologique du premier fossile, n'est pas prouvé. Celui-ci a été trouvé dans une contrée de la côte où les vestiges de mammifères sont abondants dans des dépôts plus récents. (Quarterly Journal of the Geological Society of London. Vol. 39, (1883) p. 581).

[2]) E.-T. Newton, On the Occurence of the Cave Hyaena in the „Forest Bed" at Corton Cliff, Suffolk. Geological Magazine, 1883, p. 433—435. Pl. X.

[3]) E.-T. Newton, The Vertebrata of the Forest-bed Series of Norfolk and Suffolk, p. 18. Memoirs of the Geological Survey of the United Kingdom. London, 1882.

même partie du Cromerien. En effet, je tâcherai de prouver qu'il faut voir dans l'Estuarine-bed un dépôt glacio-fluviatile.

Au-dessus de cet Estuarine-bed ou Forest-bed propre, M. Reid a distingué, comme division supérieure, des dépôts d'eau douce et les a nommés „Upper Freshwater-bed". Ce sont des dépôts lacustres (et fluviatiles) remplissant des bassins qui, par endroits, se trouvent à la surface supérieure de l'Estuarine-bed, surface se présentant souvent comme un ancien sol, pénétrée par des débris de petites racines („Rootlet-bed").

L'Upper Freshwater-bed se compose ordinairement d'une couche de sable mêlé avec de l'argile bleue et souvent charbonneuse, d'argile brune et grise laminée, hautement ferrugineuse et endurcie par endroits, et de tourbe. Elle est épaisse de $0^{m}5$ à 2 mètres et renferme une abondance de coquilles d'eau douce et terrestres, des restes de poisons d'eau douce et des débris de plantes, surtout des graines, et beaucoup d'ossements de mammifères, parmi lesquels les petites espèces sont les plus nombreuses [1]).

Les plantes, aux seules exceptions de *Trapa natans*, de *Picea excelsa* et de *Najas minor*, appartiennent à des espèces aujourd'hui indigènes dans le Norfolk.

*Elephas meridionalis* n'a jamais été trouvé dans l'Upper Freshwater-bed, mais, il faut le dire, non plus *Elephas antiquus*, ni aucune autre espèce d'éléphant. On croit que *Rhinoceros etruscus*, espèce assez commune dans le Forest-bed propre, a été trouvée dans l'Upper Freshwater-bed, à West-Runton, mais, dans ce cas, on a probablement eu affaire à *Rhinoceros Mercki*, souvent à peine distinguable de *Rhinoceros etruscus*. Il est très douteux aussi que le specimen de *Cervus verticornis*, mentionné de l'Upper Freshwater-bed de West-Runton, où M. Savin l'avait recueilli, soit réellement de cet horizon, vu qu'il n'y est pas toujours bien séparable de l'Estuarine-bed et que, d'autre part, le Freshwater-bed y renferme des coquilles marines et des ossements d'autres espèces de mammifères dont M. Reid admet qu'ils ont été lavés de l'Estuarine-bed sous-jacent [2]). *Arvicola intermedius*, que l'on y rencontre authentiquement, paraît être une espèce survivante des

---

[1]) M. Reid a obtenu la plupart de ces derniers en lavant les sables argileux sur un tamis. C'est ce qui explique leur prépondérance relative, prépondérance représentant cependant la proportion naturelle.

[2]) Geology of the Country around Cromer. Loc. cit., pp. 47 et 26—27.

horizons inférieurs. A l'opposition de l'Estuarine-bed, la grande majorité, tout au moins, des mammifères de l'Upper Freshwater-bed sont des espèces modernes ou pléistocènes. Le contraste reste grand aussi, en faisant abstraction des petites espèces

Le dépôt d'eau douce inférieur, le „Lower Freshwater-bed" de M. CLEMENT REID, dont l'existence me paraît bien problématique, n'a été vu *in situ* par lui qu'en trois endroits, durant quelque temps, dans des conditions favorables de la plage et à la marée basse:

1°. Un peu plus d'un kilomètre au Nord-Ouest de Cromer; parfois on voyait exposée à marée basse, sur environ 90 mètres, une boue noire, épaisse de $0^m6$ à $0^m9$, qui, d'après M. REID, représente le „Lower Freshwater-bed".

Cette boue charbonneuse, couverte par de l'argile sableuse, laminée, de couleur verdâtre, remplie de bois et contenant occasionnellement des coquilles marines et des cônes de pin, ravine le Crag de Weybourne, directement sous-jacent ailleurs à l'Estuarine-bed, et même, sur quelques pieds, elle pénètre dans la Craie. Elle renfermait des os de poissons d'eau douce et, en abondance, des graines de plantes aquatiques et palustres.

Dans une publication postérieure [1]), M. REID énumère ces plantes comme suit:

*Ranunculus aquatilis*
*Myriophyllum spicatum*
*Potamogeton lucens*
*Potamogeton praelongus*
*Eriophoron angustifolium*

Ce sont toutes espèces vivant encore aujourd'hui dans le Norfolk.

Il n'y a rien que ces coquilles marines occasionnelles qui semblent opposées à ce que nous considerions cette boue, avec l'argile sableuse, comme une partie de „l'Upper Freshwater-bed" qui, ici, aurait été déposé dans un bassin un peu plus profond (de 4 mètres environ) qu'à l'ordinaire. [2])

[1]) C. REID, The Origin of the British Flora, p. 64, London 1899.

[2]) Voir pour ces différences de niveau du Freshwater-bed (supérieur) la figure fournie par REID dans: On the Succession and Classification of the Beds between the Chalk and the Lower Boulder-Clay in the Neighbourhood of Cromer. Geological Magazine. 1877, p. 305.

Quant à ces quelques coquilles marines, il est évident qu'elles peuvent venir du Crag de Weybourne.

2°. L'autre partie du „Lower Freshwater-bed", considérée comme étant *in situ* par M. Reid, était près de Trimingham. Il l'a décrite et figurée [1]), mais il est difficile, en considérant avec attention cette discription et cette section figurée, de voir dans cette couche peu importante de lignite et de sable argileux, verte, charbonneuse, autre chose que la base de l'Estuarine-bed, refaite en partie du Weybourn-Crag sous-jacent. En tout cas, je ne vois aucune nécessité à y admettre une couche intermédiaire speciale. Les couches numérotées de 4 à 7, quoique réparties dans les trois assises, appartiennent incontestablement à un même ensemble. M. Reid dit, dans sa description, que cette boue durcie, noir et charbonneuse, qu'à Trimingham il rapporte à son „Lower Freshwaterbed", était pleine de graines de plantes, mais dans son „Origin of the British Flora", où il cite les localités dont on a obtenu les plantes, il ne nomme ni pour Trimingham ni pour Sidestrand, localité voisine, aucune plante du „Lower Freshwater-bed" [2]).

3°. M. Reid croit que la tourbe laminée noire, pleine de fruits de *Trapa natans* et contenant un seul spécimen de *Ceratophyllum demersum*, qu'il a vue une fois mise à découvert au Sud de Mundesley, à un niveau moyen entre la marée basse et la marée haute, y représente aussi le „Lower Freshwater-bed". Mais le rapport aux autres divisions de la Série du Forest-bed n'était pas visible [3]). La même tourbe était encore à decouvert à environ un kilomètre de plus au Sud, contenant beaucoup de graines de *Menyanthes trifoliata*, mais non pas des fruits de *Trapa*. Évidemment ici non plus, il n'est nullement certain que ce dépôt ne puisse appartenir à l'Upper Freshwater-bed.

Voilà les seuls endroits où M. Reid croit avoir observé le „Lower Freshwater-bed" *in situ*. Pour le reste, ce n'est que par des fragments remaniés, dans l'Estuarine-bed, et surtout par des gâteaux de tourbe et des plaques d'argile endurcie par imprégnation ferrugineuse (clay-ironstones) ramassés sur la plage, renfermant, les uns, surtout des graines et les autres, des feuilles de plantes, que M. Reid croit devoir admettre un Lower Freshwater-bed.

---

[1]) Cromer Memoir, p. 16 en 33.

[2]) Origin of the British Flora. p. 89 et 93.

[3]) Pliocene Deposits of Britain, p. 168.

D'après une lettre que je viens de recevoir de M. Reid et d'après son ouvrage „Origin of the British Flora" (p. 74), il a reconnu, par les feuilles, dans ces clay-ironstones:

*Cornus sanguinea*
*Ulmus montana?*
*Betula alba*
*Alnus glutinosa*
*Quercus robur*
*Fagus sylvatica*
*Salix, 2 sp.*
*Pinus sylvestris*
*Picea excelsa* (cône)

En outre, dans sa lettre, M. Reid cite encore *Trapa natans*, trouvé, d'après „Origin of the British Flora" (p. 82), à Mundesley, dans la tourbe du supposé Lower Freshwater-bed, puis *Nuphar luteum* et *Menyanthes trifoliata* (p 134), de Mundesley et de Happisburgh, et *Osmunda regalis*. Cette dernière espèce est très commune dans le Cromerien de Mundesley (p. 168).

Évidemment, on est moins sûr de ce que les clay-ironstones jetées sur la plage proviennent, en effet, d'un dépôt plus ancien que l'Estuarine-Bed. Or, si l'on fait abstraction des plantes déterminées par les feuilles renfermées dans ces cailloux, il n'en restent que peu dont on pourrait présumer avec un peu plus de droit qu'elles vinrent peut-être d'un dépôt inferieur, et de celles-ci de même, il est tout au moins possible qu'elles appartiennent à l'*Upper* Freshwater-bed. Notons de plus que, dans l'argile de Tégelen, incontestablement pliocène, il se trouve:

*Trapa natans*
*Cornus mas*
*Nuphar luteum*
*Abies pectinata*

à côté d'espèces disparues de l'Europe septentrionale, ou ne vivant plus.

L'existence d'un Lower Freshwater-bed réel, qui aurait fourni à M. Reid les plantes citées, reste donc pour le moins très problématique.

Revenons à présent au Forest-bed propre, le dépôt d'estuaire de la série cromerienne et regardons d'abord de plus près le gravier qui le compose dans une si grande proportion.

Le caratère des cailloux de celui-ci est remarquable. Ces cailloux ne peuvent avoir été apportés que par un grand fleuve qui venait de l'Est ou du Sud-Est. Un nombre considérable de ces cailloux sont d'origine rhénane. En effet, de commun accord, les géologues anglais n'hésitent pas à considérer ce cailloutis des côtes de Norfolk et de Suffolk comme un dépôt d'un *ancien Rhin* avec ses tributaires, en partie anglais.

Beaucoup de ces cailloux sont angulaires et de dimensions assez grandes. Des rognons de silex, gros comme le poing et parfois le double, sont communs. On y a même vu quelques gros blocs. Ainsi, à Sherringham, à la base de cette division de la Série du Forest-bed, un bloc angulaire de prétrosilex (felsit), long de 27 centimètres et, un peu plus loin, plusieurs masses de quartz laiteux et des blocs de quartzite d'environ 30 centimètres. A East-Runton, un bloc de granit grossier, grisâtre, de provenance inconnue, mesurant jusqu'a 60 centimètres, a été vu parmi les morceaux d'argile et les os. [1])

Dans l'opinion de M. Reid, il est évident qu'un bon nombre des pierres de ces graviers ont été transportées dans leur gîte actuel par des glaçons de rivière. Mais il ne croit pas qu'il soit pour cela nécessaire d'admettre que le climat d'alors ait été plus arctique que celui de Norfolk d'aujourd'hui, parce que, durant des hivers rigoureux, les glaçons de la Tamise d'aujourd'hui seraient tout-à-fait capables de charrier les plus grandes de ces pierres. Je n'en doute pas, mais il me paraît impossible que jamais les glaçons d'une rivière actuelle de ces contrées transporteraient de grosses pierres dans une aussi grande proportion qu'elles se trouvent dans ce gravier. De plus, il n'est pas admissible qu'un seul des assez gros cailloux rhénans, si nombreux dans ces graviers, aît fait le trajet des *quatre cents kilomètres* de l'aval de cet ancien Rhin sur un terrain d'alluvions, autrement que transporté par des glaces. En effet, les eaux, demeurées liquides, d'un fleuve, quelque puissant qu'il soit, ne déplacent ces gros graviers de fond que quand la pente appartient au régime torrentiel. Ce dernier est impossible sur un terrain composé d'alluvions. Or, un transport glaciaire *sur une aussi*

---

[1]) C. Reid, Pliocene Deposits of Britain, pp. 154 et 158.

*grande échelle* implique nécessairement un climat de beaucoup plus froid que le climat actuel, une véritable époque glaciaire.

En prenant en bonne consideration tous ces faits concernant le gravier du Cromerien, il me paraît inévitable d'admettre, pour leur transport, les mêmes effets qui ont été en jeu pour le dépôt des cailloutis glacio-fluviatiles du Pléistocène, des effets semblabes à ceux qui se produisent comme un phénomène constant dans les fleuves actuels de la Sibérie, du Canada et de l'Alaska [1]).

La formation de glace de fond doit avoir été un phénomène très général aux périodes glaciaires de l'époque pléistocène. Quand, avec le dégel universel, des radeaux de glace ayant, à l'amont du Rhin et de ses tributaires, adhéré au fond et comprenant dans leur masse les cailloux qui les jonchaient, dérivaient vers l'aval pour aller échouer à l'embouchure du grand fleuve, ils devaient y apporter les matériaux des graviers en question. C'est le seul moyen, me semble-t-il, de comprendre leur dépôt.

Je n'hésite donc pas à considérer le gravier du Cromerien comme un véritable dépôt glacio-fluviatile, un dépôt produit par la fonte des glaces. Or, comme l'extension du domaine des glaces est le fait caractérisant l'époque pléistocène, il s'ensuit qu'il faut rapporter ce dépôt du Forest-bed propre ou l'Estuarine-bed à cette époque.

Que le Crag de Weybourne, sous-jacent, soit un dépôt glaciaire, personne n'en doute. Pas moins d'*un sixième* du nombre total des espèces de mollusques marins de ce dépôt sont des espèces arctiques et aucune espèce n'est méditerranéenne, tandis que, au contraire, les couches sous-jacentes comptent moins d'un douzième du nombre total d'espèces arctiques et plusieurs espèces méditerranéennes. De plus, dans le Crag de Weybourne également, on rencontre fréquemment d'assez gros blocs qui ont dû avoir été charriés par la glace. M. Reid cite, de la base du Crag de Weybourne, un gros cailloux de quartzite ayant 25 centimètres de diamètre, un bloc angulaire de grès brun d'origine inconnue, long de 30 centimètres, et un autre bloc de quartzite long de 45 centimètres [2]). Le gros bloc de basalte mesurant 45 centimètres en largeur, cité par M. H.-B. Woodward, [3]) appartient probablement

[1]) A. de Lapparent, Traité de Geologie. 4e édition, pp. 314—317.

[2]) Cromer memoir, p. 12 et 14.

[3]) Ibid., p. 58.

au même horizon. On sait d'ailleurs que, bien que le gravier caillouteux de la base du Crag de Weybourne soit principalement composé de rognons de silex, d'origine locale, ce „stone-bed" contient un nombre considérable de pierres d'origine méridionale.

Voilà donc le dépôt glaciaire précédant la division glacio-fluviatile du Cromerien.

J'ai déjà indiqué que je considère le Crag de Weybourne immédiatement sous-jacent à l'Estuarine-bed du Cromerien, les deux sections de Trimingham et du Nord-Ouest de Cromer décrites par M. Reid, comme ne prouvant pas que quelque dépôt d'eau douce soit intercalé entre ce dépôt marin et celui d'estuaire. Fréquemment, d'ailleurs, ceux-ci ne peuvent pas être delimités l'un de l'autre là où ils sont tous les deux presents; souvent, il est douteux que l'on ait affaire à l'un ou à l'autre dépôt, ou bien il semble que l'un d'eux seulement soit présent. A l'exception de ces deux coupes problématiques, le Crag de Weybourne est toujours en contact avec le dépôt d'estuaire du „Forest-bed", s'il n'est pas à nu [1]).

Dans ma manière de voir, les ossements que l'on trouve dans ce dernier, le plus souvent à sa base, au milieu de morceaux d'argile dérivés de quelque dépôt d'eau douce, plus ancien que l'Estuarine-bed et le Crag de Weybourne, sont dérivés du même dépôt argileux, probablement peu eloigné [2]), duquel ils ont été lavés par les grandes crues à l'époque de la fonte des glaces de la première époque glaciaire. La destruction de ce dépôt ossifère,

---

[1]) Voir, à cet égard, les coupes du Forest Bed dans le Cromer memoir de M. Reid, et sa description précitée de 1877.

[2]) M. Reid à déjà admis la possibilité que quelques-uns des débris de mammifères de l'Estuarine-bed ont été lavés d'un dépôt d'eau douce detruit, qu'il considérait avoir été son „Lower Freshwater-bed" (Cromer memoir, p. 44).

Je puis bien me ranger de l'avis de M. Harmer, qui regarde les ossements de mammifères de la base du Crag rouge et de celle du Crag de Norwich comme dérivés de quelque dépôt préexistant du Pliocène inférieur, ou du Miocène. Cette manière de voir supprime, en effet, la difficulté de se figurer des animaux d'un type plus ancien et méridional, tels que *Mastodon*, continuant à vivre durant l'époque du Crag de Norwich, coexistant avec la faune malac ologique de ce dernier et avec des mollusques arctiques, tels que *Astarte borealis* et *Cardium groenlandicum*. (Harmer, On the Kessingland Cliff-section, etc. (Quarterly Journal of the Geological Society of London. Vol. 33 (1876), p. 138—139) et: Sketch of the later Tertiary history of East Anglica, l. c., p. 433). Il me semble être de prime importance de réexaminer l'ordre stratigraphique de tous ces dépôts, *en ne tenant pas compte des débris de mammifères qu'ils contiennent.*

où les ossements furent d'ailleurs protégés dans leur enveloppe d'argile mieux que dans aucun autre dépôt non consolidé. aura eu lieu avec assez peu de violence pour que de gros morceaux d'argile et des fragments des ossements renfermés dans ce dépôts, quelquefois de dimensions considérables, aient pu rester entiers.

D'autre part, il ne peut pas nous étonner que la plupart des os ont été brisés, ces os ayant déjà été rendus beaucoup plus fragiles par la fossilisation anterieure qu'ils n'étaient dans l'état frais; mais leur sculpture superficielle a ordinairement dû plus ou moins s'user par ce lavage. Aussi, à l'exception des dents, presque aucun des ossements du „Forest-bed" propre, que j'ai vus aux Musées de Londres et de Norwich n'a la sculpture superficielle aussi intacte que ceux de Tégelen.

A l'appui de cette manière de voir que le dépôt du Crag de Weybourne aussi est, en effet, postérieur à ce dépôt d'argile ossifère, dont l'existence a été reconnue aux produits de sa destruction, on pourrait encore citer les faits que, dans ce dépôt marin aussi, on rencontre souvent des ossements d'*Arvicola intermedius* et d'autres mammifères ainsi que des coquilles d'eau douce et terrestres. Cependant, il n'est pas prouvé que ces faits n'indiquent pas simplement, comme le veut M. Reid, des conditions locales d'estuaire ayant existé lors du dépôt du Crag de Weybourne.

En résumé, je considère que c'est à tort que l'on a réuni, dans un même groupe, le Cromerien ou la Série du Forest-bed, les trois dépôts prénommés, en admettant qu'ils sont contemporains ou à peu près.

Je pense que les faits nous obligent à rapporter le Forest-bed propre ou l'Estuarine-bed, aussi bien que le Crag de Weybourne, *à la première période glaciaire de l'époque pleistocène*, la période scanienne de M. James Geikie. Les ossements, du moins la plupart, qui ont fait ce dépôt célèbre, ne sont qu'empruntés à quelque dépôt du Pliocène superieur et n'y ont été introduits, avec des lambeaux d'argile et des gâteaux de tourbe, que par la destruction de ce dépôt plus ancien. C'est ce dépôt, peut-être entièrement détruit, qu'il faut considérer comme l'equivalent anglais de l'Argile de Tégelen et de la Campine.

Le gravier du „Diluvium rhénan" de Tégelen, qui, dans quelques rares cas, lui aussi, renferme des os remaniés de l'argile pliocène, dépôt glacio-fluviatile de la première période glaciaire, paraît alors être l'équivalent réel du „Forest-bed" propre, assise qui seule, dorénavant, semble pouvoir mériter ce nom.

La faune et la flore de l'„Upper Freshwater-bed", mieux nommé simplement le Freshwater-bed, sont donc interglaciaires, et du moins la plupart des rares plantes trouvées probablement dans quelques parties de ce dernier, déposées dans des bassins un peu plus profonds et trouvées surtout dans des cailloux d'argile durcie et des morceaux de tourbe jetés sur la plage, plantes qui ont induit M. Reid, malgré tant de contradictions données par les autres faits, à admettre un dépôt d'eau douce en dessous de l'Estuarine-bed, appartiennent aussi à cette division supérieure de l'hétérogène „Cromerien". Quelques-unes de ces plantes peuvent appartenir en prope à cet Estuarine-bed, et il n'est pas impossible que quelques-autres soient effectivement dérivées du même dépôt argileux préexistant, inconnu *in situ*, qui a fourni les ossements à l'Estuarine-bed.

Il me paraît que, par cette manière de voir, les faits relatifs au „Cromerien" sont remis en accord naturel, aussi bien entre eux qu'avec les données ayant rapport au Pliocène supérieur et aux premières périodes de l'époque pléistocène d'autres contrées de l'Europe.

Haarlem, Septembre 1905.

IMPRIMERIE LES HÉRITIERS LOOSJES À HAARLEM.

L Soc 307 2NO

JUL 20 1906

# ARCHIVES

DU

# MUSÉE TEYLER

SÉRIE II, VOL. X.

DEUXIÈME PARTIE.

HAARLEM. — LES HÉRITIERS LOOSJES.
1906.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIC,
G. E. SCHULZE.

# ARCHIVES

DU

# MUSÉE TEYLER

SÉRIE II, VOL. X.

Deuxième partie.

HAARLEM. — LES HÉRITIERS LOOSJES.
1906.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIC,
G. E. SCHULZE.

# AVIS.

En ouvrant cette nouvelle série l'Institut scientifique et littéraire de la fondation Teyler a l'honneur d'informer les lecteurs des Archives, que M. M. les Directeurs ont résolu de lui en confier dorénavant la rédaction, qui, à partir de ce jour, se fera sous sa responsabilité.

Les Archives, comme l'indique déjà leur titre, contiendront d'abord la description scientifique des principaux instruments de précision et des diverses collections que la fondation possède, ainsi que les résultats des expériences et des études, qui seront faites par leur moyen, soit que ce travail soit fait par les conservateurs de ces collections, soit par d'autres, auxquels les Directeurs en auront accordé l'usage.

En second lieu, et pour tant que l'espace disponible ne sera pas occupé par ces publications obligatoires, les pages des Archives seront ouvertes aux savants, dont les travaux scientifiques ont rapport à une des branches, dont la culture a été recommandée à l'Institut par son fondateur.

Pour de plus amples informations à cet égard on est prié de s'adresser au Secrétaire de l'Institut,

E. VAN DER VEN.

HAARLEM, janvier 1881.

# PROGRAMMA

VAN

# TEYLER'S TWEEDE GENOOTSCHAP

TE HAARLEM,

## voor het jaar 1906.

H.H. Directeuren van Teyler's Stichting en de Leden van Teyler's Tweede Genootschap hebben besloten voor het jaar 1906, de volgende prijsvraag uit te schrijven:

> Het Genootschap vraagt een historisch en experimenteel onderzoek naar het aandeel, dat bastaardeeringen gehad hebben in het ontstaan van dubbele bloemen.

Volgens de heerschende opvatting hebben bastaardeeringen in den tuinbouw bij het ontstaan van varieteiten een groote rol gespeeld. Daarbij moet echter verschil gemaakt worden tusschen het eerste optreden van een nieuw kenmerk in een geslacht of groep van verwante geslachten en de latere overdrachten van dit kenmerk op andere soorten en varieteiten door middel van kruisingen.

Het Genootschap wenscht, dat uit de verspreide literatuuropgaven, voor een bepaald geval, dat der dubbele bloemen, het onderscheid tusschen deze beide phasen van het proces zoo scherp mogelijk worde doorgevoerd. Moge de tweede der aangeduide perioden voor de praktijk van den tuinbouw het belangrijkst zijn, het is duidelijk dat uit een zuiver wetenschappelijk oogpunt

vooral het eerste ontstaan verdient bestudeerd te worden. Uit dit gezichtspunt wenscht het Genootschap dat het voorhanden materiaal van historische feiten worde beoordeeld en door nieuwe onderzoekingen aangevuld.

De prijs voor het best en voldoend antwoord bestaat in een gouden eerepenning, op den stempel des Genootschaps geslagen, ter innerlijke waarde van *f* 400.

De antwoorden moeten worden ingezonden vóór of op den 1sten April 1907, opdat zij voor den 1sten Mei 1908 kunnen beoordeeld worden.

De verhandelingen moeten in het Nederlandsch, Fransch, Engelsch of Hoogduitsch, met eene *Latijnsche* letter, vooral goed en leesbaar geschreven zijn door eene *andere hand, dan die van den opsteller.* Ook moeten zij vóór den bepaalden tijd *in haar geheel* worden ingezonden: geene antwoorden, waaraan eenig gedeelte bij de inlevering ontbreekt, zullen tot het dingen naar den gemelden eereprijs worden toegelaten.

Alle ingezonden stukken blijven het eigendom des Genootschaps, dat de bekroonde verhandelingen, met of zonder vertaling, in zijne werken opneemt, zonder dat de schrijvers, anders dan met toestemming der Stichting, die mogen uitgeven. Ook behoudt het Genootschap aan zich het recht om van de niet bekroonde stukken zoodanig gebruik te maken als het raadzaam zal oordeelen, hetzij zonder of met vermelding van den naam des schrijvers; in het laatste geval echter niet zonder zijne toestemming.

Ook worden geene afschriften van de niet bekroonde stukken aan de schrijvers verleend, dan ten hunnen koste. De in te zenden antwoorden moeten, zonder naam en alleen met eene spreuk onderteekend, vergezeld van een verzegeld briefje, dezelfde spreuk ten opschrift voerende en van binnen des schrijvers naam en woonplaats behelzende, gezonden worden *aan het Fundatiehuis van wijlen den Heer* P. TEYLER VAN DER HULST *te Haarlem.*

# PROGRAMMA

VAN

# TEYLER'S TWEEDE GENOOTSCHAP

TE HAARLEM,

## voor het jaar 1906. [1])

---

H.H. Directeuren van Teyler's Stichting en de Leden van Teyler's beide Genootschappen hebben in hunne vergadering van den 14en Maart 1906, uitspraak gedaan over de antwoorden, ingekomen op de voor 1903 door het Tweede Genootschap uitgeschreven prijsvraag, luidende als volgt:

„Een zoo volledig mogelijke, alphabetisch gerangschikte naamlijst van Noord-Nederlandsche kunstschilders, zoowel hier te lande als elders geboren, van den vroegsten tijd tot het einde der 17de eeuw, met opgaaf van plaats, jaartal en zoo mogelijk datum van geboorte en overlijden van de vermelde kunstenaars.

Deze naamlijst moet tevens eene beknopte levensbeschrijving van elken kunstenaar bevatten, waarin ieder belangrijk feit dat eene bijdrage tot zijne levensgeschiedenis oplevert, dient te worden vermeld. Eene opgave van een of meerdere zijner voornaamste werken, van de

---

[1]) Vervolg op het in Januari l.l. uitgegeven programma, waarnaar het Genootschap, met het oog op de voor 1906 uitgeschreven prijsvraag, verwijst

verschillende wijzen, waarop die geteekend zijn en van de plaats, waar die zich bevinden, mag hierbij niet ontbreken.

Ook is het gewenscht dat, voor het biografische gedeelte, de bronnen worden aangewezen, waaruit is geput."

Op deze prijsvraag zijn twee antwoorden ingekomen. Het eerste, geteekend met het motto: „*Het volk dat zijne groote mannen eert is zelf niet klein*", bevat alleen een beknopte opgaaf van de voornaamste en meest bekende Noord-Nederlandsche kunstschilders reeds door Immerzeel en Kramm vermeld, aangevuld met eenige verbeterde data van geboorte en overlijden en met enkele biografische aanteekeningen welke in Oud-Holland, in Obreen's Archief voor Kunstgeschiedenis, in tijdschriften en voornamelijk in de laatste editiën van museumcatalogi te vinden zijn.

Maar van zelfstandig onderzoek van de oude zoowel als van de nieuwe literatuur is nergens iets te vinden. De vele, door bovengenoemde schrijvers nog niet vermelde Noord-Nederl. kunstschilders, die in Oud-Holland en in Obreen's Archief voorkomen, ontbreken geheel.

Uit deze onvolledigheid blijkt voldoende dat de schrijver de bedoeling van de gestelde vraag niet begrepen heeft, dat zijn arbeid zelfs niet voor mededinging kan in aanmerking komen.

Het tweede antwoord, onder de spreuk: „*No man liveth to himself, and no man dieth to himself*", ingezonden, is wel meer omvangrijk, maar, wel beschouwd, niet veel beter.

Ook hier hebben Immerzeel en Kramm de hoofdvoorraad van aanteekeningen geleverd, slechts aangevuld door wat schrijver in Oud-Holland, in Obreen's Archief voor kunstgeschiedenis en verder in algemeen gebruikte boeken als: Van der Willigen's Geschiedkundige aanteekeningen over Haarlemsche schilders, enz. — eerste editie van 1866 —, Muller's Utrechtsche schildersvereenigingen, enz. enz. en in eenige museumcatalogi aantrof.

Hoofdbronnen, en als zoodanig natuurlijk ook te noemen zijn, voor de oudere literatuur, behalve werken als: Van Mander, de Bie, Sandrart, Houbraken, Weyerman, Van Eynden en Van der Willigen, stedebeschrijvers als: Orlers, Van Bleyswyck, enz.

Voor de nieuwe literatuur: Immerzeel, Kramm, Obreen's Archief, Oud-Holland, Repertorium für Kunstwissenschaft. Gazette des Beaux-Arts, Zeitschrift für Bildende Kunst, Nederl. Kunstbode, Meyer's Kunstler Lexicon, Bode's Studiën, Van der Willigen's Artistes de Harlem, 1870, Dr. Bredius Meisterwerke en de catalogi van zoo vele mogelijke musea, vooral van Duitsche, ook enkele Tentoonstellingscatalogi.

Vergelijkt men hiermede de door den schrijver gebruikte literatuur, dan ontbreekt daaraan veel. Oud-Holland is tamelijk voldoende geraadpleegd, maar Obreen's Archief, voor dit doel eigenlijk nog veel belangrijker daar bijna alle nog bestaande gildeboeken er in afgedrukt zijn, is hoogst gebrekkig geëxcerpeerd. Tal van namen, die alleen in Obreen's Archief voorkomen, ontbreken geheel, b.v. bij de letter R: Pieter Raemsdorp, Pieter de Raep, Reynier Rasenburch, Pieter van Reenen, Jan Regtop, Jacob Reynoudtsen, e. a.

Verder uit verschillende catalogi, b.v.:

| | | | |
|---|---|---|---|
| B. van der Meer, | zie Cat. | Weenen | n°. 1371. |
| G. E. Megan, | „ „ | „ | „ 1177 en 1178. |
| Monogrammist IS, | „ „ | „ | „ 1289. |
| P. Mulier Tempesta, | „ „ | „ | en Dresden. |
| Monogramm. OS of OF | „ „ | Pommersfelden | n°. 370. |
| „ VL | „ „ | Cassel | „ 456. |
| „ JR | „ „ | „ | „ 394. |
| L. Mak | „ „ | Manheim. | |
| Monogrammist R | „ „ | Portrettententoonstelling Den Haag en het werk daarover, door Dr. C. Hofstede de Groot. | |
| „ FvA | „ „ | Berlijn 901 E. | |
| „ TvB | „ „ | Brunswijck 99. | |
| „ RC | „ „ | „ 341. | |
| „ JVR | „ „ | Boymans. | |
| ABS | „ „ | Cambridge 391—392. | |
| HB | „ „ | „ 395. | |

Nergens blijkt het directe putten uit de oorspronkelijke oude literatuur. Ook stedebeschrijvers als Orlers voor Leiden en van Bleyswijck, een voorname bron voor Jan Vermeer van Delft, wordt niet genoemd.

Alleen van de letter A—D worden, in navolging van Wurz-

bach's Niederl. Kunstler Lexicon, hetwelk in April 1904, de termijn van inzending der antwoorden op de prijsvraag, ook tot letter D verschenen was, als oorspronkelijke bronnen oude schrijvers aangehaald, maar na genoemde letter treft men ze niet meer aan.

Slaat men verder b.v. het artikel Mostaert op, dan vindt men van de literatuur na 1885 niets genoemd, terwijl toch gewezen had moeten worden op: Zeitschrift für Bildende Kunst Neue Folge VII, Heft XII; C. Benoit, Gazette des Beaux-Arts, 1899, 1—265, verder op Friedländer's Bruggewerk in George H. de Loo's Bruggecatalogus en op den catalogus van het museum te Brussel, waar Mostaert's hoofdwerk is.

Niet eens wordt Waagen's Mostaert-hypothese vermeld, noch dat men onzen Mostaert de door Glück bijeengebrachte werken toeschrijft. Het geheele artikel verraadt groote leemten in de kennis van onze Midden-Eeuwsche Hollandsche schilderkunst.

Ook blijkt nergens dat Dodt's archief geraadpleegd is. En waar tijdschriften en vervolgwerken soms zeer gewichtig materiaal bevatten is dit zoo goed als nooit gebruikt, b.v. een artikel over Cornelis van Reijnesburgh in Frimmel's Galerie-studiën, over Jilles Rombouts in het Repertorium für Kunstwissenschaft, over Constantijn à Renesse in Taurels Oud en Nieuw.

Waar verschillende oudere en nieuwere boeken enkele trekjes hadden kunnen leveren, die als onafhankelijke berichten juist zulk eene groote waarde hebben, is dit steeds verzuimd. Over Arent van Reynoy had schrijver iets kunnen vinden in Soutendam's Wandeling door Delft, over Jan Albertus van Riethoorn in de Noord-Holl. Oudheden, over Coenraad Roepel in Uffenbach's reisverhaal, enz. enz.

Waar hiervoor nog het ontbreken van een leiddraad door dergelijke literatuur als verontschuldiging zou kunnen worden aangevoerd, kan dit niet gelden voor boeken als: Bertelotti's Artisti belgi et olandesi, Walpole's Anecdotes of painting, enz, wier arbeid schrijver slechts ten goede is gekomen als hij dien vermeld vond in Nederlandsche werken.

Evenmin is te verontschuldigen het niet raadplegen van den catalogus Schwerin, een der hoofdhulpmiddelen bij onze schilderijen-studie, het althans onvoldoende gebruiken van de catalogi Cassel, van de Coll Czernin, Berlijn, Praag, Pommersfelden, Wurzburg, Coll. Harrach, Boeda-Pest, Dresden, enz

—

Deze arbeid getuigt van groot geduld en grooten ijver, maar aangezien het publiceeren daarvan, wegens zoo goed als volledig gebrek aan bronnen-studie, niet als eene verrijking van onze kunsthistorische literatuur kan worden beschouwd, meent het Genootschap *dien ook niet eene bekroning waardig te mogen keuren.*

# TABLE DES MATIÈRES.

Etudes sur les eaux souterraines des Pays-Bas, par Eug. Dubois.

La charge de contact entre une paroi poreuse et des solutions salines, par E. van der Ven.

Sur l'allure des courbes de plissement chez les mélanges de substances normales, et les équilibres possibles entre une phase gazeuze et une ou deux phases liquides, par J. J. van Laar.

La pluralité des périodes glaciaires dans les dépôts pleistocènes et pliocènes des Pays-Bas, par Eug. Dubois.

# FONDATION

DE

# P. TEYLER VAN DER HULST

## À HAARLEM.

---

**Directeurs.**

A. HERDINGH.
L. P. ZOCHER.
P. LOOSJES.
Mr. A. W. THÖNE.
J. J. VAN OORDE.

**Secrétaire.**

Mr. A. A. VAN DER MERSCH.

**Trésorier.**

P. DROSTE.

**Conservateur du Cabinet de Physique.**

Dr. E. VAN DER VEN.

**Conservateur du musée de Paléontologie et de Minéralogie.**

*Prof.* Dr. EUG. DUBOIS.

**Bibliothécaire.**

. . . . . .

**Conservateur des Collections de tableaux, de dessins et de gravures.**

H. J. SCHOLTEN.

**Conservateur du cabinet numismatique.**

Jhr. H. M. RIDDER BARONET SPEELMAN.

# MEMBRES DES SOCIÉTÉS TEYLERIENNES.

---

**De la première Société ou Société de théologie.**

*Prof.* Dr. S. CRAMER.
*Prof.* Dr. I. J. DE BUSSY.
Dr. J. G. BOEKENOOGEN.
*Prof.* Dr. D. E. J. VÖLTER.
Dr. A. C. DUKER.
Dr. H. J. ELHORST.

---

**De la seconde Société.**

Dr. E. VAN DER VEN.
H. J. SCHOLTEN.
J°. DE VRIES.
*Prof.* Dr. HUGO DE VRIES.
*Prof.* Dr. P. J. BLOK.
Dr. H J. DE DOMPIERRE DE CHAUFEPIE.

---

# ÉTUDES SUR LES EAUX SOUTERRAINES DES PAYS-BAS

PAR

EUG. DUBOIS

## II

## L'eau salée peut-elle envahir une prise d'eau dans les dunes?

Séparer le principal des détails dans les phénomènes et puis poser les questions aussi simplement que possible, voilà le chemin indiqué pour la recherche de tout nouveau problème, comme celui des conditions d'équilibre et des motions de l'eau douce et de l'eau salée dans les dunes. En regardant de trop près quelques-uns de ces détails, avant que l'oeil ait embrassé les traits généraux des phénomènes, on s'y embrouille. Voilà bien la raison principale par laquelle le problème en question est encore si obscure pour beaucoup.

D'après l'opinion encore trop en vogue notre connaissance sur l'eau douce souterraine des Pays-Bas, sur les côtes de la Mer du Nord, ne pourrait être mieux indiquée que par une variante de la célèbre sentence: „*nil luce obscurius*".

Cette opinion est erronée. Il est généralement admis, depuis longtemps, que l'eau souterraine découle, superficiellement, des régions élevées vers les régions basses. Les recherches hydrologiques des derniers temps, dans les dunes et dans les polders, nous ont appris qu'un même mouvement existe, jusqu'à des profondeurs considérables, en-dessous de ces inégalités de la surface. Ce mouvement en sens horizontal implique un mouvement vertical, et il est facile de comprendre que l'un ne peut pas exister sans l'autre.

Résumons, en quelques mots, l'état actuel de nos connaissances à ce sujet.

Qu'on se représente un bassin peu profond et fermé de tous les cotés; dans lequel l'eau souterraine est par conséquent en repos. Si l'on y place un certain nombre de puits tubés, munis d'un filtre à leur partie inférieure et allant jusqu'à des profondeurs différentes dans l'eau souterraine, on verra dans tous monter l'eau jusqu'à la même hauteur, hauteur correspondant avec le niveau supérieur de l'eau souterraine, tel comme il se présente dans toute fosse creusée.

Mais qu'on se représente une autre région, également à structure horizontale, dont le sous-sol est composé, à l'opposition avec les parties superficielles, non de sable fin et plus ou moins argileux, mais de sable grossier et graveleux. Dans ces derniers l'eau peut se mouvoir bien plus facilement. Des puits tubés semblables, placés dans une pareille région, l'un près de l'autre, laissent monter l'eau à des hauteurs différentes. Les niveaux seront considérablement inférieurs dans les puits dont la partie captante est placée dans le sable grossier que dans ceux qui captent l'eau dans les couches supérieures, où le mouvement est plus difficile. Cette différence devient insignifiante à des distances très considérables du côté de l'écoulement. Indiquant une différence de pression, elle est une conséquence du fait que l'eau ne découle pas seulement vers ce côté bas de la région, dans le sens horizontal, mais est aussi, pour ainsi dire, aspirée par le courant bien plus rapide dans le sable grossier du sous-sol. La différence de niveau, observée dans les puits, nous prouve un mouvement descendant de l'eau souterraine, accompagné d'un mouvement horizontal. Il va sans dire qu'en réalité ces deux mouvements sont combinés, et cela d'autant plus, à mesure que la différence de mobilité de l'eau est moins grande dans les différentes couches.

Qu'en dernier lieu, on se représente, à côté d'une telle région élevée, une autre, bien plus basse, mais dont le sol a d'ailleurs la même composition, et est également à stratification horizontale. L'eau souterraine découlera de la région élevée vers cette région basse, surtout dans le sous-sol grossier. Place-t-on des puits dans ce dernier et dans ce sol supérieur, formé de sable fin et argileux, on verra également ici une différence des niveaux de l'eau, mais en sens invers de celle dans la région élevée. Le niveau dans les puits profonds de la région élevée ne sera d'égale hauteur

à celui dans les puits peu profonds qu'à grande distance de la région basse, partout ailleurs il restera en-dessous. Dans la région basse, au contraire, le niveau sera beaucoup plus élevé dans tout puits profond que dans les puits moins profonds, il dépassera même la surface, comme si nous avions affaire à un puits artésien.

Toutefois un puits artésien est autre-chose. Il est produit par l'eau coulant entre deux couches *imperméables et inclinées*, d'une région plus élevée vers une région plus basse, jusqu'à de grandes distances. Généralement ces couches sont courbées en forme de bassin. En perforant la supérieure, aux environs du centre du bassin ou bien à un autre point bas, on voit l'eau jaillir, comme conséquence de la pression hydrostatique qu'elle doit aux parties plus élevées. Dans notre cas nous observons le même effet, mais la cause est différente. Ici c'est le sol supérieur lui-même qui, par suite de son imperméabilité *relative*, absorbe l'eau de pluie tombée dans les contrées plus élevées, et le pouvoir ascendant est bientôt épuisé. Dans le polder du Haarlemmermeer, par exemple, ce pouvoir diminue à mesure qu'on s'éloigne des dunes et des polders plus élevés, pour s'épuiser complètement à de grandes distances. De sorte que les deux niveaux se rejoignent à peu près. La ligne des niveaux des puits peu profonds ressemble à un S allongé et couché. Celle des puits profonds est beaucoup moins courbée, conflue presque avec les bouts de l'S couché et le coupe en son milieu, à la limite des deux régions d'inégale hauteur.

C'est là un des plus importants résultats des recherches hydrologiques pendant les dernières années, dans les dunes et les polders hollandais. En effet ces recherches ont prouvé l'existence d'un mouvement de l'eau simulant un vrai mouvement artésien. Mais celui-ci se produit en réalité sous une couche superficielle peu perméable, formée par des dépôts horizontaux, au-dessus desquels l'eau souterraine, par suite d'un entassement naturel de sable, est plus élevée dans l'un des terrains que dans l'autre.

La différence de niveau dans les puits profonds et peu profonds indique la composante verticale du mouvement de l'eau souterraine, tandis que la différence de niveau mutuelle des puits profonds indique la direction du mouvement en sens horizontal. En effet, en plaçant des puits forés jusque dans le sous-sol grossier, dans une rangée allant de la région plus élevée à la région basse, on verra l'eau monter à des hauteurs différentes. Une ligne oblique tirée de la région élevée vers la région basse et reliant les différents

niveaux; la direction dans laquelle cette ligne descend indiquera celle du mouvement de l'eau souterraine dans le sous-sol grossier. Rappelons nous l'illustration de ce principe par l'expérience représentée dans la fig. 2 de mon article antérieur. [1])

Or, ces régions imaginaires existent en réalité. La région la plus élevée représente les dunes, la region basse les polders et la mer, surtout les polders. De même, la constitution géologique supposée représente l'état réel, comme je l'ai décrit en détail dans mon article antérieur, auquel je me permets de renvoyer le lecteur.

Je dois toutefois insister sur le fait que l'existence de courants artésiens, venant du Sud ou de l'Est de notre pays, admise encore par M. REINIER D. VERBEEK, [2]) n'est nullement prouvée. Le mouvement ascendant de l'eau douce dans un puits sur la plage de Zandvoort en est aussi peu la preuve que le déversement du puits au Brouwers Kolkje près d'Overveen et d'autres puits forés dans le bassin de la distribution d'eau d'Alkmaar (dans les dunes près de Bergen), dans le bassin de la distribution d'eau de Leide (dans les dunes de Katwijk), et dans tout polder profond, à des distances pas trop grandes du bord. Que l'eau monte au-dessus du sol n'est qu'une conséquence nécessaire des conditions naturellement existantes que nous venons de décrire. Contre l'opinion de M VERBEEK on peut encore opposer l'exemple d'une vessie pleine de liquide et si perméable qu'étant soumise à quelque pression elle laisse transsuder ce liquide sur toute sa surface, ou bien d'une vessie qui se gonfle par imbibition; de laquelle le liquide jaillira si l'on y fait une piqure.

Une autre circonstance de grande importance pour l'état de l'eau souterraine dans les dunes et polders de la Hollande est la présence d'eau salée en-dessous de l'eau douce. Il est bien etabli aujourd'hui que, d'après le principe trouvé, en 1887, par M. BADON GHYBEN et retrouvé, en 1901, par M. HERZBERG, l'eau salée imbibant, jusqu'à des grandes profondeurs, notre sol, constitué principalement de sables, ne se mêle presqu'absolument pas avec l'eau douce en-dessous, mais se trouve avec cette dernière dans un état d'équilibre hydrostatique. En effet, dans une couche d'eau douce, reposant à l'état libre sur de l'eau salée, la diffusion de cette dernière ne se fait déjà que très lentement; cette diffusion est

---

[1]) Archives, Série II, Tome IX. Haarlem 1904.

[2]) Artesisch drinkwater voor Amsterdam en 's Gravenhage. Haarlem 1905.

presque nulle quand ces deux liquides sont enfermés dans les interstices capillaires de sable. D'autre-part le sable fin des dunes retient assez l'eau de pluie qui s'y infiltre, pour qu'elle puisse s'y accumuler considérablement au-dessus du niveau de la mer. C'est ainsi qu'elle déprime l'eau de mer en-dessous, dans la proportion de 40 à 1, en chiffre rond.

M. le Dr. G. Romijn, à Bois-le-Duc, a eu la bonté de me rappeler que Darwin, dans sa description de voyage, qui parut déjà en 1838, mentionne que l'eau douce sur l'Ile des Cocotiers monte et s'abaisse avec les marées. Le grand naturaliste explique correctement le phénomène comme la conséquence de ce que l'eau de pluie, imbibant la roche poreuse de corail comme une éponge, déprime l'eau de mer. Mais Darwin se trompait, en supposant que l'eau douce descendrait *au niveau de la mer* et remplacerait un *volume égal* d'eau salée.

Le diagramme ci-jointe sert à donner une idée générale des conditions hydrologiques des dunes, du polder du Haarlemmermeer

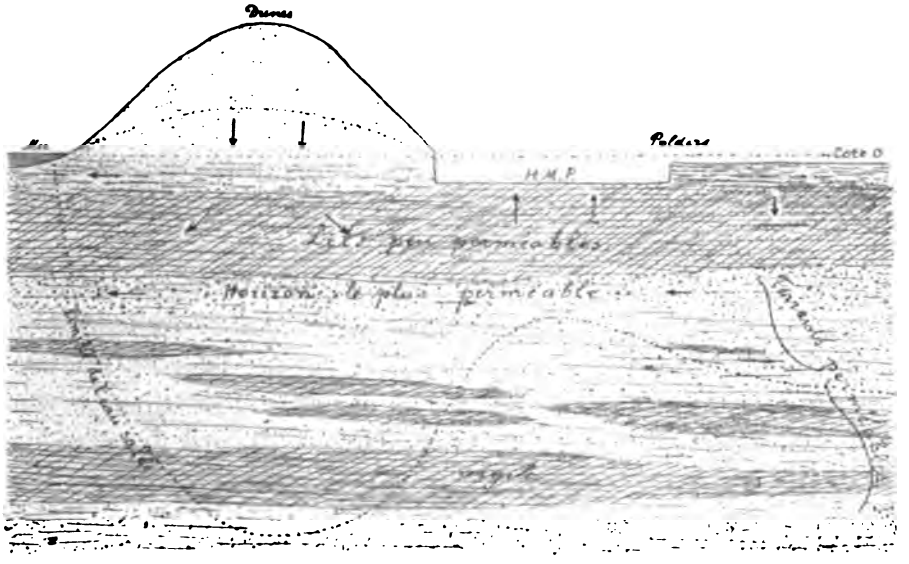



Fig. 1.

et des polders peu profonds à l'autre bord de ce dernier, d'après les connaissances actuellement acquises. La courbure de la ligne des niveaux des puits profonds et de la ligne de limite de l'eau salée est très exagérée dans cette figure, en conséquence de l'échelle exagérée de toutes les dimensions horizontales Les couches „alluviales", peu perméables, qui ont été figurées comme un ensemble, ne devraient y occuper qu'une épaisseur d'un quart de millimètre,

dans la proportion naturelle. La couche de sable très grossier, immédiatement sous-jacente, est spécialement indiquée, à cause de sa distribution régulière. Il importe de bien remarquer l'épaisseur minime de la couche peu perméable, relativement à son étendue, sa disposition horizontale et de ne pas oublier que l'eau de la surface est, pour ainsi dire, aspirée en-dessous de cette couche par le courant d'eau qui se meut mille fois plus facilement dans les sables grossiers du Diluvium. On comprendra aisément que cette couche peu perméable peut laisser passer dans les derniers presque la totalité de l'eau de pluie, qui, annuellement, s'infiltre dans le sable des dunes. Ce n'est que vers le bord des dunes que, par-ci-par-là, quelque eau peut découler *au-dessus* de la couche peu perméable.

Or, il y a quelques années, on nous a fait peur en prétendant un danger qui découlerait justement de la „théorie de HERZBERG". On vient de répéter cet avertissement en termes expres [1])

Mais, comme nous verrons dans la suite, ce danger imaginaire n'est que la conséquence d'idées obscures sur cette „théorie". De plus on n'a pas tenu suffisament compte, dans son application, d'autres circonstances, spécialement d'ordre géologique.

À la suite de cette „théorie" l'eau de mer, dans le sous-sol des dunes, monterait dans une prise d'eau en proportion de 40 fois l'abaissement subi par l'eau douce. L'on pensait qu'un tel déficit devrait nécessairement se produire dans la prise d'eau d'Amsterdam, si le captage artificiel et le découlement vers le polder du Haarlemmermeer ne seraient pas balancés par l'eau tombée qui s'infiltre annuellement dans le terrain de la prise d'eau. Il devrait se produire aussi bien à la suite d'un captage d'eau en-dessous de la couche peu perméable qu'au-dessus de celle-ci. Ce déficit, pensa-t-on, ne pourrait être compensé que par l'eau salée.

Afin de mettre en évidence ce qu'il y a d'erroné dans cette manière de voir, je prie le lecteur de fixer son attention sur le système de vases communicants dans notre fig. 2.

Les deux vases Z et Z′ représentent la mer et sont remplis de liquide lourd (eau). Dans les vases D et d, représentant les dunes, et spécialement d une prise d'eau dans les dunes, on verse un

---

[1]) J. M. K. PENNINK, De prise d'eau der Amsterdamsche duinwaterleiding. [Tijdschrift van het Kon. Instituut van Ingenieurs. Verhandelingen], pgs. 184—238, avec 18 planches. 's-Gravenhage 1904.

liquide plus léger (huile). Les vases Z, d, D et Z′ sont munis de tubes trans versaux, d'égale diamètre, qui les mettent en communication, aussi bien au-dessus des niveaux de contact des deux liquides qu'endessous.

Si l'on se figure d'abord les tubes w et w′ fermés, on verra se produire l'équilibre selon le principe de Badon Ghyben. Le poids spécifique du liquide lourd (eau) étant $1^1/_8$ celui du liquide léger (huile), le niveau libre de ce dernier, dans les vases d et D, doit être à la hauteur *h* au-dessous du niveau libre du liquide lourd, si celui-ci y est déprimé d'une hauteur 8 *h* sous son niveau libre. Il faut prendre les vases Z et Z′ très larges ou, mieux encore, il faut suppléer à toute perte qu'ils subiraient, en conséquence d'une diminution du liquide léger des vases d et D, de sorte que le niveau dans les vases Z et Z′ (représentant la mer) est maintenu constant.

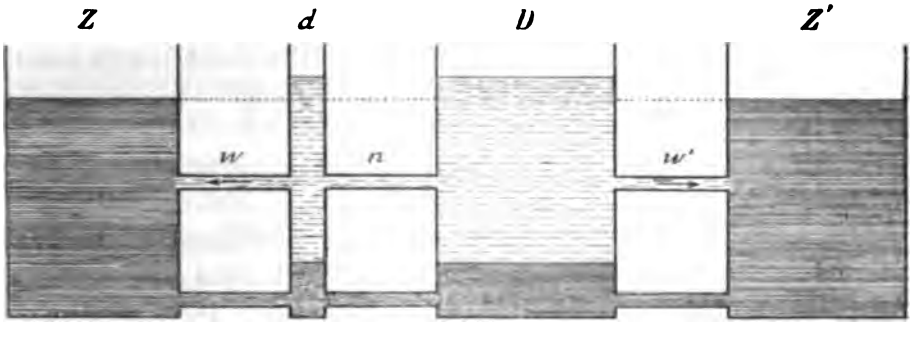



Fig. 2.

Fermons encore la communication n et enlevons de d une partie de l'huile, occupant la hauteur, de 9 millemètres en d. Il s'établira en ce vase un nouvel état d'équilibre avec le liquide lourd dans Z, de telle manière que le niveau de contact des deux liquides dans d montera 8 millimètres et le niveau libre du liquide léger s'abaissera de 1 millimètre.

Si à présent nous rouvrons la communication n nous observerons que le liquide lourd en d s'abaissera presque à son niveau antérieur, si le vase D est très large en comparaison de d ; il n'aura absolument pas monté, si nous prenons soin de tenir le niveau libre du liquide dans D à la même hauteur par un supplément équivalant la perte de d. L'équilibre détruit se rétablit, complètement ou presque complètement, le statu quo se maintient par le liquide écoulant de D à d, tandis que le liquide lourd reste complètement ou presque complètement à son niveau antérieur.

Nous voyons donc que ce n'est pas le liquide lourd, mais le liquide léger qui a la fonction de rétablir l'équilibre détruit dans ce dernier. Ceci est une conséquence naturelle de ce que le liquide leger en d forme avec celui en D un système *supérieur* de vases communicants, pour lequel le liquide lourd dans l'autre système (inférieur) n'est que le fond ou une partie des parois. Or, d'après le principe des vases communicants, leur forme est indifférente.

Nous pouvons déduire de l'expérience décrite la règle suivante.

Que le poids spécifique du liquide lourd soit de $1 + \frac{1}{p}$ fois celui du liquide léger. (Dans le cas de l'huile, en équilibre hydrostatique avec de l'eau, $p$ est égal à 8, dans le cas d'eau douce avec de l'eau de mer environ 40). Que la proportion des sections des deux vases à liquide léger soit $n$.

Si on enlève du vase étroit d une colonne de liquide léger, de la hauteur $h$ et qu'on laisse se rétablir, dans les vases D et d, l'équilibre hydrostatique du liquide léger, ils auront perdu ensembles une colonne de liquide léger de la hauteur.

$$\frac{h}{n+1}$$

Après que l'équilibre hydrostatique s'est rétabli entre le liquide léger dans ces deux vases et le liquide lourd dans les vases Z et Z′ (maintenu à niveau constant en y suppléant le liquide nécessaire) le niveau de contact des deux liquides en d est monté de

$$\frac{h}{n+1} \times \frac{p}{p+1}$$

et le niveau libre du liquide léger s'est abaissé de

$$\frac{h}{n+1} \times \frac{1}{p+1}$$

Il faut donc que de D à d il se soit déplacé une colonne de liquide léger, occupant en d la hauteur.

$$h - \frac{h}{n+1} \times \frac{p}{p+1} - \frac{h}{n+1} \times \frac{1}{p+1}$$

En même temps il faut qu'il se soit déplacé de Z à d une colonne de liquide lourd, occupant en d la hauteur

$$\frac{h}{n+1} \times \frac{p}{p+1}$$

On trouve ainsi. que les quantités des liquides leger et lourd qui se sont déplacées à d sont dans le rapport de

$$\left(n + \frac{n}{p}\right) \text{ à } 1$$

Ce résultat appliqué au dunes démontre le principe suivant:

Toute perturbation de l'équilibre hydrostatique naturel entre l'eau de mer et une nappe d'eau douce, non suffisament alimentée par l'eau de pluie, en conséquence d'un captage local d'une partie de cette eau douce, ne pourra se rétablir que par un déplacement vers la région de pression diminuée, d'au moins autant de parties d'eau douce, contre une partie d'eau de mer, que la superficie de cette région à dépression hydrostatique est contenue dans la superficie restante de la nappe d'eau douce Dans le cas que la quantité de l'eau douce serait effectivement illimitée, par suite d'une alimentation par l'eau de pluie, équivalant le captage local de la nappe, l'état d'équilibre resterait invariable.

Afin de nous rapprocher autant que possible, par l'expérience, des conditions naturelles, nous avons à ouvrir aussi les communications w et w'. En effet, ce que nous savons de la structure géologique du sous-sol des dunes et des polders nous oblige d'admettre qu'en général l'eau peut s'y mouvoir dans une direction horizontale aussi bien que dans l autre, tandis que cette mobilité dans des plans horizontaux différents, par suite de cette même structure, plus ou moins horizontale, est très différente De plus, toutes les communications entre les quatre vases ne devront pas être des tubes simples, mais des faisceaux de tubes capillaires, (imitant les interstices du sable), dans chacune de ces communications à nombre égal. Dans une imitation parfaite il devrait y avoir des tubes communicants capillaires sur toute la hauteur de nos vases, mais un faisceau au-dessus et un autre au-dessous de la base du liquide léger suffisent à la démonstration principielle.

Évidemment dans les communications w et w' il devra exister, sur toute la hauteur du liquide léger, des courants dirigés de d et D vers Z et Z'. C'est là une conséquence nécessaire du principe de Badon Ghyben, selon lequel seulement en-dessous de la base du liquide léger il y a équilibre hydrostatique, au-dessus l'équilibre est dynamique. Dans ces circonstances il sera superflu d'insister sur l'impossibilité d'une invasion de la mer, soit de côté soit d'en bas, dans une prise d'eau, tant qu'il y existe encore un surplus de pression de l'eau douce entre les points du captage et la mer.

Certes, il pourrait se former des „cônes d'éruption" au-dessous des puits, si l'on allait les placer très proche de l'eau salée inférieure. Mais une telle manière d'agir n'a pas de raison d'être, où, à 30 mètres sous le zéro d'Amsterdam, on est déjà bel et bien dans la grande „veine d'eau" et a encore 30 à 50 mètres d'eau douce en-dessous. Le danger pour une telle répression dynamique de la grande puissance naturelle de l'eau douce de tenir subjugée l'eau salée, répression qui pourrait résulter d'un captage trop excessive, est d'ailleurs assez minime. Le mouvement que l'on peut donner à l'eau souterraine à la suite du pompage est pour cela bien trop lent, déjà à des distances médiocres du puits. D'après les données existantes on peut calculer qu'avec une dépression artificielle du niveau dans un puits, de 3 mètres, l'eau coulant vers ce puits n'atteindra qu'une vitesse de moins de $^1/_{150}$ *millimètre par seconde*, à 30 mètres de distance horizontale du puits et de moins de $^1/_{1000}$ *de millimètre par seconde*, à 200 mètres de distance

Ce sont des vitesses de la même ordre de grandeur que les vitesses naturelles, qui certainement ne suffisent pas à franchir les limites établies par la nature entre l'eau salée et l'eau douce.

Un captage de l'eau douce au-dessus de la couche „alluviale" peu perméable, serait il capable de former un grand cône d'eau salée, à la suite d'une dépression hydrostatique locale?

Évidemment un tel cône pourrait se former dans un sol *homogène* d'argile et de sable fin. Dans les conditions géologiques données la production de ce cône est impossible, parce que l'eau douce des environs peut se mouvoir facilement dans le sable grossier en-dessous. Cette eau douce, en effet, dans tous les horizons, est sous une pression *supérieure* à celle de l'eau salée. Qu'on se rapelle les flèches dans notre seconde figure. Ce n'est qu'avec une dépression *générale* de l'eau souterraine, dans toute la région des dunes, que l'on aurait à craindre un envahissement de l'eau salée, à la suite d'un captage au-dessus des couches peu perméables de l'„Alluvium". Et nous savons que le régime naturel de la nappe douce des dunes est tellement puissant, qu'il ne serait pas facile à y produire une dépression générale.

Haarlem, Février 1906.

# LA CHARGE DE CONTACT ENTRE UNE PAROI POREUSE ET DES SOLUTIONS SALINES

PAR

E. VAN DER VEN.

## I.

Dans sa séance du 5 Octobre 1903 [1]) l'Académie des Sciences reçut une Note de M. JEAN PERRIN, dans laquelle ce savant lui fait part des résultats de ses dernières recherches sur la manière, dont la charge électrique, que prend un solide par son contact avec un liquide, est déterminée et modifiée par des ions différents.

En résumant ce qui lui a paru sur cette matière il dit, en indiquant par cela la méthode par lui suivie:

„L'osmose électrique donne un moyen facile d'étudier la „charge de contact entre un solide quelconque et un liquide".

Que ceci n'est pas seulement le cas pour ce qui regarde des études du genre de celles de M. PERRIN, mais qu'il vaut encore s'il s'agit d'instituer un *examen quantitatif des variations que la charge de contact subit, quand une paroi poreuse vient en contact avec des solutions salines de nature différente*, cela paraîtra, je l'espère, des considérations suivantes.

La force, qui occasionne le transport des liquides par le courant electrique, souvent appelé, dans un sans figuré. osmose électrique", a son origène dans l'action réciproque entre la différence de potentiel $\Delta V$, qui, dans la direction du courant, existe des deux cotés de la paroi poreuse, et la charge électrique $E$ du liquide contenu dans les pores de cette paroi, charge égale et de signe contraire à celui de la charge de contact entre elle et le liquide

[1]) *Comptes rendus*, T. XXXVII, p. 513.

environnant. Si, comme de coutume, nous prenons $\Delta V$ *positif* dans la direction de l'anode vers la kathode, alors le liquide, contenu dans les pores, sera poussé dans la même direction ou attiré dans la direction opposée, selon que sa propre charge est $+ E$ ou $- E$, celle de la charge de contact $- E$ ou $+ E$.

Donc, si l'on connait la quantité d'un liquide qui, dans un temps donné, est poussé, par un courant d'intensité donnée, par une paroi de surface et d'epaisseur connues, si puis on détermine expérimentalement la quantité de ce liquide que, dans un temps égal, une force donnée pousse par la même paroi, on disposera des données nécessaires pour pouvoir déterminer la valeur de la force $E \Delta V$.

Pourtant, avant de procéder à cette détermination nous voulons tâcher d'exprimer la quantité de liquide, transportée dans des circonstances données, dans les variables dont elle dépend.

Pour y parvenir nous partons de l'équation

$$Q = N \frac{S m^4}{l} \ldots . 1$$

dans laquelle M. Poiseuille à exprimé la manière dont, selon ses recherches vraiment admirables [1]), la quantité $Q$ d'un lipuide qui, dans un temps, donné est poussée, au moyen d'une pression connue par un tube capillaire, dépend de sa longueur $l$ et de son diamètre $m$, et dans laquelle $N$ est un coëfficient qui varie avec la température, la viscosité du liquide et avec son adhésion à la matière dont le tube est construit.

En faisant ainsi nous considérons la paroi poreuse comme perforée d'un nombre extrèmement grand de tubes capillaires horizontales, dont la longueur, égale à l'épaisseur moyenne de la paroi ($\pm$ 4 m.M) est assez grande pour y appliquer l'équation de M. Poiseuille. [2])

Si nous substituons dans l'équation (1) à S la force $\varepsilon \Delta V$, que transporte le liquide par une des pores, et à $l$ l'épaisseur $d$ de la paroi, elle devient

---

[1]) La traduction d'un rapport détaillé de ces recherches, des mains de M. M. Arago, Babinet, Piobert et Regnault a paru dans *Poggend. Ann.*, V. LVIII, p.p. 424–448.

[2]) *Poggend Ann.*, V. LVIII, p. 431.

„Eine Röhre von 0.029$^{mm}$ Durchmesser folgte dem Gezetz, als sie nur 2.10$^{mm}$ lang war."

$$t = N\,\varepsilon\,\frac{\Delta V m^4}{d}, \ldots 2$$

forme sous laquelle elle représente la quantité $t$ de liquide qui, dans l'unité de temps, est transportée par chaque pore individuelle de la paroi et dans laquelle $\varepsilon$ est le nombre d'unités électriques dont est chargé le liquide contenu dans cette pore.

Appellons maintenant $I$ l'intensité du courant transportant, $n$ le nombre des pores, $k$ le coëfficient de conductibilité électrique du liquide, alors

$$\Delta V = \frac{I}{n} \cdot \frac{d}{k m^2} \ldots . 3$$

sera la valeur de la différence potentielle des deux cotés de la paroi, prise dans la direction d'un filet de courant.

En substituant cette valeur dans l'équation (2) elle devient

$$t = N\varepsilon\,\frac{I}{n} \cdot \frac{d}{k m^2} \cdot \frac{m^4}{d} = N\varepsilon\,\frac{I}{n} \cdot \frac{m^2}{k}$$

de sorte que

$$T = N E I\,\frac{m^2}{k}. \ldots 4$$

sera la valeur de la quantité de liquide, transportée dans l'unité de temps par toutes les pores à la fois; valeur dans laquelle $E$ représente le nombre d'unités d'electricité, dont toute la surface est chargée.

Dans cette équation la quantité de liquide transportée semble dépendre du diamètre moyen $m$ des tubes capillaires d'une manière différente de celle, dont elle en dépend dans la formule de M. Poiseuille Pourtant cette différence n'est qu'apparente, parcequ'en effet elle resulte de ce que dans le cas actuel la force $S$ est remplacée par une force, qui elle-même est la réciproque du carré de ce diamètre.

Il paraît de l'équation (4) que, si notre supposition quant à la nature de la force transportante sera conforme à la réalité, *la quantité transportée devra être indépendante, et de l'épaisseur de la paroi, et de l'étendue de sa surface.*

Ce fait a déjà été signalé par M G. Wiedemann [1]) et il paraît de nouveau clairement des recherches suivantes.

[1]) *Poggend Ann.*, V. LXXXVII, p. 233—236.

$C_u\ SO_4$.

20 parties de sel sur 100 parties d'eau.

$I = 2$ amp.

Hauteur de la vase poreuse: 16 cM.
Volume „ „ „ „ : 405 cM³.

## 1. Le manteau de la vase poreuse transporte sur toute sa surface; le fond seul est verni.

| | | | | | | | | En 10 minutes. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | Gouttes. | | Gouttes. | | Grammes. |
| 9h. | 0m. | 0s. | — | 9h. | 10m. | 14s. | 25 | = | 24 43 | = | 2.443 |
| | 10 | 14 | | | 20 | 5 | 24 | | .37 | | 37 |
| | 20 | 5 | | | 30 | 15 | 25 | | .59 | | 59 |
| | 30 | 15 | | | 40 | 13 | 25 | | 25.08 | | .508 |
| | 40 | 13 | | | 50 | 11 | 25 | | .08 | | 08 |
| | 50 | 11 | | 10 | 0 | 8 | 25 | | .13 | | 13 |
| 10 | 0 | 8 | | | 10 | 4 | 25 | | .17 | | 17 |
| | 10 | 4 | | | 20 | 0 | 25 | | .17 | | 17 |
| | 20 | 0 | | | 30 | 18 | 26 | | .26 | | 26 |
| | 30 | 18 | | | 40 | 4 | 25 | | .60 | | 60 |
| | 40 | 4 | | | 50 | 12 | 26 | | .66 | | 66 |
| | 50 | 12 | | 11 | 0 | 17 | 26 | | .79 | | 79 |
| | | | | | | | 302 | | | | |

Poids de 302 gouttes ... 31.09 gr.
„ d'une goutte ..... 0.10 „

Corrections, selon les formules $n - \frac{v}{V} \cdot \frac{n^2}{2}$ et $x = \frac{9-p}{n-1}$ [1])

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | — ( 2.443 : 435 ) . $\frac{1}{2}$ | = 0.997 × 0.013 gr. | = 0.013 gr. |
| 2 | ( 37 ) . $\frac{4}{2}$ | 1.989 | 26 „ |
| 3 | ( 59 ) . $\frac{9}{2}$ | 2.970 | 39 „ |
| 4 | ( .508 ) . $\frac{16}{2}$ | 3.953 | 51 „ |
| 5 | ( 08 ) . $\frac{25}{2}$ | 4.926 | 64 „ |
| 6 | ( 13 ) . $\frac{36}{2}$ | 5.894 | 77 „ |
| 7 | ( 17 ) . $\frac{49}{2}$ | 6.855 | 89 „ |
| 8 | ( 17 ) . $\frac{64}{2}$ | 7.811 | .102 „ |
| 9 | ( 26 ) . $\frac{81}{2}$ | 8.753 | 14 „ |
| 10 | ( 60 ) . $\frac{100}{2}$ | 9.699 | 26 „ |
| 11 | ( 66 ) . $\frac{121}{2}$ | 10.634 | 38 „ |
| 12 | ( 79 ) . $\frac{144}{2}$ | 11.563 | 50 „ |

Transp. par pression hydrostatique: 0.589 gr.

$$x = \frac{2.579 - 2.443}{11.563 - 0.997} \text{ gr.} = 0.013 \text{ gr.}$$

[1]) *Arch. Teyler*, S. II, V. VIII, p.p. 99 et 105.

| Transport observé. | Corrections. | Transport reél. |
|---|---|---|
| 2.443 gr. | —0.013 gr. | = 2.430 gr. |
| 37 „ | 26 „ | 11 „ |
| 59 „ | 39 „ | 20 „ |
| 508 „ | 51 „ | 57 „ |
| 08 „ | 64 „ | 44 „ |
| 13 „ | 77 „ | 36 „ |
| 17 „ | 89 „ | 28 „ |
| 17 „ | 102 „ | 15 „ |
| 26 „ | 14 „ | 12 „ |
| 60 „ | 26 „ | 34 „ |
| 66 „ | 38 „ | 28 „ |
| 79 „ | 50 „ | 29 „ |

Transport par le courant en 2 heures: 29.144 gr.

## 2. Le fond et la moitié inférieure de la vase poreuse de sa surface sont vernis; la moitié superieure seule transporte.

| Durée de l'écoulement. | | | | | | Gouttes. | Gouttes. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h. | 0m. | 0s. | — | 9h. 10m. | 6s. | 24 | 23.76 | en 10 min. |
| | 10 | 6 | | 20 | 12 | 24 | .76 | „ |
| | 20 | 12 | | 30 | 0 | 23 | .47 | „ |
| | 30 | 0 | | 40 | 6 | 24 | .76 | „ |
| | 40 | 6 | | 50 | 11 | 24 | .80 | „ |
| | 50 | 11 | | 10 0 | 3 | 23 | .31 | „ |
| 10 | 0 | 3 | | 10 | 14 | 24 | .57 | „ |
| | 10 | 14 | | 20 | 1 | 23 | .51 | „ |
| | 20 | 1 | | 30 | 8 | 24 | .72 | „ |
| | 30 | 8 | | 40 | 8 | 24 | 24.00 | „ |
| | 40 | 8 | | 50 | 10 | 24 | 23.92 | „ |
| | 50 | 10 | | 11 0 | 6 | 24 | 24.15 | „ |
| | | | | | | 285 gouttes. | 284.73 gouttes en 2 heures. | |

Poids de 285 gouttes.... 31.34 gr.
„ d'une goutte..... 0.11 „

Ici le transport a été assez constant pendant les deux heures; pendant la dernière demi-heure seulement, quand la différence entre les poids spécifiques en dehors et en dedans de la vase a atteint son maximum, l'influence de la pression hydrostatique se fait valoir. Comme les couches inférieures seules exercent une pression de

quelque importance sur la face extérieure de la paroi poreuse, il était à prévoir en ayant égard à la petite profondeur — 8 cM. — de la surface non vernie, que cette influence serait a peu près nulle pendant la plus grande partie du transport.

Si nous ne tenons compte que de la pression hydrostatique qui se montre pendant les dernières 30 minutes, en supposant que dans ce temps le transport a monté uniformement, alors la valeur totale du transport par cette pression est

$$^1/_3\ (24\ 15 - 23.72)\ (1 + 2 + 3) \text{ gouttes} = 0.86 \text{ gouttes}$$

ou

$$0.86 \times 0.11 \text{ grammes} = 0.095 \text{ grammes}$$

et celle par le courant seul

$$284.73 \times 0.11 \text{ gr.} - 0.095 \text{ gr.} = 31.23 \text{ gr. en 2 heures}$$

## 3. Le fond de la vase poreuse et la moitié inférieure du manteau sont vernis; la moitié supérieure du manteau est émoulue jusqu'à la moitié de son épaisseur.

| Durée de l'écoulement. | | | | | | | Gouttes. | | En 10 minutes. Gouttes. | | Grammes. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h. | 0m. | 0s. | — | 9h. | 10m. | 13s. | 23 | = | 22.51 | = | 2.701 |
| | 10 | 13 | | | 20 | 14 | 23 | | .96 | | 55 |
| | 20 | 14 | | | 30 | 14 | 23 | | 23.00 | | 60 |
| | 30 | 14 | | | 40 | 8 | 23 | | .23 | | 88 |
| | 40 | 8 | | | 50 | 0 | 23 | | .31 | | 97 |
| | 50 | 0 | | 10 | 0 | 6 | 24 | | .76 | | 851 |
| 10 | 0 | 6 | | | 10 | 3 | 24 | | 24.12 | | 94 |
| | 10 | 3 | | | 20 | 0 | 24 | | .12 | | 94 |
| | 20 | 0 | | | 30 | 21 | 25 | | .15 | | 98 |
| | 30 | 21 | | | 40 | 23 | 25 | | .92 | | .990 |
| | 40 | 23 | | | 50 | 16 | 25 | | 25 30 | | 3.036 |
| | 50 | 16 | | 11 | 0 | 6 | 25 | | .42 | | 50 |
| | | | | | | | 287 gouttes. | | | | 34.414 gr. |

Poids de 287 gouttes .... 24.62 grammes.
„ d'une goute .... . 0.12 „

Corrections.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | — ( 2.701 : 435 ) . | $\frac{1}{2}$ | = 0.997 × 0.033 gr. | = 0.033 gr. |
| 2 | ( 55 ) . | $\frac{4}{2}$ | 1.987 | 66 „ |
| 3 | ( 60 ) . | $\frac{9}{2}$ | 2.971 | 98 „ |
| 4 | ( 88 ) . | $\frac{16}{2}$ | 3.948 | 130 „ |
| 5 | ( 97 ) . | $\frac{25}{2}$ | 4.920 | 62 „ |
| 6 | ( 851 ) . | $\frac{36}{2}$ | 5.879 | 94 „ |
| 7 | ( 94 ) . | $\frac{49}{2}$ | 6.833 | 225 „ |
| 8 | ( 94 ) . | $\frac{64}{2}$ | 7.782 | 57 „ |
| 9 | ( 98 ) . | $\frac{81}{2}$ | 8.724 | 88 „ |
| 10 | ( 990 ) . | $\frac{100}{2}$ | 9.648 | 318 „ |
| 11 | ( 3.036 ) . | $\frac{121}{2}$ | 10.568 | 49 „ |
| 12 | ( 50 ) . | $\frac{144}{2}$ | 11.483 | 79 „ |
| | | | | 2.500 gr. |

$$x = \frac{3.05 - 2.70}{11.483 - 0.997} \text{ gr.} = 0.033 \text{ gr.}$$

Donc nous avons:

| | |
|---|---|
| Transport total en 2 heures..... | 34.414 gr. |
| „ par la pression hydrostatique.. | 2.500 „ |
| „ par le courant seul..... | 31.914 gr. |

Il était à prévoir que dans ce cas le transport par la pression hydrostatique serait beaucoup plus grand que dans le cas précédent, quand la moitié de la surface avait encore son épaisseur originale. Observons cependant que, dans ce cas comme dans le cas précedent, l'accroissement de l'influence de cette force sur le transport pendant la dernière demi-heure — 0.952 grammes — surpasse de beaucoup celui — 0.197 grammes — des 90 minut s précédentes.

En résument les résultats des trois parties de l'examen il paraît que:

si le transport se fait par toute la surface du cilindre il transporte 29.144 grammes en 2 heures;

s'il ne se fait que par la moitié supérieure: 31.230 grammes et, si cette moitié n'a que la moitié de son épaisseur originale: 31.914 grammes.

D'où il suit, en ayant égard aux erreurs qui adhèrent aux expériences de ce genre, que

**ni l'étendue de la surface transportante, ni son épaisseur sont d'influence aucune sur la quantité de liquide transportée par le courant dans un temps donné.**

Revenons à présent à la détermination de la force qui, dans une heure, occasionne le transport de la quantité de liquide $T$.

En premier lieu il faudra pour cela déterminer expérimentalement cette quantité, suivant la méthode que nous avons suivie en la déterminant pour une quinzaine de solutions salines. [1])

Ensuite, pour déterminer la quantité $Q$ du même liquide, qu'une force donnée pousse dans le même temps par la paroi de la même vase poreuse, nous nous sommes servis comme telle de la pression hydrostatique latérale qu'une colonne de ce liquide, qui remplit la vase jusqu'à l'axe du tube d'écoulement, à présent bouché, exerce sur sa surface. En faisant ainsi il faudra avoir soin que non seulement pendant toute la durée de l'épreuve la vase reste remplie jusqu'à cette axe, mais aussi que son fond soit verni, aussi bien pendant la détermination de $Q$ que de celle de $T$. Car, comme il est vraisemblable que ce fond, si toutefois il prend part au transport par le courant, y prend part d'une manière abnormale, il est à propos que dans les deux cas on supprime la porosité du fond.

Les quantités $T$ et $Q$ étant ainsi affectées de la même manière par les effets de la viscosité du liquide et de son adhesion à la matière, dont la vase est construite, et la température de la chambre étant maintenue pendant l'examen entre des limites réserrées, la valeur de la force transportante sera donnée par l'équation

$$x = \frac{T}{Q} \cdot s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5$$

## Détermination de $T$.

Le poids $T$ du liquide, *transporté par ampère-heure*, a été déterminé de la manière connue.

Toutes les solutions étaient également concentrées; elles contenaient *cinq parties de sel sur 100 parties d'eau déstillée.*

---

[1]) *Archives Teyler*, S. II, V. VIII et IX, *passim.*

Les résultats des recherches sont rassemblés dans le tableau suivant, dans lequel les signes + et — indiquent la direction du transport, qui est prise positive quand le liquide est transporté de l'anode vers la kathode. [1])

| Noms des solutions. | Direction du transport | Poids transportés par ampère-heure. |
|---|---|---|
| Sulfate de cuivre | + | 19.375 gr. |
| Azotate de cuivre | — | 6.750 „ |
| Sulfate de zinc | + | 20 835 „ |
| Azotate de zinc | - | 8.575 „ |
| Chlorure de zinc | - | 2.605 „ |
| Azotate de plomb | — | 22.525 „ |
| Acétate de plomb | — | 92.50 „ |
| Sulfate de nickel | + | 19.150 „ |
| Azotate de nickel | — | 6.500 „ |
| Chlorure de nickel | — | 7.075 „ |
| Sulfate ferreux | + | 25.650 „ |
| Sulfate ferrique | + | 22.605 „ |
| Azotate de fer | -- | 21.175 „ |
| Chlorure ferrique | -- | 6.775 „ |

L'on voit de ce tableau que des solutions examinées *celles des sulfates seules sont poussées dans la direction du courant, tandisque celles des azotates* [2]) *et des chlorures*, aussi bien que celle de l'acétate de plomb, *sont attirées dans la direction opposée.*

D'où il suit que les filets de liquide, compris dans les pores des vases, sont chargés *positivement* par les solutions-là, *négativement* par les solutions-ci et que, par conséquent, *la charge de con-*

---

[1]) Pour les détails de ces recherches l'on voie *l'Appendice I*, page 99.

[2]) En comparant le résultat concernant les solutions de l'azotate de cuivre à celui obtenu ailleurs (*Archives Teyler*, VIII, p. 293) on verra qu'alors nous avons constaté un transport *positif* de 11.9 grammes par ampère pour une solution, qui contient 1 gramme de sel sur 100 grammes d'eau, correspondant à un transport de 2.88 grammes d'une solution de la concentration de celle, dont je me suis servi pour les recherches actuelles.

Cette contradiction m'a porté à réprendre les épreuves en me servant de vases poreuses de cuites différentes, qui toutes ont conduit à un résultat conforme à celui cité dans le tableau.

Je présume que la matière, dont était construite la vase poreuse qui a donné lieu à un résultat opposé, n'a pas été neutre ou, du moins, pas assez pure, pour ne pas changer le signe de son ionisation par le contact avec une solution d'azotate de cuivre, ionisation qui dans les deux cas n'a qu'une valeur exigue.

*tact de la paroi poreuse elle-même a, dans les deux cas, le signe contraire.*

## Détermination de $Q$ et de $S$.

La détermination de ces deux valeurs est des plus simples. Comme $S$ est la pression latérale de la solution qui remplit la vase jusqu'à la hauteur de l'axe du tube d'écoulement bouché, $Q$ le poids du liquide que cette pression pousse dans une heure par la paroi, nous n'avons qu'à effectuer les manupulations et les calculs, qui mènent à la connaissance de ces valeurs, avec l'exactitude nécessaire. Pour cela nous avons, entre autres, apporté au bord de la vase une flèche, dont la pointe était, *pendant trois heures*, tenue en contact avec le niveau du liquide. Aussi chaque vase fut remplie le soir précédent aux épreuves, de sorte que sa paroi était toute imbibée de liquide au moment où celles-ci commencèrent.

En voici les résultats.

| Noms des solutions. | Diam. int. des vases. | Hauteur des liq. | Poids spéc. des liq. | $S$ | $Q$ (par heure) |
|---|---|---|---|---|---|
| Sulfate de cuivre... | 6.8 cM. | 14.5 cM. | 1.0305 | 2313.1 gr. | 7.41 gr. |
| Azotate de cuivre... | 7.1 „ | .2 „ | 292 | 313.3 „ | 15.69 „ |
| Sulfate de zinc..... | 6.8 „ | .0 „ | 266 | 149.2 „ | 10.20 „ |
| Azotate de zinc..... | 7.0 „ | .0 „ | 270 | 213.3 „ | 16.49 „ |
| Chlorure de zinc.... | 6.8 „ | .3 „ | 406 | 272.9 „ | 1.93 „ |
| Azotate de plomb... | 6.8 „ | .0 „ | 428 | 183.1 „ | 4.31 „ |
| Acétate de plomb... | 6.8 „ | .0 „ | 300 | 156.3 „ | 2.27 „ |
| Sulfate de nickel... | 6.9 „ | .0 „ | 285 | 184.8 „ | 13.32 „ |
| Azotate de nickel... | 7.0 „ | .0 „ | 252 | 209.4 „ | 1.64 „ |
| Chlorure de nickel.. | 6.9 „ | .2 „ | 241 | 238.1 „ | 7.89 „ |
| Sulfate ferreux..... | 6.9 „ | .0 „ | 253 | 178.0 „ | 1.48 „ |
| Sulfate ferrique..... | 6.9 „ | .0 „ | 340 | 196.5 „ | 2.68 „ |
| Azotate de fer..... | 6.9 „ | .0 „ | 213 | 169.5 „ | 3.95 „ |
| Chlorure ferrique... | 6.9 „ | .0 „ | 220 | 171.0 „ | 2.51 „ |

Si maintenant nous substituons les valeurs trouvées de $T$, $Q$ et $S$ dans l'équation (5), nous avons pour le force $E \Delta V = F$, qui transporte les liquides différents:

| | $\frac{T}{Q} \times S$ | | $F$ | paroi exter. $2\pi r k$. | $F$, par cM². de la paroi ext. |
|---|---|---|---|---|---|
| Sulfate de cuivre... | $\frac{10.375}{7.41} \times$ | 2313.1 gr. = | 6.051 KG. | : 337.7 cM². | = 17.50 gr. |
| Azotate de cuivre.. | $\frac{6.750}{13.74} \times$ | 2313.3 „ = | 1.137 „ | : 347.3 „ | = 3 27 „ |
| Sulfate de zinc .... | $\frac{20.835}{10.20} \times$ | 2149.2 „ = | 4.390 „ | : 334.1 „ | = 13.14 „ |
| Azotate de zinc .... | $\frac{8.575}{16.49} \times$ | 2213.3 „ = | 1.151 „ | : 342.9 „ | = 3.36 „ |
| Chlorure de zinc... | $\frac{2.605}{1.93} \times$ | 2272.9 „ = | 3.121 „ | : 341.3 „ | = 9.14 „ |
| Azotate de plomb.. | $\frac{22.525}{4.31} \times$ | 2183 1 „ = | 11.386 „ | : 334.1 „ | = 34.08 „ |
| Acétate de plomb.. | $\frac{92.50}{2.27} \times$ | 2156.3 „ = | 87.867 „ | : 334.1 „ | = 263.97 „ |
| Sulfate de nickel... | $\frac{19.150}{13.32} \times$ | 2184.8 „ = | 3.166 „ | : 338.5 „ | = 9.06 „ |
| Azotate de nickel.. | $\frac{6.525}{1.64} \times$ | 2209.4 „ = | 8.791 „ | : 334.1 „ | = 25.35 „ |
| Chlorure de nickel. | $\frac{7.075}{7.89} \times$ | 2238.1 „ = | 2.007 „ | : 343.3 „ | = 5.85 „ |
| Sulfate ferreux..... | $\frac{23.650}{3.02} \times$ | 2178.0 „ = | 18.622 „ | : 338.5 „ | = 55.00 „ |
| Sulfate ferrique.... | $\frac{22.605}{2.68} \times$ | 2196.5 „ = | 18.605 „ | : 338.5 „ | = 54.95 „ |
| Azotate de fer..... | $\frac{21.175}{3.95} \times$ | 2169.5 „ = | 11.630 „ | : 338.5 „ | = 34.36 „ |
| Chlorure ferrique... | $\frac{6.775}{2.51} \times$ | 2171.0 „ = | 5.462 „ | : 338.5 „ | = 16.13 „ |

La force $F$ étant le produit des deux facteurs $E$ et $\Delta V$, il faudra, en voulant procéder à la détermination du rapport entre les différentes valeurs de $E$, tâcher de déterminer celles de $\Delta V$. Cependant, comme entre les variables dont dépend $\Delta V = \frac{Id}{k\,m^2}$ il y a une, $m$, que nous ne saurions déterminer directement, et une autre, $k$, dont la détermination exacte est des plus difficiles, nous déterminerons expérimentalement les valeurs de $\Delta V$. De cette manière nous nous mettrons en même temps en état de juger, pour combien il est permi de supposer la valeur de $m$ constante pour les vases poreuses d'une même cuite, de sorte que, l'épaisseur $d$ de ces vases étant égale et $I$ constante pendant les récherches, $\Delta V$ ne dépende que de la conductibilité électrique $k$ des fluides différents.

## Détermination de $\Delta V$.

Dans l'équation (5) $\Delta V$ est *la force par laquelle une unité d'electricité est attirée ou répoussée par la différence de potentiel aux deux cotés des vases poreuses.* Comme nous l'exprimerons en volts, nous prenons pour *unité de force celle qu'un volt exerce sur l'unité d'électricité.*

Pour trouver sa valeur, je me suis servi de deux lames de cuivre, dont la longueur était égale à la hauteur du liquide dans la vase poreuse et qui étaient fixées parallèlement, l'un vis-à-vis l'autre, dans un petit bloc carré d'ébonite, de sorte qu'elles étaient parfaitement isolées. Si l'on faisait glisser ce bloc le long du bord de la vase, les lames se pressaient, en faisant ressort contre ses parois. Comme ces lames avaient une largeur d'à-peu-près le sixième de la circonférence de la vase, il fallait six fois les déplacer pour leur faire faire le tour de la surface entière; de cette manière on obtenait six valeurs, dont la moyenne est prise pour la valeur probable de $\Delta V$.

Cette précaution n'est pas superflue; car il m'est paru que la porosité d'une vase est loin d'être égale sur toute sa surface, que par contre la partie d'un courant qui passe par telle partie n'est pas égale à celle qui passe par telle autre d'étendue égale, sans que pour cela la résistance de cette partie-là soit accrue dans la même raison.

Les deux lames étaient conductivement réliées aux électrodes d'un multiplicateur, tandisque la résistance introduite dans le „shunt", pour assurer une déclinaison modérée de l'aiguille, fut mesurée au moyen d'une boite de résistance.

Les résultats de ces recherches sont rassemblées dans le tableau suivant [1]):

| Noms des solutions. | $\Delta V$ | |
|---|---|---|
| Sulfate de cuivre ..... | 1.221 | Volt. |
| Azotate de cuivre..... | 0.498 | „ |
| Sulfate de zinc ..... | 0.736 | „ |
| Azotate de zinc..... | 0.127 | „ |
| Chlorure de zinc..... | 0.062 | „ |
| Azotate de plomb..... | 0.571 | „ |

[1]) Pour les détails on voie: Appendice II, page 106.

| Noms des solutions. | $\Delta V$ |
|---|---|
| Acétate de plomb..... | 3.790 Volt. |
| Sulfate de nickel..... | 0.814 „ |
| Azotate de nickel..... | 0.504 „ |
| Chlorure de nickel..... | 0.683 „ |
| Sulfate ferreux..... | 2.406 „ |
| Sulfate ferrique..... | 3.676 „ |
| Azotate de fer..... | 0.467 „ |
| Chlorure ferrique..... | 0.461 „ |

L'on voit de ce tableau que les différences entre les valeurs de $\Delta V$ sont trop grandes, pour ne pas dépendre en premier lieu de la variable $m$, c.-à-d. du diamètre des pores et en dernier lieu du coëfficient de conductibilité électrique $k$, qui géneralement ne diffère que peu pour des solutions de la concentration donnée (5%).

Pour autant que les valeurs de $k$, qui ont rapport à cette concentration, nous sont connues, nous faisons suivre ici quelques exemples de la divergence des valeurs de $m$.

Pour des solutions de $CuSO_4$ et de $ZnSO_4$ le rapport des valeurs $k$ est, selon M. F. Kohlrausch [1]), comme 177 : 179 et selon M. Freund comme 123 : 116. Elles sont donc à-peu-près égales, tandisque les valeurs respectives de $\Delta V$ — 1.221 et 0.736 — indiquent une différence notable entre les résistances des deux parois. Aussi, si l'on substitue le rapport des volumes $k$ dans l'équation:

$$\frac{1}{km^2} : \frac{1}{k'm'^2} = 1.221 : 0.736,$$

on trouve pour le rapport des diamètres respectifs:

$$m : m' = 86 : 110.$$

Pour le rapport des valeurs de $k$, qui valent pour les solutions de $CuN_2O_6$ et $ZnN_2O_6$, M. Freund [2]) a trouvé 180 : 212, tandisque celles de $\Delta V$ sont pour ces solutions 0.489 et 0.127. Ici la différence entre les valeurs de $k$ ne rend nullement compte de celle entre les valeurs de $\Delta V$. Aussi, si l'on substitue le rapport des valeurs $k$ dans l'équation

$$\frac{1}{km^2} : \frac{1}{k'm'^2} = 0.489 : 0.127$$

[1]) *Wied. Ann.*, 6, p. 145.
[2]) ibid. 7. p. 44.

la porosité différente des deux vases paraît du rapport

$$m : m' = 84 : 206$$

des diamètres de leurs pores.

Et il en est de même si l'on considère les valeurs de $k$, trouvées par M. LONG [1]) pour les solutions de $Zn\,Cl_2$, $Cu\,N_2\,O_6$ et $Pb\,N_2\,O_6$:

$$452 : 341 : 179,$$

en rapport avec celles des valeurs correspondantes de $\Delta V$

$$0.062,\ 0.498,\ 0.571.$$

On en déduit pour le rapport des diamètres des pores des deux vases, nommées en premier lieu:

$$m : m' = 412 : 168$$

et pour celui des deux vases, nommées en dernier lieu

$$m : m' = 320 : 412.$$

Donc il paraît clairement, qu'entre toutes ces vases d'une même cuite il n'y a pas deux qui sont également poreuses; de sorte que, du moins pour à présent, il faudra se contenter d'avoir déterminé la force, qui dans les cas différents a occasionné le transport et différer à une étude prochaine la recherche des moyans qui, nonobstant cet obstacle, puissent nous mettre en état de comparer entre elles les forces individuelles.

---

[1]) *Wied. Ann.*, 11, p. 87.

HAARLEM, 10 février 1906.

## Appendice.

### I.

Concentrations de toutes les solutions: 5 parties de sel sur 100 parties d'eau.

$C_u SO_4 + 5 Aq.$

Direction du transport: *de l'anode vers la kathode.*

23 nov. 1905. Intensité du courant: 1 ampère.

| | | | | | | | Gouttes. | Gouttes. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h. | 0m. | 0s. | — | 9h. | 10m. | 14s. | 30 | 29.3 | en 10 min. |
| | 10 | 14 | | | 20 | 6 | 30 | 30.4 | „ |
| | 20 | 6 | | | 30 | 14 | 30 | 29.7 | „ |
| | 30 | 14 | | | 40 | 3 | 30 | 30.6 | „ |
| | 40 | 3 | | | 50 | 18 | 30 | 29.3 | „ |
| | 50 | 18 | | 10 | 0 | 15 | 30 | 30.2 | „ |
| 10 | 0 | 15 | | | 10 | 15 | 31 | 31.0 | „ |
| | 10 | 15 | | | 20 | 13 | 31 | 31.1 | „ |
| | 20 | 13 | | | 30 | 0 | 31 | 31.7 | „ |
| | 30 | 0 | | | 40 | 12 | 32 | 31.4 | „ |
| | 40 | 12 | | | 50 | 7 | 31 | 31.3 | „ |
| | 50 | 7 | | 11 | 0 | 2 | 31 | 31.3 | „ |
| | | | | | | | 377 gouttes. | | |

Poids des 377 gouttes . . . . . 38.75 gr.
Transport par ampère-heure . . 19.375 „

$C_u N_2 O_6 + 3 Aq.$

Direction du transport: *de la kathode vers l'anode.*

24 nov. 1905. Intensité du courant: 1 ampère.

| | | | | | | | Gouttes. | Gouttes. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h. | 0m. | 0s. | — | 9h. | 10m. | 40s. | 10 | 9.4 | en 10 min. |
| | 10 | 40 | | | 20 | 42 | 9 | 9.0 | „ |
| | 20 | 42 | | | 30 | 42 | 9 | 9.0 | „ |
| | 30 | 42 | | | 40 | 15 | 9 | 9.4 | „ |
| | 40 | 15 | | | 50 | 78 | 10 | 9.1 | „ |
| | 50 | 78 | | 10 | 0 | 50 | 8 | 8.4 | „ |
| 10 | 0 | 50 | | | 10 | 45 | 8 | 8.1 | „ |
| | 10 | 45 | | | 20 | 28 | 8 | 8.2 | „ |
| | 20 | 28 | | | 30 | 28 | 8 | 8.0 | „ |
| | 30 | 28 | | | 40 | 28 | 8 | 8.0 | „ |
| | 40 | 28 | | | 50 | 36 | 8 | 7.9 | „ |
| | 50 | 36 | | 11 | 0 | 28 | 8 | 8.1 | „ |
| | | | | | | | 103 gouttes. | | |

Poids des 103 gouttes . . . . . 13.50 gr.
Transport par ampère-heure. . . 6.750 „

$Z_n\ SO_4$.

Directions du transport: *de l'anode vers la kathode.*

25 nov. 1905. Intensité du courant: 1 ampère.

| | | | | | | | | Gouttes. | Gouttes. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h. | 0m. | 0s. | — | 9h. | 10m. | 12s. | | 27 | 26.5 | en 10 minutes. |
| | 10 | 12 | | | 20 | 7 | | 26 | 26.2 | " |
| | 20 | 7 | | | 30 | 0 | | 26 | 26.3 | " |
| | 30 | 0 | | | 40 | 0 | | 26 | 26.0 | " |
| | 40 | 0 | | | 50 | 15 | | 27 | 26.3 | " |
| | 50 | 15 | | 10 | 0 | 20 | | 27 | 26.2 | " |
| 10 | 0 | 20 | | | 10 | 6 | | 26 | 26.7 | " |
| | 10 | 6 | | | 20 | 3 | | 27 | 27.1 | " |
| | 20 | 3 | | | 30 | 0 | | 28 | 28.1 | " |
| | 30 | 0 | | | 40 | 1 | | 28 | 28.0 | " |
| | 40 | 1 | | | 50 | 7 | | 28 | 27.7 | " |
| | 50 | 7 | | 11 | 0 | 1 | | 28 | 28.3 | " |
| | | | | | | | | 324 gouttes. | | |

Poids des 324 gouttes..... 41.67 grammes.
Transport par ampère-heure... 20 835 "

$Z_n\ N_2\ O_6 + 6\ Aq$.

Direction du transport: *de la kathode vers l'anode.*

27 nov. 1905. Intensité du courant: 1 ampère.

| | | | | | | | | Gouttes. | Gouttes. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h. | 0m. | 0s. | — | 9h. | 10m. | 40s. | | 13 | 12.2 | en 10 minutes. |
| | 10 | 40 | | | 20 | 20 | | 12 | 12.4 | " |
| | 20 | 20 | | | 30 | 17 | | 12 | 12.2 | " |
| | 30 | 17 | | | 40 | 23 | | 12 | 11.9 | " |
| | 40 | 23 | | | 50 | 43 | | 12 | 11.6 | " |
| | 50 | 43 | | 10 | 0 | 1 | | 11 | 11.8 | " |
| 11 | 0 | 1 | | | 10 | 44 | | 12 | 11.2 | " |
| | 10 | 44 | | | 20 | 21 | | 11 | 11.5 | " |
| | 20 | 21 | | | 30 | 3 | | 11 | 11.3 | " |
| | 30 | 3 | | | 40 | 29 | | 12 | 11.5 | " |
| | 40 | 29 | | | 50 | 11 | | 11 | 11.3 | " |
| | 50 | 11 | | 11 | 0 | 12 | | 11 | 11.0 | " |
| | | | | | | | | 140 gouttes. | | |

Poids des 140 gouttes ..... 17.15 gr.
Transport par ampère heure.. 8.575 "

## $Z_nCl_2H_2O$.

Direction du transport: *de la kathode vers l'anode.*

27 nov. 1905. Intensité du courant: 2 ampères.

| | | | | | | | Gouttes. | Gouttes. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h. | 0m. | 0s. | — | 9h. | 10m. | 15s. | 7 | 6.8 | en 10 min. |
| | 10 | 15 | | | 20 | 17 | 7 | 7.0 | " |
| | 20 | 17 | | | 30 | 30 | 7 | 6.9 | " |
| | 30 | 30 | | | 40 | 48 | 7 | 6.8 | " |
| | 40 | 48 | | | 50 | 45 | 7 | 7.0 | " |
| | 50 | 45 | | 10 | 0 | 4 | 6 | 6.4 | " |
| 10 | 0 | 4 | | | 10 | 4 | 6 | 6.0 | " |
| | 10 | 4 | | | 20 | 25 | 6 | 5.8 | " |
| | 20 | 25 | | | 30 | 21 | 6 | 6.1 | " |
| | 30 | 21 | | | 40 | 24 | 6 | 6.0 | " |
| | 40 | 24 | | | 50 | 2 | 6 | 5.8 | " |
| | 50 | 2 | | 11 | 0 | 36 | 6 | 5.6 | " |
| | | | | | | | 77 gouttes. | | |

Poids des 77 gouttes . . . . . 10.42 gr
Transport par ampère-heure. . . 2.605 "

## $P_bN_2O_6$.

Direction du transport: *de la kathode vers l'anode*

28 nov. 1905. Intensité du courant: 1 ampère.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h. | 0m. | 0s. | — | 9h. | 10m. | 7s. | 32 gouttes | en | 10 min. |
| | 10 | 7 | | | 20 | 12 | 32 | " | " |
| | 20 | 12 | | | 30 | 18 | 33 | " | " |
| | 30 | 18 | | | 40 | 8 | 33 | " | " |
| | 40 | 8 | | | 50 | 10 | 34 | " | " |
| | 50 | 10 | | 10 | 0 | 4 | 35 | " | " |
| 10 | 0 | 4 | | | 10 | 13 | 36 | " | " |
| | 10 | 13 | | | 20 | 4 | 36 | " | " |
| | 20 | 4 | | | 30 | 11 | 37 | " | " |
| | 30 | 11 | | | 40 | 6 | 36 | " | " |
| | 40 | 6 | | | 50 | 10 | 36 | " | " |
| | 50 | 10 | | 11 | 0 | 10 | 36 | " | " |
| | | | | | | | 416 gouttes. | | |

Poids des 416 gouttes . . . . . 45.05 gr
Transport par ampère-heure . . . 22.525 "

$P_b C_4 H_6 O_4 + 3 Aq.$

Direction du transport: *de la kathode vers l'anode.*

29 nov. 1905. Intensité du courant: 1 ampère.

| | | | | | | | Gouttes. | Gouttes. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h. | 0m. | 0s. | — | 9h. | 10m. | 2s. | 118 | 117.4 | en 10 min. |
| | 10 | 2 | | | 20 | 0 | 118 | 118.4 | „ |
| | 20 | 0 | | | 30 | 3 | 119 | 118.4 | „ |
| | 30 | 3 | | | 40 | 0 | 118 | 118.6 | „ |
| | 40 | 0 | | | 50 | 1 | 119 | 118.8 | „ |
| | 50 | 1 | | 10 | 0 | 0 | 118 | 118.2 | „ |
| 10 | 0 | 0 | | | 10 | 3 | 119 | 118.4 | „ |
| | 10 | 3 | | | 20 | 0 | 119 | 119 6 | „ |
| | 20 | 0 | | | 30 | 4 | 119 | 118.2 | „ |
| | 30 | 4 | | | 40 | 0 | 118 | 118.8 | „ |
| | 40 | 0 | | | 50 | 4 | 119 | 118.2 | „ |
| | 50 | 4 | | 11 | 0 | 4 | 119 | 118.0 | „ |
| | | | | | | | 1423 gouttes. | | |

Poids des 1423 gouttes . . . . . 184.99 gr.
Transport par ampère-heure . . . 92.50 „

$Ni SO_4 + 7 Aq.$

Direction du courant: *de l'anode vers la kathode*

30 nov. 1905. Intensité du courant: 1 ampère.

| | | | | | | | Gouttes. | Gouttes. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h. | 0m. | 0s. | — | 9h. | 10m. | 14s. | 31 | 30.3 | en 10 min. |
| | 10 | 14 | | | 20 | 21 | 31 | 30.6 | „ |
| | 20 | 21 | | | 30 | 5 | 30 | 30.8 | „ |
| | 30 | 5 | | | 40 | 8 | 30 | 29.9 | „ |
| | 40 | 8 | | | 50 | 16 | 31 | 30.6 | „ |
| | 50 | 16 | | 10 | 0 | 3 | 30 | 30.7 | „ |
| 10 | 0 | 3 | | | 10 | 9 | 31 | 30.7' | „ |
| | 10 | 9 | | | 20 | 5 | 31 | 31.2 | „ |
| | 20 | 5 | | | 30 | 0 | 31 | 31.3 | „ |
| | 30 | 0 | | | 40 | 2 | 32 | 31.9 | „ |
| | 40 | 2 | | | 50 | 13 | 32 | 31.4 | „ |
| | 50 | 13 | | 11 | 0 | 8 | 31 | 31.3 | „ |
| | | | | | | | 371 gouttes. | | |

Poids des 371 gouttes . . . . . 38.30 gr.
Transport par ampère-heure . . 19.15 „

$Ni\,N_2\,O_6 + 6\,Aq.$

Direction du transport: *de la kathode vers l'anode.*

1 déc 1905. Intensité du courant: 1 ampère.

| | | | | | | | Gouttes. | Gouttes. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h. | 0m. | 0s. | — | 9h. | 10m. | 20s. | 8 | 7.8 | en 10 min. |
| | 10 | 20 | | | 20 | 11 | 8 | 8.1 | „ |
| | 20 | 11 | | | 30 | 7 | 8 | 8.1 | „ |
| | 30 | 7 | | | 40 | 47 | 9 | 8.4 | „ |
| | 40 | 47 | | | 50 | 34 | 8 | 8.2 | „ |
| | 50 | 34 | | 10 | 0 | 5 | 8 | 8.4 | „ |
| 10 | 0 | 5 | | | 10 | 15 | 9 | 8.9 | „ |
| | 10 | 15 | | | 20 | 10 | 9 | 9.1 | „ |
| | 20 | 10 | | | 30 | 15 | 9 | 8 9 | „ |
| | 30 | 15 | | | 40 | 0 | 8 | 8.2 | „ |
| | 40 | 0 | | | 50 | 40 | 9 | 8.5 | „ |
| | 50 | 40 | | 11 | 0 | 13 | 8 | 8.4 | „ |
| | | | | | | | 101 gouttes. | | |

Poids des 101 gouttes. . . . . 13.05 gr.
Transport par ampère-heure . . 6.525 „

$Ni\,Cl_2 + 6\,Aq.$

Direction du transport: *de la kathode vers l'anode.*

2 déc. 1905. Intensité du courant: 1 ampère.

| | | | | | | | Gouttes. | Gouttes. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h. | 0m. | 0s. | — | 9h. | 10m. | 8s. | 11 | 10.9 | en 10 min. |
| | 10 | 8 | | | 20 | 31 | 11 | 10.8 | „ |
| | 20 | 31 | | | 30 | 43 | 11 | 10.8 | „ |
| | 30 | 43 | | | 40 | 48 | 11 | 10.9 | „ |
| | 40 | 48 | | | 50 | 58 | 11 | 10.8 | „ |
| | 50 | 58 | | 10 | 0 | 53 | 11 | 11.1 | „ |
| 10 | 0 | 53 | | | 10 | 39 | 11 | 11.3 | „ |
| | 10 | 39 | | | 20 | 9 | 10 | 10.7 | „ |
| | 20 | 9 | | | 30 | 12 | 11 | 10.8 | „ |
| | 30 | 12 | | | 40 | 20 | 11 | 10.9 | „ |
| | 40 | 20 | | | 50 | 20 | 11 | 11.0 | „ |
| | 50 | 20 | | 11 | 0 | 25 | 11 | 10.9 | „ |
| | | | | | | | 131 gouttes. | | |

Poids des 131 gouttes. . . . . 14.15 gr.
Transport par ampère-heure. . 7.075 „

$Fe\,SO_4 + 7\,Aq.$

Direction du transport: *de l'anode vers la kathode.*

4 déc. 1905. Intensité du courant: 1 ampère.

| | | | | | | | Gouttes. | Gouttes. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h. | 0m. | 0s. | — | 9h. | 10m. | 0s. | 35 | 35.0 | en 10 min. |
| | 10 | 0 | | | 20 | 1 | 36 | 35.0 | „ |
| | 20 | 1 | | | 30 | 7 | 36 | 35.6 | „ |
| | 30 | 7 | | | 40 | 4 | 36 | 36.2 | „ |
| | 40 | 4 | | | 50 | 0 | 35 | 35.2 | „ |
| | 50 | 0 | | 10 | 0 | 8 | 35 | 34.5 | „ |
| 10 | 0 | 8 | | | 10 | 4 | 35 | 35.2 | „ |
| | 10 | 4 | | | 20 | 8 | 35 | 34.7 | „ |
| | 20 | 8 | | | 30 | 0 | 35 | 35.5 | „ |
| | 30 | 0 | | | 40 | 6 | 35 | 35.6 | „ |
| | 40 | 6 | | | 50 | 7 | 35 | 35.0 | „ |
| | 50 | 7 | | 11 | 0 | 7 | 35 | 35.0 | „ |
| | | | | | | | 423 gouttes. | | |

Poids des 423 gouttes. . . . . 51.30 gr.
Transport par ampère-heure. . 25.65 „

$Fe_2\,3\,SO_4.$

Direction du transport: *de l'anode vers la kathode.*

5 déc. 1905. Intensité du courant: 1 ampère.

| | | | | | | | Gouttes. | Gouttes. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h. | 0m. | 0s. | — | 9h. | 10m. | 2s. | 31 | 30.9 | en 10 min. |
| | 10 | 2 | | | 20 | 4 | 31 | 30.9 | „ |
| | 20 | 4 | | | 30 | 14 | 31 | 30.8 | „ |
| | 30 | 14 | | | 40 | 3 | 30 | 30.6 | „ |
| | 40 | 3 | | | 50 | 2 | 31 | 31.0 | „ |
| | 50 | 2 | | 10 | 0 | 5 | 31 | 30.8 | „ |
| 10 | 0 | 5 | | | 10 | 3 | 31 | 31.0 | „ |
| | 10 | 3 | | | 20 | 4 | 31 | 31.0 | „ |
| | 20 | 4 | | | 30 | 19 | 31 | 30.2 | „ |
| | 30 | 19 | | | 40 | 10 | 30 | 30.5 | „ |
| | 40 | 10 | | | 50 | 10 | 30 | 30.5 | „ |
| | 50 | 0 | | 11 | 0 | 0 | 31 | 31.0 | „ |
| | | | | | | | 369 gouttes. | | |

Poids des 369 gouttes. . . . . 45.21 gr.
Transport par ampère-heure. . 22.605 „

$Fe\,N_2\,O_6 + 6\,Aq.$

Direction du transport: *de la kathode vers l'anode.*

6 déc. 1905. Intensité du courant: 1 ampère.

| | | | | | | | Gouttes. | Gouttes. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h. | 0m. | 0s. | — | 9h. | 10m. | 5s. | 26 | 25.8 | en 10 min. |
| | 10 | 5 | | | 20 | 5 | 26 | 26.0 | „ |
| | 20 | 5 | | | 30 | 4 | 26 | 26.0 | „ |
| | 30 | 4 | | | 40 | 20 | 27 | 25.3 | „ |
| | 40 | 20 | | | 50 | 18 | 26 | 26.1 | „ |
| | 50 | 18 | | 10 | 0 | 19 | 26 | 26.0 | „ |
| 10 | 0 | 19 | | | 10 | 18 | 27 | 27.0 | „ |
| | 10 | 18 | | | 20 | 20 | 26 | 25.9 | „ |
| | 20 | 20 | | | 30 | 12 | 26 | 26 3 | „ |
| | 30 | 12 | | | 40 | 2 | 26 | 26.4 | „ |
| | 40 | 2 | | | 50 | 14 | 27 | 26.5 | „ |
| | 50 | 14 | | 11 | 0 | 17 | 27 | 26.9 | „ |
| | | | | | | | 316 gouttes. | | |

Poids des 316 gouttes . . . . . 42.35 gr.
Transport par ampère-heure . . 21.175 „

$Fe_2\,Cl_6 + 5\,Aq.$

Direction du transport: *de la kathode vers l'anode.*

7 déc. 1905. Intensité du courant: 1 ampère.

| | | | | | | | Gouttes. | Gouttes. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h. | 0m. | 0s. | — | 9h. | 10m. | 4s. | 10 | 9.9 | en 10 min. |
| | 10 | 4 | | | 20 | 15 | 10 | 9.8 | „ |
| | 20 | 15 | | | 30 | 10 | 9 | 9.1 | „ |
| | 30 | 10 | | | 40 | 15 | 10 | 9.9 | „ |
| | 40 | 15 | | | 50 | 10 | 10 | 10.1 | „ |
| | 50 | 10 | | 10 | 0 | 2 | 10 | 10.1 | „ |
| 10 | 0 | 2 | | | 10 | 5 | 10 | 10.0 | „ |
| | 10 | 5 | | | 20 | 3 | 10 | 10.0 | „ |
| | 20 | 3 | | | 30 | 35 | 11 | 10.4 | „ |
| | 30 | 35 | | | 40 | 15 | 10 | 10.3 | „ |
| | 40 | 15 | | | 50 | 11 | 10 | 10.1 | „ |
| | 50 | 11 | | 11 | 0 | 5 | 10 | 10.1 | „ |
| | | | | | | | 120 gouttes. | | |

Poids des 120 gouttes . . . . . 13.55 gr.
Transport par ampère-heure . . 6.775 „

## II.

## $\Delta V$.

### Le multiplicateur.

$\alpha$ = déclinaison de l'aiguille.
$E$ = 2 Volts.
$R$ = résistance introduite, celle de la bobine (1.7 ohm.) y comprise.

| $\alpha$ | $R$ | $\frac{E}{R}$ |
|---|---|---|
| 20° | 1431.2 Ohm. | 0.0014 Amp. |
| 25 | 1456.5 „ | 19 „ |
| 30 | 764.1 „ | 25 „ |
| 35 | 630.7 „ | 32 „ |
| 40 | 492.5 „ | 41 „ |
| 45 | 368.6 „ | 54 „ |
| 50 | 284.7 „ | 70 „ |

---

$Cu\,S\,O_4$.

$\alpha$ = 28.°0
28.5
31.0
32.5
32.0
28.5
180.°5
6

Moyenne: 30° = 0.00250 Amp.
Résistance introd. 478.2 Ohm.
$\Delta V = 0.00250 \times 478.2 = 1.196$ Volt.

$Cu\,N_2\,O_6$.

$\alpha$ = 16°
14
14
13
14
16
87°
6

Moyenne: 14.°5 = 0.00102 Amp.
Résistance introd. 478.2 Ohm.
$\Delta V = 0.00102 \times 478.2 = 0.488$ Volt.

$Zn\,S\,O_4$.

$\alpha$ = 37°
35
33
26
20
34
185°
6

Moyenne: 30.°8 = 0.00256 Amp.
Résistance introd. 287 6 Ohm
$\Delta V = 0.00256 \times 287.6 = 0.736$ Volt.

$Zn\,N_2\,O_6$.

$\alpha$ = 7°
7
9
11
13
9.5
56.°5
6

Moyenne: 9.°4 = 0.00066 Amp.
Résistance introd. 192.3 Ohm.
$\Delta V = 0.00066 \times 192.3 = 0.127$ Volt.

$Z_n\ Cl_2$.

$\alpha = 5°.5$
5 .5
5 .0
4 .0
3 .5
4 .0

27°.5
6

Moyenne: 4°.6 = 0.00032 Amp.
Résistance introd. 192 3 Ohm.
$\Delta V = 0.00032 \times 192.3 = 0.062$ Ohm.

$P_b\ N_2\ O_6$.

$\alpha = 15°$
16
17
18
18
16

100°
6

Moyenne: 16°.7 = 0.00117 Amp.
Résistance introd. 478.2 Ohm.
$\Delta V = 0.00117 \times 478.2 = 0.559$ Volt.

$P_b\ C_4\ H_6\ O_4$.

$\alpha = 36°$
37
40
40
40
39

232°
6

Moyenne: 38°.7 = 0.00397 Amp.
Résistance introd. 954.7 Ohm.
$\Delta V = 0.00397 \times 954.7 = 3.790$ Volt.

$N_i\ SO_4$.

$\alpha = 23°$
24
26
23
24
23

143°
6

Moyenne: 23°.8 = 0.001667 Amp.
Résistance introd. 478.2 Ohm.
$\Delta V = 0.001667 \times 478.2 = 0.797$ Volt.

$N_i\ N_2\ O_6$.

$\alpha = 30°.0$
31 .0
31 .0
32 .0
33 .5
31 .0

188°.5
6

Moyenne: 31°.4 = 0.00262 Amp.
Résistance introd. 192.3 Ohm.
$\Delta V = 0.00262 \times 193.2 = 0.504$ Volt.

$N_i\ Cl_2$.

$\alpha = 21°$
21
20
20
19
19

120°
6

Moyenne: 20° = 0.00140 Amp.
Résistance introd. 478.2 Ohm.
$\Delta V = 0.00140 \times 478.2 = 0.669$ Volt.

$Fe\,S\,O_4$.

$\alpha = 30.^\circ 0$
30.0
30.0
30.0
30.5
30.5

181°
6

Moyenne: $30.^\circ 2 = 0.00252$ Amp.
Résistance introd. 954.7 Ohm.
$\Delta V = 0.00252 \times 954.7 = 2.406$ Volt.

$Fe_2\,3\,S\,O_4$.

$\alpha = 40^\circ$
37
37
36
35
40

225°
6

Moyenne: $37.^\circ 5 = 0.00384$ Amp.
Résistance introd. 954.7 Ohm.
$\Delta V = 0.00384 \times 954.7 = 3.676$ Volt.

$Fe\,N_2\,O_6$.

$\alpha = 30.^\circ 0$
29.0
29.0
28.5
28.5
30.0

175°
6

Moyenne: $29.^\circ 2 = 0.00243$ Amp.
Résistance introd. 192.3 Ohm.
$\Delta V = 0.00243 \times 192.3 = 0.467$ Volt.

$Fe_2\,Cl_6$.

$\alpha = 30^\circ$
28
29
32
28
27

174°
6

Moyenne: $29.^\circ 0 = 0.00242$ Amp.
Résistance introd. 192.3 Ohm.
$\Delta V = 0.00242 \times 192.3 = 0.461$ Volt.

# SUR L'ALLURE DES COURBES DE PLISSEMENT

CHEZ LES

## MÉLANGES DE SUBSTANCES NORMALES, ET LES ÉQUILIBRES POSSIBLES ENTRE UNE PHASE GAZEUZE ET UNE OU DEUX PHASES LIQUIDES,

PAR

J. J. VAN LAAR.

---

1) Dans un Mémoire récent [1]) je déduisis l'équation générale des *courbes spinodales* sur la surface $\Psi$, c.-à-d.

$$RT = f(v, x), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

et en partant de cette équation dernière, je réussis de déduire l'équation de la *courbe de plissement*, inconnu jusqu'à présent.

De l'équation *différentielle* de cette courbe, savoir

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{dv}{dx}\right)_{p,T} = 0,$$

où $f$ désigne le second membre de (1), on trouve, après élimination de $T$, l'équation

$$F(v, x) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

qui détermine entièrement, combinée avec (1), la courbe de plissement. L'équation (2) est la *projection* de cette courbe sur le plan $v, x$, tandis que les températures correspondantes sont données par (1).

Dans ces calculs je suis parti de l'équation d'état de M. VAN DER WAALS, où $b$ est considéré comme indépendant de $v$ et de $T$; de plus, dans les relations quadratiques générales:

---

[1]) Versl. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam, 5 April 1905, p. 685—696.

$$\left.\begin{aligned} b &= (1-x)^2 b_1 + 2x(1-x) b_{12} + x^2 b_2 \\ a &= (1-x)^2 a_1 + 2x(1-x) a_{12} + x^2 a_2 \end{aligned}\right\}$$

j'ai admis:

$$b_{12} = \tfrac{1}{2}(b_1 + b_2) \quad ; \quad a_{12} = \sqrt{a_1 a_2},$$

de sorte que les expressions dernières se transforment en

$$\left.\begin{aligned} b &= (1-x) b_1 + x b_2 \\ a &= [(1-x)\sqrt{a_1} + x\sqrt{a_2}]^2 \end{aligned}\right\}.$$

La relation $b_{12} = \tfrac{1}{2}(b_1 + b_2)$ est considérée généralement comme satisfaite à peu près, tandis que la relation $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$, due à M. BERTHELOT, pourra également être considérée approximativement comme exacte. En tous cas l'introduction de ces relations donne des simplifications importantes dans les calculs divers.

Une plus grande erreur sera introduite par la supposition $b$ indépendant de $v$ et de $T$, tandis que sans doute $b$ ne soit non seulement une fonction de $v$, mais aussi de $T$. Toutefois, les calculs deviendraient tout-à-fait impraticables, si l'on prendrait en considération la variabilité de $b$; et lorsqu'on désire à connaître du moins quelque chose de l'allure de la ligne de plissement, il faudra se contenter avec cette approximation.

Or, pour (1) et (2) je trouvai:

$$\left.\begin{aligned} RT &= \frac{2}{v^3}[x(1-x)\Theta^2 + a(v-b)^2] \\ x(1-x)\Theta^3 &[(1-2x)v - 3x(1-x)\beta] + \\ + \sqrt{a}(v-b)^2 &[3x(1-x)\Theta(\Theta - \beta\sqrt{a}) + a(v-b)(v-3b)] = 0 \end{aligned}\right\}, \quad (3)$$

$\Theta$ étant $= \alpha v - \beta\sqrt{a}$, $\alpha = \sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}$ et $\beta = b_2 - b_1$. [1])

Dans un Mémoire suivant [2]) les équations (3) furent discutées amplement, seulement toutefois pour le cas simple $b_1 = b_2$ $(\beta = 0)$ [3]).

Posons

$$\frac{\sqrt{a_1}}{\alpha} = \varphi \quad ; \quad \frac{b_1}{v} = \omega \quad ; \quad \frac{\beta}{v} = n\omega,$$

---

[1]) Déjà en 1891 M. KORTEWEG a tâché de déduire une équation $F(v, x)$ pour la courbe de plissement, mais sans y réussir tout à fait. Voir Arch. Néerl. **24**, p. 350 et 361 (1891).

[2]) Versl. K. A. v. W. 7 Juin 1905, p. 14—29.

[3]) La discussion de M. KORTEWEG se borne principalement au cas $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ (mais $a_{12} = {}^{\times}a_2$); l. c. p. 297, 324, 337 et 341.

alors (3) se transforme pour $\beta = 0$ $(n = 0)$ en

$$\left.\begin{aligned} \tau &= 4\omega\left[x(1-x) + \psi^2(1-\omega)^2\right] \\ (1-2x) + 3\psi(1-\omega)^2 &+ \frac{\psi^3(1-\omega)^3(1-3\omega)}{x(1-x)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3^a)$$

lorsque $\tau = \frac{T}{T_0}$, $T_0$ étant la „troisième" température critique, c.-à.-d. la temperature de plissement $C_0$ chez $v = b$ (voir fig. 1), tandis que $\psi$ remplace $\varphi + x$.

Pour la pression dans chaque point des lignes spinodales et de la ligne de plissement je déduisis encore:

$$\pi = \frac{27}{\varphi^2}\frac{\omega^2}{1-\omega}\left[2x(1-x) + \psi^2(1-\omega)(1-2\omega)\right] \quad , \ldots \quad (4)$$

où $\pi = \frac{p}{p_1}$, $p_1$ étant la pression critique de la première composante.

Comment maintenant la seconde équation $(3^a)$ mène à l'existence d'un point double pour une valeur déterminée de $\frac{T_2}{T_1}$, de sorte qu'il y aura deux types de courbes de plissement tout-à-fait différents, qui se confondront dans le cas du point double — tout celà peut être lu dans le Mémoire cité.

Dans un Mémoire étendu dans ces Archives [1]) l'examen à propos des données du point double fut étendu sur le cas tout-à-fait général $b_1 \lessgtr b_2$, donc $\beta$ et $n$ diffèrent de 0. De la seconde équation (3) il s'ensuit alors, au lieu de la seconde équation $(3^a)$, l'équation plus compliquée:

$$\left.\begin{aligned} &(1-\psi n\omega)^3\left[(1-2x) - 3x(1-x)n\omega\right] + \\ &+ 3\psi\left[1-(1+nx)\omega\right]^2(1-\psi n\omega)(1-2\psi n\omega) + \\ &+ \frac{\psi^3\left[1-(1+nx)\omega\right]^3\left[1-3(1+nx)\right]}{x(1-x)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Or, il ne parut pas possible d'exprimer les conditions pour l'existence du point double directement dans les grandeurs $\theta = \frac{T_2}{T_1}$ et $\pi = \frac{p_2}{p_1}$ (cette grandeur $\pi$ est différente de la grandeur variable $\pi$ dans l'équation (4)), mais bien dans une grandeur auxiliaire $k$, liée par deux relations déterminées avec $\theta$ et $\pi$. Le problème était donc résolu complètement.

[1]) Arch. Teyler (2) **10** (Première Partie), 1905.

Nous avons vu plus haut, que le cas particulier $\beta = 0$ donna lieu à de grandes simplifications; cela parut également être le cas avec le cas particulier $\pi = 1$ (c.-à.-d. $p_1 = p_2$). L'allure de la ligne de plissement fut déduite pour ce cas, et le point double calculé. (celui-ci se trouve alors sur la droite $v - b = 0$). (Ces Arch. l. c.)

Pour le cas général je déterminai encore le *cours initial* de la courbe de plissement chez $T_1$ (la temperature critique la plus basse), [1]) savoir:

$$\frac{1}{T_1}\left(\frac{dT_x}{dx}\right)_0 = \Delta = \Theta \sqrt{\frac{1}{\pi}}\left[\Theta \sqrt{\frac{1}{\pi}}\left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}\right)^2 - 1\right], \ldots (6)$$

se transformant pour $\pi = 1$ en l'expression plus simple:

$$\Delta = \Theta(\Theta - 1) \ldots\ldots\ldots\ldots (6^a)$$

Une vérification de cette formule dernière donnait des résultats fort satisfaisants.

La formule (6) même à la condition

$$\Theta < \frac{4\pi\sqrt{\pi}}{(3\sqrt{\pi} - 1)^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

quant à l'existence d'une *temperature de plissement minimale* [2]).

Aussi je déduisis la condition pour l'existence d'une *tension de vapeur maximale* chez les températures plus élevées, correspondant à une *pression du système des trois phases maximale* chez les températures plus basses. (la composition $x_3$ de la vapeur se trouve alors *entre* les compositions $x_1$ et $x_2$ des deux phases liquides, et l'on aura $x_3 > x_1$ du côté de la température critique la plus basse).

Il fut trouvé: [3])

$$\Theta < \frac{\pi}{2\sqrt{\pi} - 1} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Cette condition n'implique pas nécessairement la condition (7), et vice versa.

Une vérification de (7) et (8) donnait encore des résultats excellents.

---

[1]) V. K. A. v. W. 14 Juillet 1905, p. 108–116. Plus tard M. VERSCHAFFELT a déduit une expression identique (V. K. A. v. W. 7 Février 1906, p. 693).

[2]) Ibid. 10 Janvier 1906, p. 585, et plus tard confirmé par VERSCHAFFELT, l. c. p. 693.

[3]) L. c. p. 587. M. VERSCHAFFELT (l. c. p. 692) a cherché la condition pour une tension de vapeur maximale (ou minimale) *dans un point de plissement*. Il va sans dire, qu'il a trouvé une condition différente. En conséquence de cette remarque la note au dessous du page 692 l. c. cesse d'avoir raison d'être.

2) Maintenant nous procédérons à examiner de plus près les divers rapports *connodaux*. résultant du cours étudié des lignes de plissement Un aperçu abrégé fut déjà publié ailleurs [1]).

*a*) *Type Principal I.* (voir les figg. 1—12).

Dans la fig. 1 on voit la transformation continue du pli principal (transversal), lorsque la température s'abaisse de $\tau = \frac{T}{T_0} = 2{,}37$ en $C_2$ jusqu'à 0,80. [Ces valeurs numériques se rapportent au cas spécial $b_1 = b_2$, mais quand $b_1 \lessgtr b_2$, les rapports seront modifiés seulement numériquement, ainsi que je l'ai démontré dans le Mémoire déjà cité dans ces Archives]. $T_0$ est la température au point $C_0$; elle a été prise comme unité. $\Theta = \frac{T_2}{T_1}$ est ici $= 4$. (Voir à propos des ces données et des autres le deuxième Mémoire cité dans les V. K. A. v. W.)

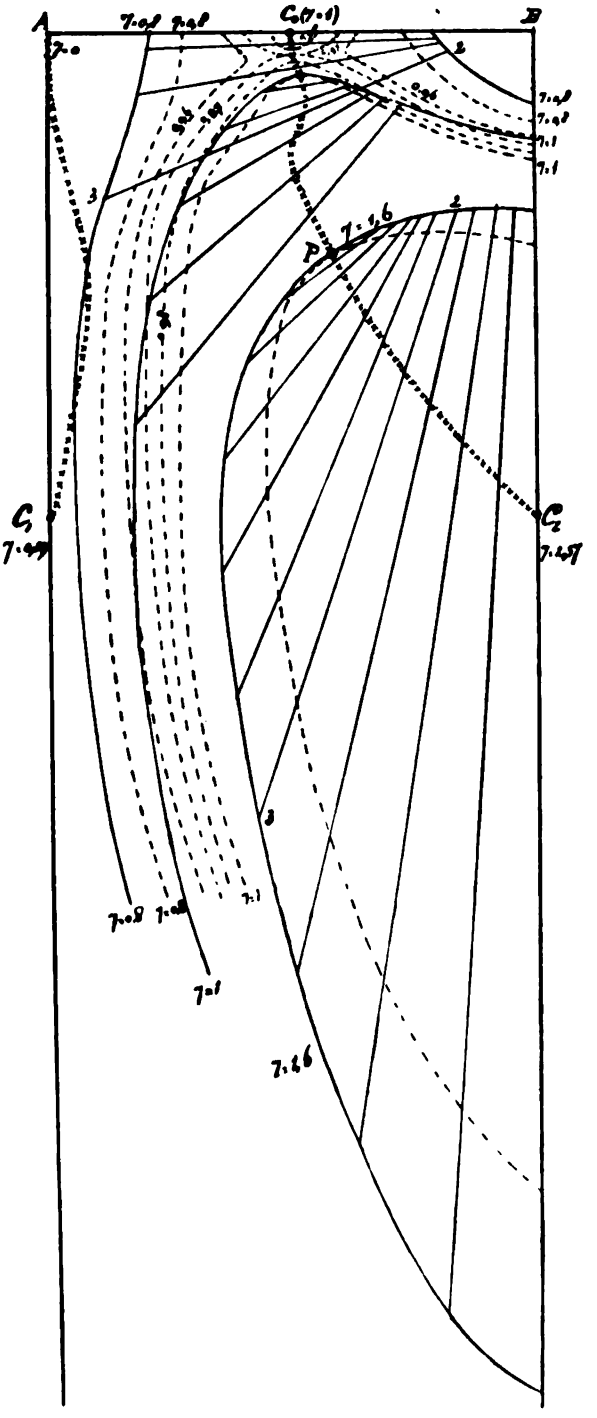



Fig. 1.

[1]) l. c. p. 589—594. Voir aussi le Mémoire cité très important de M. Kortewegh et plusieurs Mémoires de M. van der Waals.

Les figg. 2, 3 et 4 répresentent les rapports dans le voisinage de $\tau = 1$, où se présente une température minimale dans le courbe de plissement.

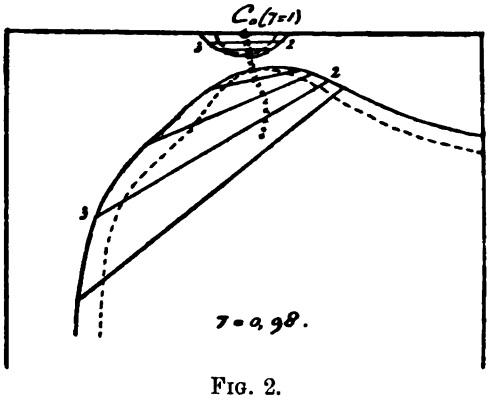



Fig. 2.

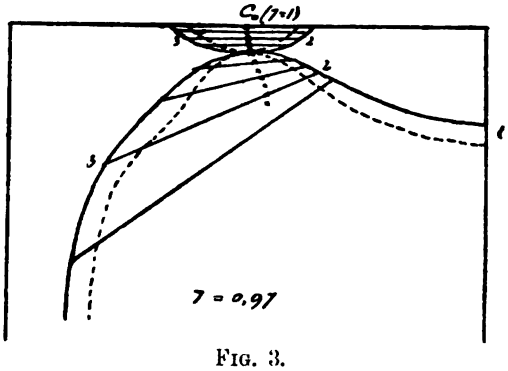



Fig. 3.

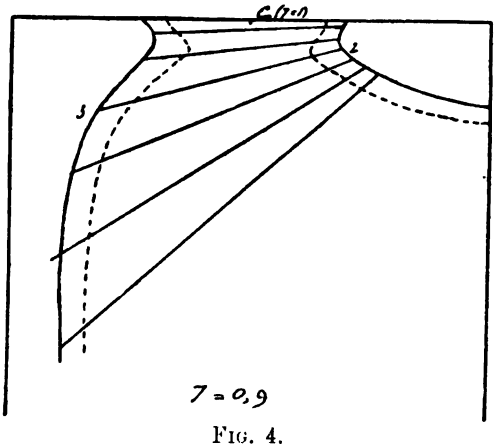



Fig. 4.

Le point de plissement $P$ est fortement déplacé du côté des petits volumes; toujours il y a équilibre entre une phase gazeuze 3 et une phase liquide 2, relativement riche en la seconde composante. Aux petits volumes la phase gazeuze 3 est devenu pratiquement une deuxième phase liquide, mais le passage est graduel.

N.B Les bords des plis en projection $v$, $x$, tracés en trait plein, sur lesquels reposent les droites de jonction des noeuds correspondants, représentent partout les courbes *connodales*; les lignes pointillées représentent les courbes *spinodales*; la courbe de *plissement* est indiquée par des croix.

Lorsque la température s'abaisse un peu au dessous de $T_0$, p. e. quand $\tau = 0,98$ (fig. 2), une ligne connodale apparaîtra à petite distance autour de $C_0$, tandis que la ligne connodale principale s'approche avec son point de plissement de plus en plus de $C_0$ Pour $\tau = 0,97$ (fig 3) les deux plis se rencontrent en un *point de plissement double homogène*. A des températures plus basses encore on aura un pli ouvert, dont les deux branches de la courbe connodale divergent à droite et à gauche, comme dans la fig. 4, où $\tau = 0,9$.

On voit que jusqu'au pressions les plus hautes les valeurs de $x_3$ et $x_2$

sont différentes, et qu'il ne sera donc pas possible de rendre homogène les deux phases 2 et 3 par pression, quelque grande qu'elle soit. Pour des valeurs de $T$ entre $T_0$ et 0,97 $T_0$ l'homogénéité, atteinte à une certaine pression élevée, est de nouveau troublée à des pressions encore plus hautes, après quoi les deux phases se séparent de plus en plus, jusqu'à une certaine limite.

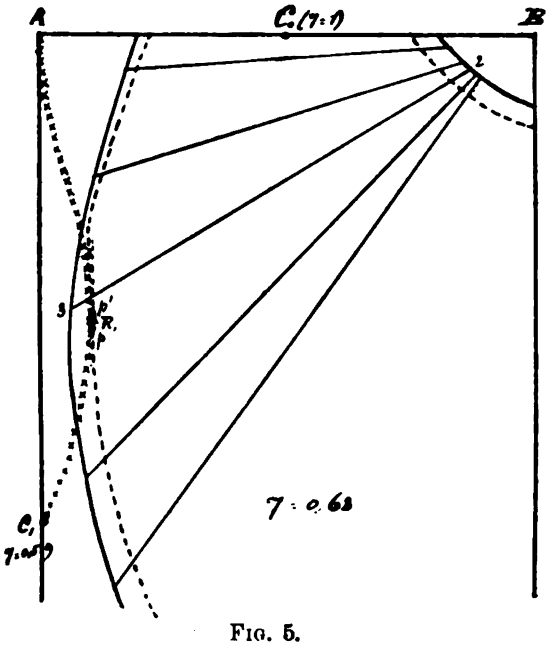


FIG. 5.

La fig. 5 représente un moment important. A $\tau = 0{,}63$ la courbe spinodale *touche* la courbe de plissement $C_1A$ en $R_1$, et dès ce moment il commence à se former *à l'intérieur* de la ligne connodale proprement dite une nouvelle ligne connodale fermée, comme le représente la fig. 6 ($\tau = 0{,}62$). La ligne spinodale touche deux fois cette courbe isolée, c.-à-d. aux points de plissement $p$ et $p'$, qui coïncident pour $\tau = 0{,}63$ en $R_1$, en formant un *point de plissement double hétérogène* [1]). [Tout ceci a déjà été décrit en détail par M. KORTEWEG (l. c p. 316—318, figg. 30—35)].

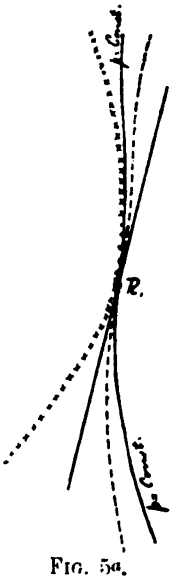


FIG. 5a.

La ligne connodale désignée, e.a. pour $\tau = 0{,}62$ (fig. 6), ne donne cependant pas encore d'équilibres réalisables, puisque cette courbe est située sur la surface $\Psi$ *au dessus* du plan tangent à la courbe connodale proprement dite, qui détermine les phases 3 et 2.

Cette ligne connodale isolée est répresentée agrandie et schématique dans la fig. 6″, où quelques

[1]) Il va sans dire, que chaque fois seulement un point, après le contact en $R_1$ deux points de la courbe de plissement correspondent à la température de la ligne spinodale et connodale considérée. Tous les autres points de la courbe de plissement, chaque fois projetée en entier, correspondent à d'autres températures, soit plus basses, soit plus élevées.

droites désignent les équilibres „cachés", irréalisables. Les points $a$ et $a'$, et de même $b$ et $b'$ sont des noeuds conjugués. La „queue" en $b'$ est toujours tournée du côté du point de plissement (déjà disparu dans notre cas) du pli principal; la „pointe" en $a$ est situé du côté opposé.

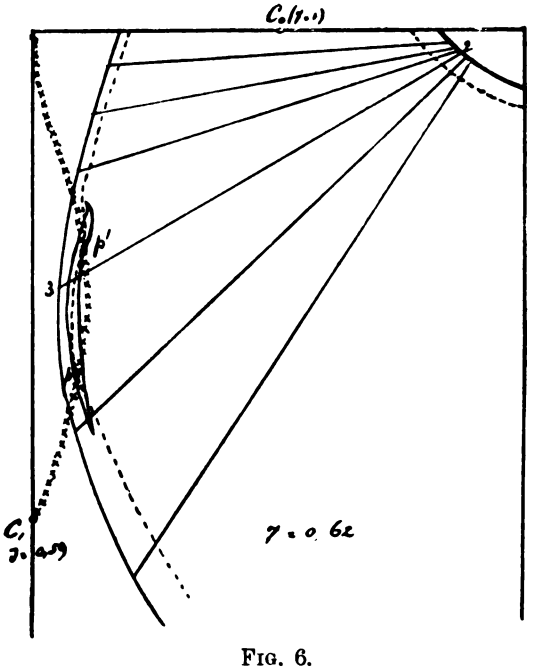


Fig. 6.

Nous faisons remarquer, que l'allure de la courbe spinodale, telle qu'elle est représentée dans les figg. 6 et 6$^a$, implique, que cette courbe touche la courbe de plissement de la façon particulière, indiquée dans les figg. 5 et 5$^a$. Or, la partie supérieure est située, dans le voisinage immédiat du point $R_1$, à la gauche de la tangente commune, la partie inférieure à la droite de cette tangente. (point d'inflection en $R_1$).

A une température un peu plus basse, dans notre cas $\tau = 0{,}61$ (fig. 7), la ligne connodale isolée commence à toucher (en $M$) la ligne connodale proprement dite, et dès ce moment un des deux nouveaux points de plissement, savoir $p$, deviendra le point de plissement d'un nouveau pli, un pli latéral, qui a donc pris naissance du pli principal de la manière décrite. Voir e.a fig. 8, où $\tau = 0{,}60$; le point $p'$ est toujours irréalisable, et cela continue jusqu'au zéro absolu, où la courbe de plissement termine

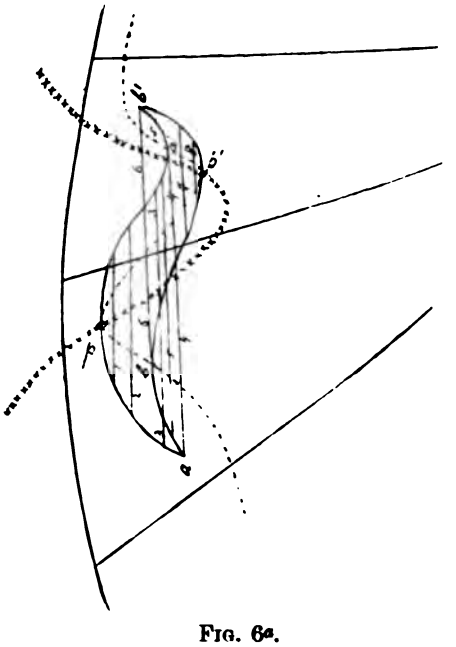


Fig. 6$^a$.

en A Par contre, tous les points de plissement $P$ depuis $M$ jusqu'à $C_1$ seront des points de plissement réalisables du nouveau pli.

Dans la fig 7 la phase 3 commence à se séparer en deux nouvelles phases, la phase gazeuze proprement dite 3 et une nouvelle phase liquide 1, riche en la première composante du mélange. Il y a une *droite* de trois phases, commencement d'un *triangle* de trois phases (voir fig. 8), qui se maintient dès maintenant jusqu'aux températures les plus basses.

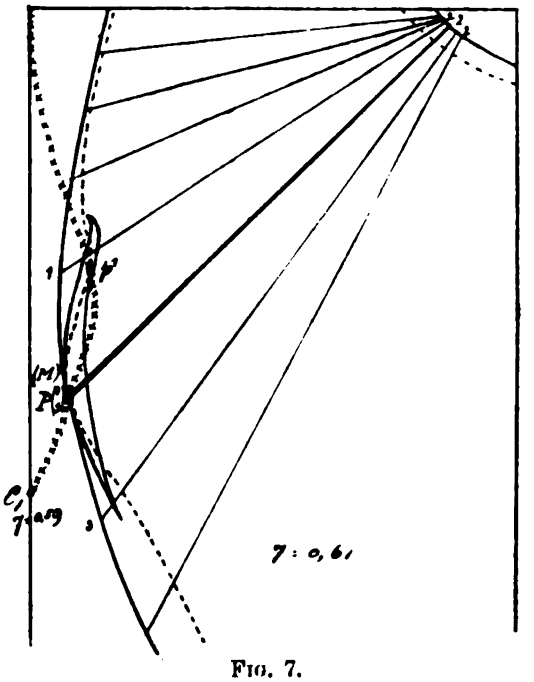



FIG. 7.

Dans cette fig. 8 on voit aussi comment la ligne connodale originale, qui est interrompu

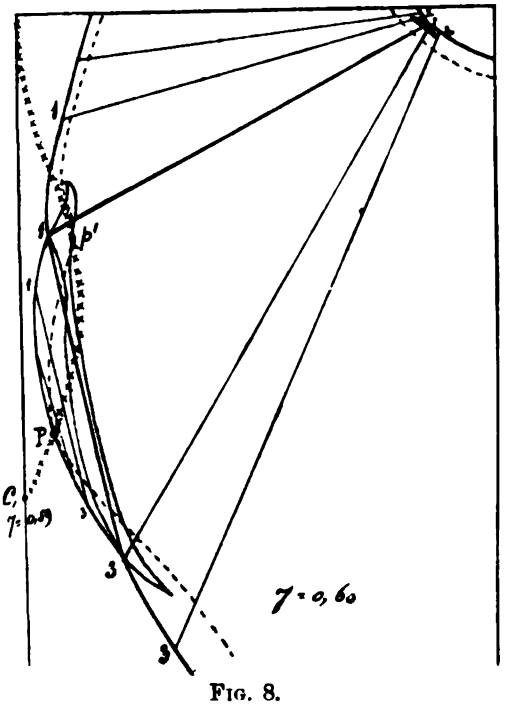



FIG. 8.

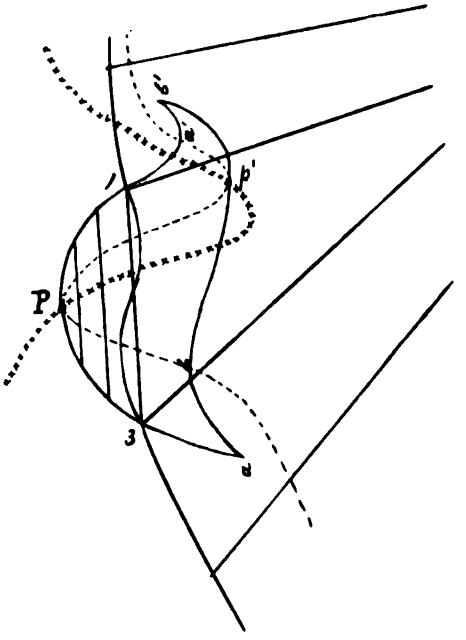



FIG. 8a.

maintenant aux sommets 1 et 3 du triangle de trois phases,

continue son cours sur la surface $\Psi$. A cette partie cachée correspond la soidisante „crête" sur la ligne connodale en 2. (Voir aussi fig $8^a$, qui est de nouveau schématique.)

A $\tau = 0{,}59$ (fig. 9) le nouveau point de plissement $P$ atteint la température critique la plus basse $C_1$, et dès ce moment le pli latéral reste ouvert du côté $x = 0$ jusqu'aux températures les plus basses (fig. 10).

Les figg. $11^a$ jusqu'a $11^d$ représentent les lignes $p, x$. Dans la fig. $11^a$ on voit surgir en $P$, chez $\tau = 0{,}61$, pour la première fois l'équilibre entre trois phases. (comparer fig. 7). Fig. $11^b$ ou meilleur fig. $11^c$ correspond à fig. 8, car dans la fig. 8 $x_1$ est $< x_3$ (p. e. éther et $H_2O$), de sorte que la

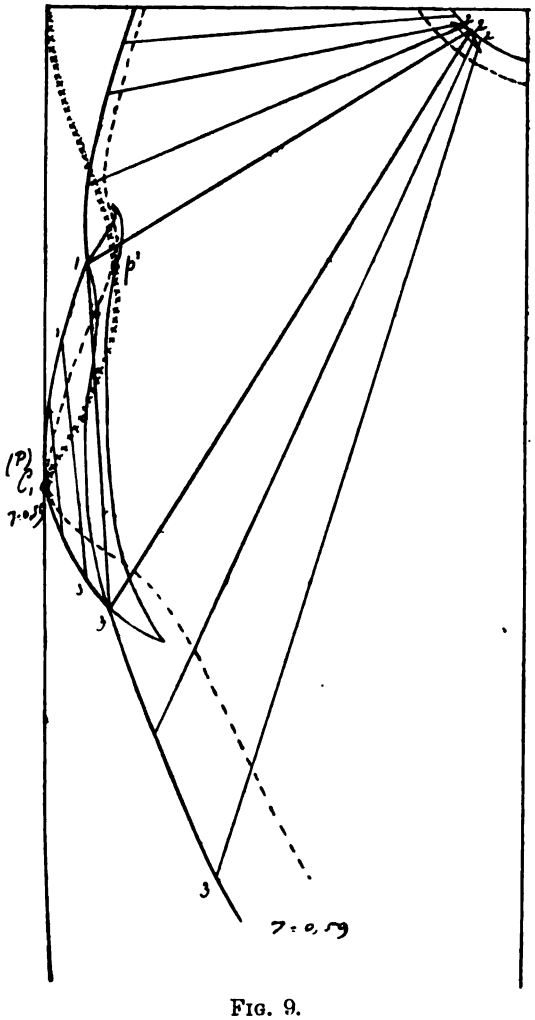


Fig. 9.

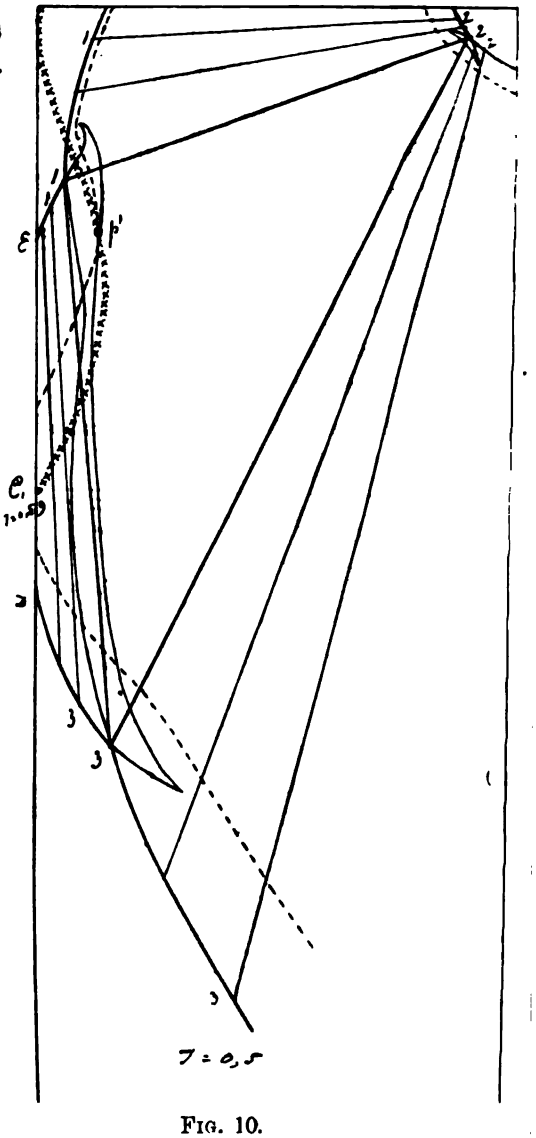


Fig. 10.

pression de trois phases est supérieure aux tensions de vapeur des composantes. (voir le § 1). Lorsque au contraire $x_1 > x_3$ (ce

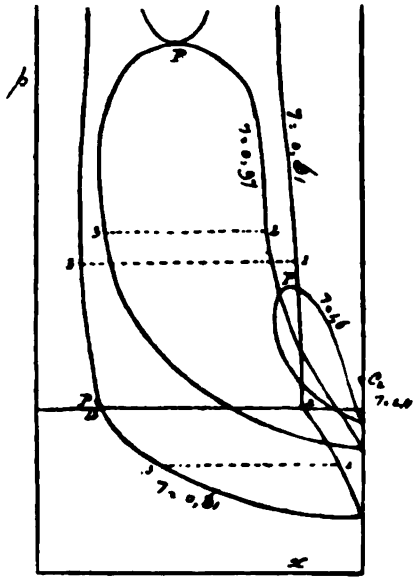


FIG. 11[a] (voir figg. 1, 3 et 7).

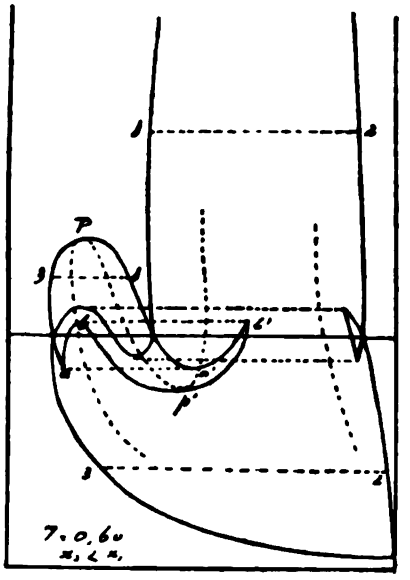


FIG. 11[b] (voir fig. 8).

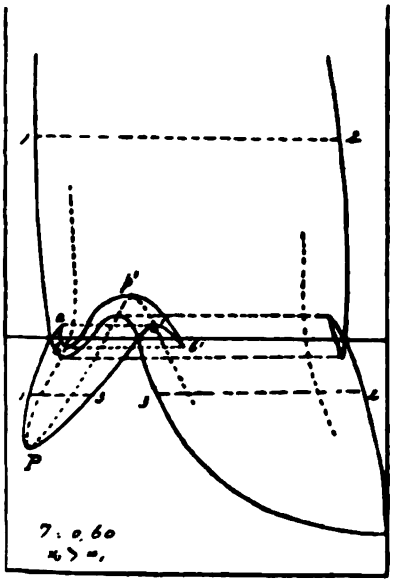


FIG. 11[c] (voir fig. 8).

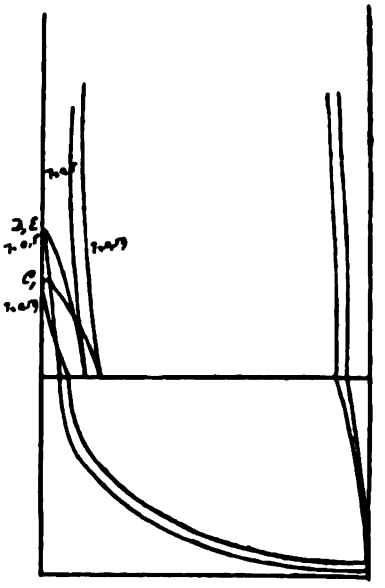


FIG. 11[d] (voir figg. 9 et 10).

qui sera toujours le cas quand $b_1'' = b_2$), on aura la fig. 11[b]. Enfin la fig. 11[d] correspond aux figg. 9 et 10.

La fig. 12 donne la représentation $p$, $T$ des courbes de plissement. Il est remarquable ici, que la ligne $C_1A$ présente en $R_1$, où la courbe spinodale *touche* la courbe de plissement (comp. fig. 5), un

*point de rebroussement.* Nous démontrerons cela dans un paragraphe suivant.

Ainsi que nous avons déjà déduit dans un Mémoire précédent (V. K. A. v. W. l. c.), la pression $p$ s'approche en $A$, où $T = 0$, à $-27\ p_1$. (Evidemment cette déduction se rapporte aussi au cas général $\beta \gtrless 0$). Une comparaison avec la fig. 7 nous fait voir, que le point $M$, où commence la pression de trois phases, correspond à une température inférieure à celle de $R_1$.

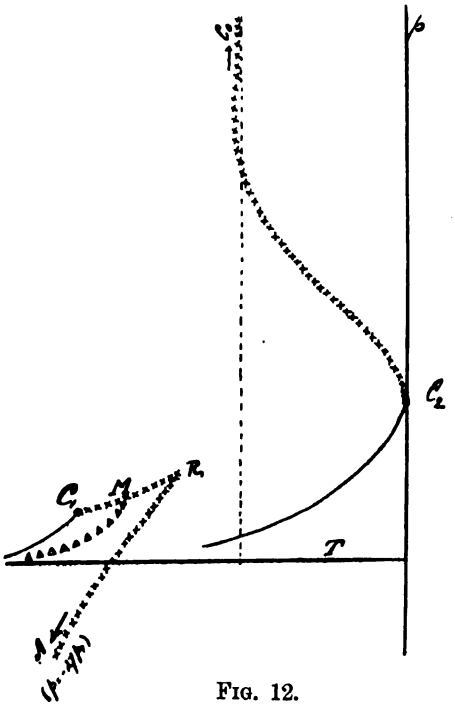



FIG. 12.

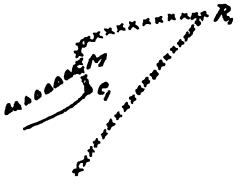



FIG. 12a.

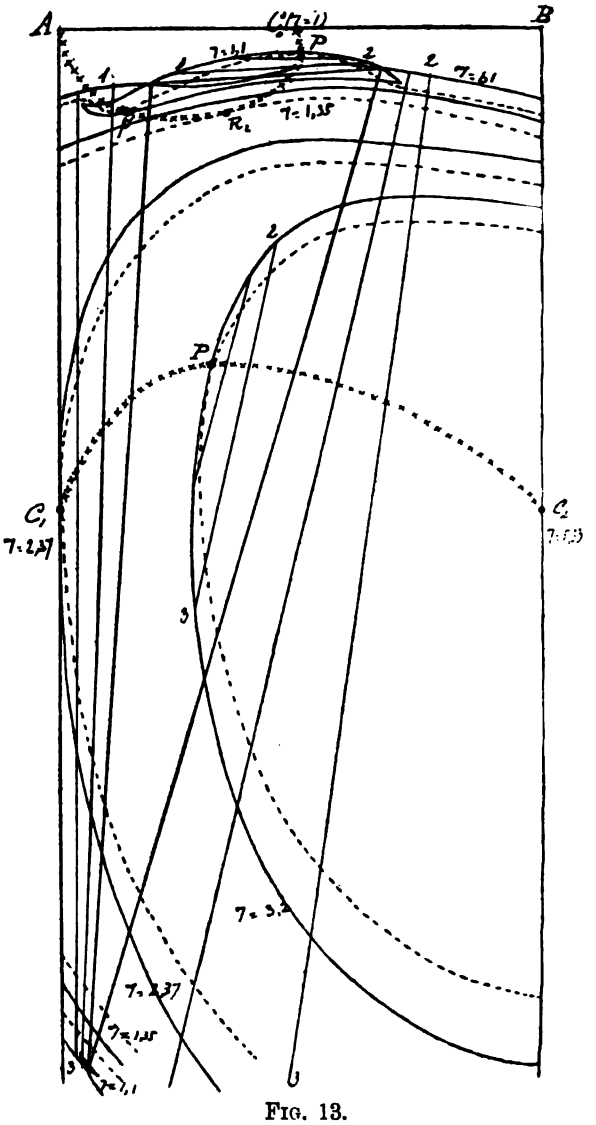



FIG. 13.

Lorsque la pression de trois phases est comprise entre les tensions de vapeur des deux composantes (les lignes, partant de $C_1$ et $C_2$,

représentent les courbes de ces tensions), est en d'autres termes $x_1 > x_3$ (voir aussi fig. 11[b]), on aura le fig. 12; est par contre $x_3 > x_1$ (fig. 11[c]) et la pression de trois phases constamment supérieure aux tensions de vapeur des deux composantes, on aura la fig. 12[a]. La ligne $C_1R$ présente alors un minimum. [Dans les figures la courbe de pression de trois phases est toujours indiquée par Δ Δ Δ].

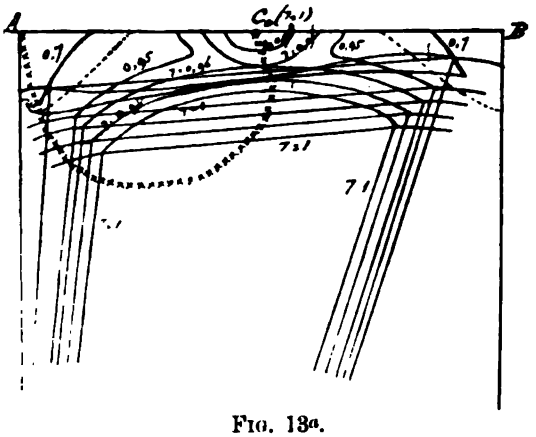



Fig. 13[a].

*b*) *Type Principal II* (Voir les figg. 13—15).

La fig. 13, complétée avec fig. 13[a], reproduit suffisamment les relations. A une température un peu plus basse que celle de $R_2$, où la courbe spinodale touche encore la courbe de plissement (c.-à d. $C_0A$), il apparaît de nouveau un équilibre entre trois phases. Ce n'est pas à présent la phase *gazeuze* 3 qui se sépare en 3 et 1, comme chez le Type I, mais

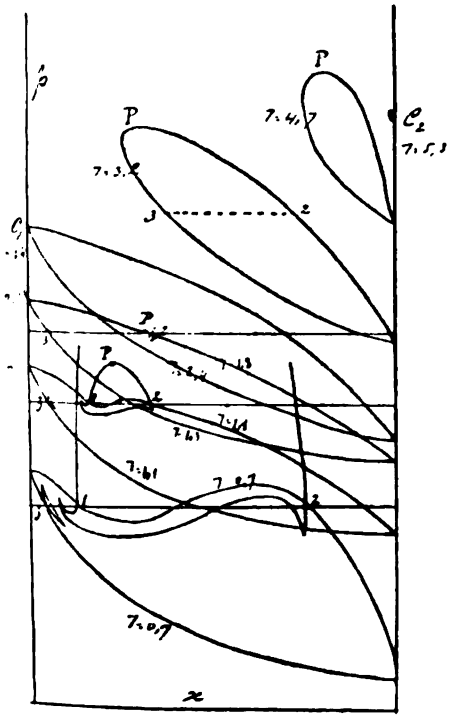



Fig. 14 (voir les figg. 13 et 13[a]).

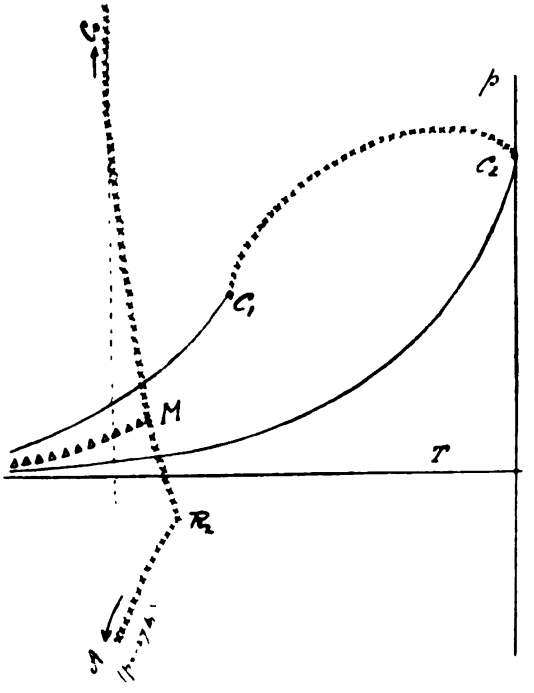



Fig. 15.

c'est la phase *liquide* 2, qui se sépare en deux autres phases *liquides* 2 et 1. Et de même que chez le Type I les points de plissement entre $M$ (situé entre $R_1$ et $C_1$) et $A$ étaient irréalisables (voir aussi fig. 12), c'est ici également le cas avec ceux entre $M$ (situé entre $R_2$ et $C_0$) et $A$. L'équilibre entre trois phases formé se maintient jusqu'aux températures les plus basses (voir fig. 13[a]). De nouveau il se présente une température critique minimale au voisinage de $C_0$, comme chez le type I. A des températures inférieures à $T = 0{,}96T_0$ on ne peut plus rendre homogène les deux phases liquides 1 et 2 par pression, quelque forte qu'elle soit.

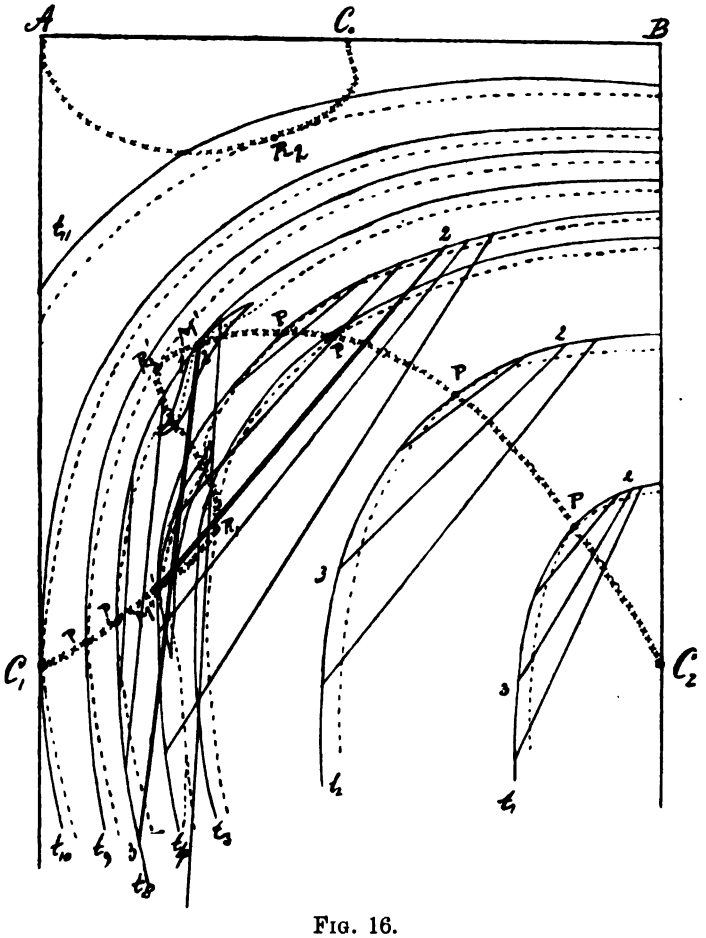



Fig. 16.

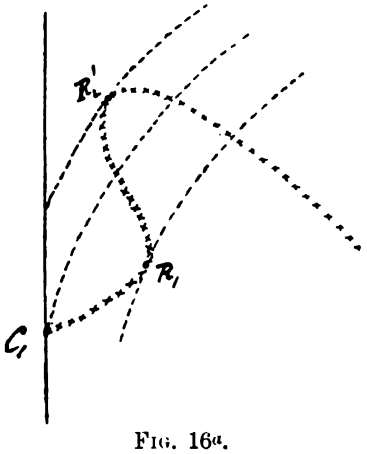



Fig. 16[a].

Dans la fig. 14 on voit les courbes $p$, $x$ successives. Cette figure n'exige pas d'explication spéciale.

Finalement nous trouvons dans la fig. 15 la représentation $p$, $T$. La courbe de pression de trois phases est comprise ici entre les deux lignes de tension de vapeur, cequi correspond aux figg. 13 et 14, où dans le voisinage de $x = 0$ on a $x_3 < x_1$.

c) *Type Principal III.* (Voir les figg. 16—21).

La possibilité de ce type chez les mélanges de corps *normales* sera examiné plus tard spécialement. Lorsqu'il se présente (e. a chez des mélanges de $C_2H_6$ et $C_2H_5OH$ etc, chez le triéthylamine et $H_2O$), la courbe de plissement $C_1C_2$ aura l'allure indiquée dans la fig. 16.

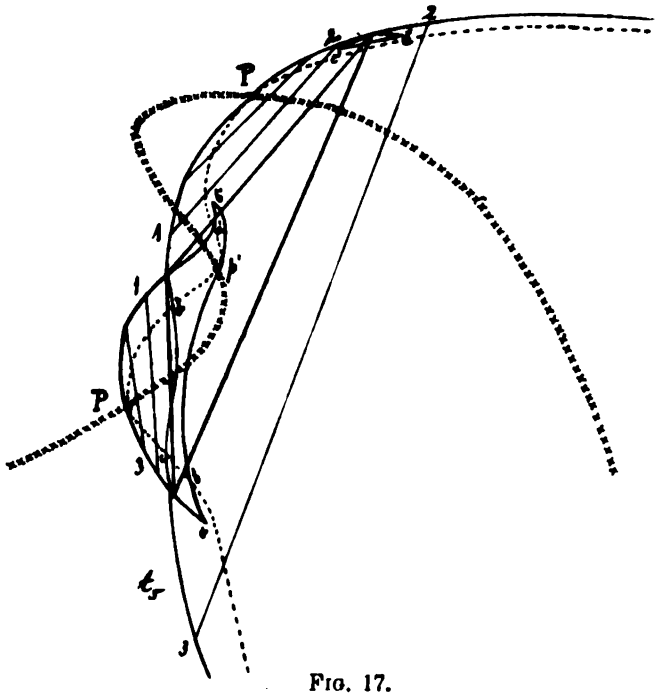


Fig. 17.

En descendant de la température critique la plus élevée en $C_2$, il se présentera de nouveau un point de plissement double $R_1$ à la température, indiquée par $t_3$; par conséquent il se formera une ligne connodale isolée comme dans la fig. 6, quand la température sera un peu inférieure à $t_3$. Cela continue jusqu'à ce que cette ligne fermée commence à émerger de la courbe connodale proprement dite du pli principal en $M''$

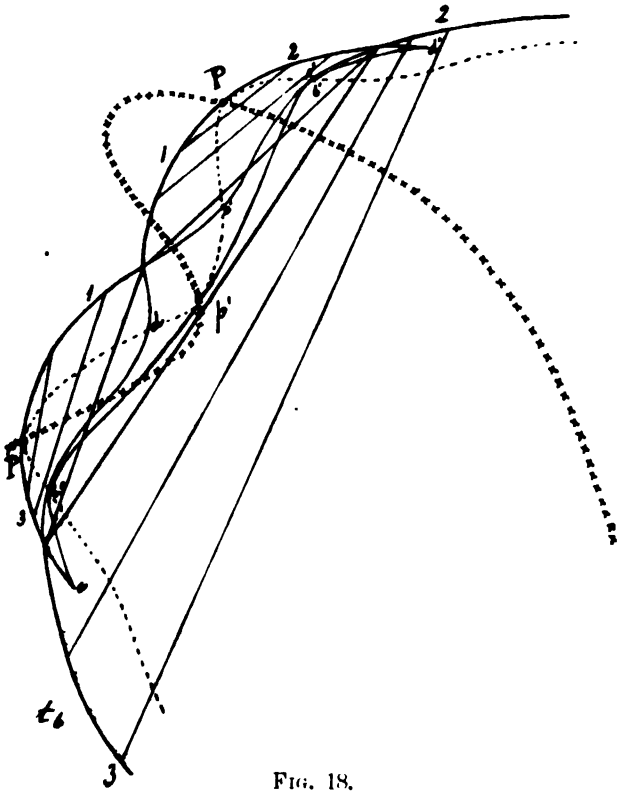


Fig. 18.

chez $t_4$, où la phase 3 commencera à se séparer en 3 et 1, comme dans la fig. 7. Cette séparation est représentée dans la fig. 17. Tout comme dans la fig. 8, il s'est produit un équilibre entre trois phases. L'allure des diverses lignes connodales est encore tout-à-fait la même que dans le cas analogue de la fig. 8; seulement là le point de plissement $P$ du pli principal avait déjà disparu. Ce

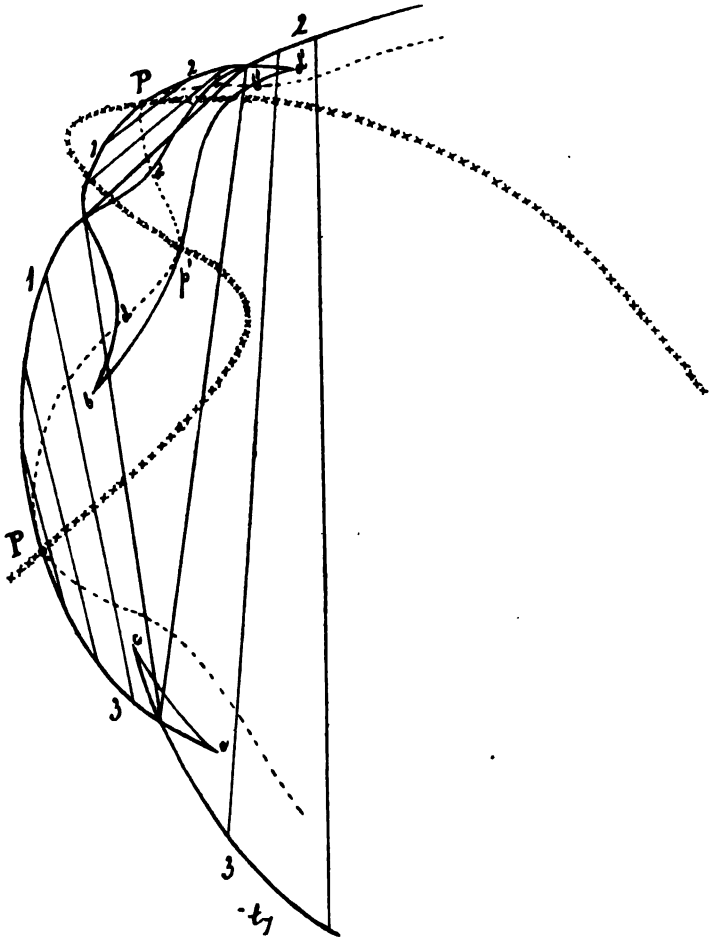



FIG. 19.

cours a été déjà indiqué — nous l'avons déjà remarqué plus haut — par M. KORTEWEG, et aussi M. VAN DER WAALS l'a accepté dans un de ses derniers Mémoires (l. c.) sur la transformation d'un pli principal en un pli latéral, et inversement.

Cependant, l'équilibre entre trois phases formé n'est pas de longue durée, comme nous le verrons. A une température encore un peu plus basse $t_6$ (fig. 18) une transformation très remarquable aura lieu, également indiquée par M. KORTEWEG (l. c. p. 318,

fig. 34), et plus tard par M. VAN DER WAALS (l. c.). Les lettres $a$, $b$, $c$, $d$ et $a'$, $b'$, $c'$, $d'$ font clairement ressortir la transformation, quand on compare les figg 17 et 18

Encore un peu plus tard, à $t_7$ (fig. 19), les rôles sont intervertis; le pli latéral de la fig. 17 est devenu maintenant pli principal, et inversement le pli principal s'est développé en pli latéral. Nous faisons remarquer, que la „queue" en $b$ est toujours tourné du côté du pli principal, aussi bien dans la fig. 17 que dans la fig. 19. Egalement la „crête" a changé de place après la transition de la fig. 18.

Et après, la transformation reprend son cours normal. Il arrive un moment, à $t_8$ (représentée dans la fig. 16), où la ligne connodale isolée de la fig. 19 commence à disparaître dans la connodale proprement dite du pli principal. Cela a lieu en $M'$, et en même temps s'évanouit l'équilibre entre trois phases, dont l'existence a donc été passagère. Les deux phases 1 et 2 sont redevenus identiques, et après on aura seulement coëxistence de 3 et 2 comme auparavant, et comme chez le Type II avant $M$ au voisinage de $R_2$. Le point de plissement du pli principal subsiste encore pendant quelque temps, mais il disparaîtra également bientôt (en $C_1$) [1]). De même la ligne connodale fermée existera encore passé $M'$ un instant à l'intérieur de la connodale proprement dite, deviendra de plus en plus petite, et finit par disparaître en $R_2'$, où la ligne spinodale touche encore une fois la ligne de plissement (fig. 16 à $t_9$). La température $t_{10}$ est la plus basse des deux températures critiques des composantes, celle de $C_1$, et à des températures encore plus basses on commence à s'approcher peu à peu de la seconde courbe de plissement, c.-à-d. $C_0A$.

A $t_{11}$ une ligne spinodale touchera pour la troisième fois la ligne de plissement, savoir la branche $C_0A$. Encore il se présentera à une température un peu plus basse un équilibre entre trois phases, par une nouvelle séparation de 2 en 1 et 2, et main-

---

[1]) La température de $R_2'$ (et de $M'$) peut être aussi plus basse que celle de $C_1$. Cela se présente en effet dans le cas des mélanges nommés ci-dessus. Le point $P$ du pli principal a déjà disparu alors avant que 1 et 2 coïncident en $M'$. Voir aussi fig. 16$^a$, qui indique pour ce cas le cours de la ligne de plissement en rapport avec celui de quelques lignes spinodales à des températures différentes.

tenant définitif, jusqu'aux plus basses températures. Tout celà est tout-à-fait identique à ce que nous avons vu dans les figg. 13 et 13ª du Type II.

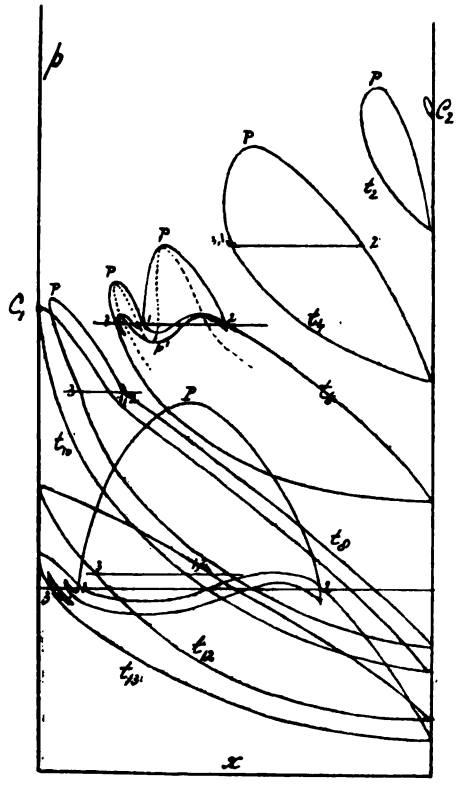


Fig. 20.

Ce qui est important, à un point de vue théorique, dans ce remarquable troisième type principal (très anomal), c'est qu'après la coïncidence des deux phases liquides 1 et 2 en $M'$ ($t_8$), il *doit* se présenter de nouveau une séparation de la phase liquide homogène en deux autres chez un abaissement suffisant de la température, et cela en $M$ un peu avant $R_2$. (voir aussi la fig. 21).

Remarquons encore, que le point $M$ des figg. 7 et 12, et aussi dans la fig. 15, constitue une limite de miscibilité „*supérieure*", c.-à-d qu'à des températures, *supérieures* à la température de ce point, les deux phases 3,1 ou 2,1 formeront une seule phase homogène. Il en est de même des points $M$ et $M''$ des figg. 16 et 21. Au dessus de la température de $M$ 1 coincide avec 2; au-dessus de celle de $M''$ 1 avec 3. Mais le point $M'$ est une limite de

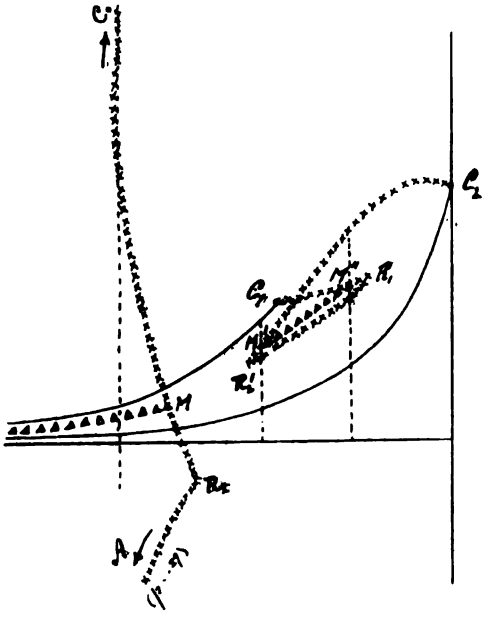


Fig. 21.

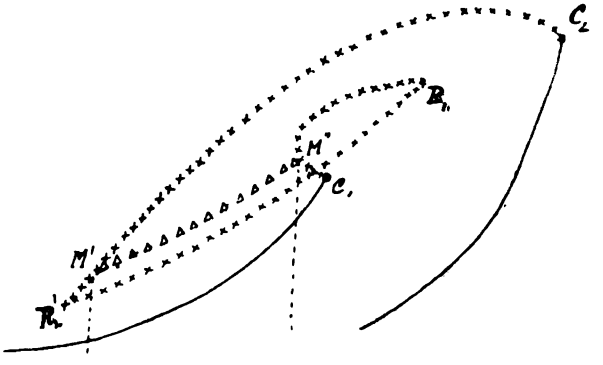


Fig. 21ª.

miscibilité „*inférieure*", car à des températures, *inférieures* à celle de $M'$, les phases 1,2, séparées à des températures plus élevées, coïncideront en une seule phase homogène.

Chez la courbe de plissement $C_1C_2$ du troisième type (fig. 16) aucun des points, compris entre $M''$, un peu en deça de $R_1$, et $M'$, un peu au delà de $R_2'$, n'est réalisable. Ils formeront de nouveau la série de points de plissement cachés $p'$, désignés dans les figg. 17—19.

La fig. 20 donne les représentations $p, x$ du Type III. Elles seront claires sans explication spéciale. (A $t_6$ est choisi exactement le moment de transition de la fig. 18; quant aux représentations $p, x$ des figg. 17 et 19, on pourra facilement se les figurer).

Et le même sera le cas avec les figg. 21 et 21$^a$, où sont données les représentations $p, T$ de la courbe de plissement. Qu'on remarque de nouveau les trois points de *rebroussement* $R_1$, $R_2$ et $R_2'$. Dans la fig. 21 la pression de trois phases est comprise entre les tensions de vapeur des composantes; dans la fig. 21$^a$ elle est extérieure à ces deux. $C_1R_1$ aura dans ce cas dernier, tout comme dans la fig. 12$^a$, un cours rétrograde.

3) Nous démontrerons maintenant, que le point $R_1$ de la fig. 12, et de même le point $R_2$ de la fig. 15 et les points $R_2$, $R_2'$ et $R_1$ de la fig. 21 sont des *points de rebroussement*

Soit

$$f = RT$$

l'équation de la ligne *spinodale*. Alors on aura identiquement, en différentiant:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{dv}{dx}\right)_{sp} = 0.$$

En écrivant, pour abréger, $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{sp} = \varphi_{sp}$ (indiquant la direction de la tangente), nous aurons donc:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\varphi_{sp} = 0.$$

Nouvelle différentiation le long de la ligne spinodale donne:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial v}\varphi_{sp} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\varphi^2_{sp} + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)_{sp} = 0 \quad . \; . \; . \quad (a)$$

Car p e. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right)_{sp}$, et $\frac{d\varphi_{sp}}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)_{sp} = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{sp}$.

L'équation de la courbe de *plissement* sera (voir § 1):

$$F = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{dv}{dx}\right)_{p,T} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\varphi_p = 0.$$

Car dans un point de plissement $\varphi_{sp}$ et $\varphi_p$ seront égaux, puisque les deux points coïncidents de la ligne spinodale, ou bien de la ligne connodale, qui la touche dans le point de plissement, auront la même pression. Dans l'équation $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\varphi_{sp}$ il faut donc remplacer $\varphi_{sp}$ par $\varphi_p$, ce qui sera aussi $= \varphi_{p,T}$, parce que les deux points coïncidents auront aussi la même température.

De l'équation $F = 0$, il s'ensuit immédiatement:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\varphi_{pl} = 0,$$

ou bien, en remplaçant $F$ par sa valeur:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{dx\,dv}\varphi_p + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \varphi_p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\varphi_p + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \varphi_p}{\partial v}\right)\varphi_{pl} = 0. \quad (b)$$

Et puisque $\varphi_{sp} = \varphi_p$, et de même $\varphi_{pl} = \varphi_{sp}$, parce que la ligne spinodale *touche* la ligne de plissement dans le point $R_1$, on aura aussi:

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial v}\varphi_p + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\varphi_p^2\right] + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{sp} = 0 \ldots \quad (a')$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial v}\varphi_p + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\varphi_p^2\right] + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{p} = 0 \ldots \quad (b')$$

Car $\frac{\partial \varphi_p}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_p}{\partial v}\varphi_p = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_p$.

Il s'ensuit de ces deux équations, qu'on aura en $R_1$:

$$\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{sp} = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{p,T},$$

et que par conséquent la spinodale et l'isopièste auront en ce point un *contact du deuxième ordre*, c.-à-d. que ces deux courbes se traversent mutuellement au point de contact.

[Dans les figg. 5 et 5[a] les deux courbes présentent en $R_1$ un *point d'inflexion*. Or, cela n'est pas exact, comme j'ai découvert pendant la correction de ce Mémoire. Car alors $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{p,T}$ serait $= 0$, et cela impliquerait des conséquences, qui sont absolument fausses. La spinodale et l'isopièste sont donc situées tous les deux à la *droite* de la tangente commune en $R_1$, tandis que la courbe de plissement se tient à la *gauche* de cette tangente. Au dessus du point $R_1$ l'isopièste se trouve à la *droite* de la spinodale; au dessous de ce point il se trouve à sa *gauche*. Il faut corriger dans ce sens les figg. 5 et 5[a].

La conception d'un point d'inflexion dans la spinodale trouve en apparence un appui dans la fig. 6[a]. Mais lorsque les deux points de plissement $p$ et $p'$ sont sur le point de coïncider en $R_1$ (voir fig. 6), la connodale fermée $a\,p\,a'\,b'\,p'\,b\,a$ est touché en $p'$ par la spinodale de tel façon, que ces deux courbes ne tournent pas leur côté *concave* vers la gauche, comme dans la fig. 6[a], mais de nouveau leur côté *convexe*, de sorte que la spinodale aura une courbure *continue* vers le côté droit, et qu'il ne se présentera pas un point d'inflexion, quand $p$ et $p'$ coïncident en $R_1$].

Maintenant nous pouvons procéder plus loin. On aura identiquement:

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{pl} = \frac{\partial p}{\partial T} + \frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{dx}{dT}\right)_{pl} + \frac{\partial p}{\partial v}\left(\frac{dv}{dT}\right)_{pl},$$

parce que sur la ligne de plissement $v$ et $x$ seront des fonctions de $T$ seulement.

Dans un point de plissement on aura:

$$RT = f(x, v) \quad \text{et} \quad F(x, v) = 0$$

combiné's, donc

$$R\left(\frac{dT}{dx}\right)_{pl} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\varphi_{pl}$$

$$R\left(\frac{dT}{dv}\right)_{pl} = R\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{pl} : \varphi_{pl}.$$

Nous aurons donc:

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{pl} = \frac{\partial p}{\partial T} + \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial v}\varphi_{pl}\right)\left(\frac{dx}{dT}\right)_{pl},$$

ou bien

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{pl} = \frac{\partial p}{\partial T} + R\,\frac{\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial p}{\partial v}\,\varphi_{pl}}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\,\varphi_{pl}},$$

c.-à-d.

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{pl} = \frac{\partial p}{\partial T} + R\,\frac{\dfrac{\partial p}{\partial v}}{\dfrac{\partial f}{\partial v}}\,\frac{\varphi_{pl} - \varphi_p}{\varphi_{pl} - \varphi_{sp}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Car il s'ensuit de $p = \psi(T, x, v)$, lorsque $dp = 0$ :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_T + \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T \left(\frac{dv}{dx}\right)_{p,T} = 0,$$

donc

$$\left(\frac{\dfrac{\partial p}{\partial x}}{\dfrac{\partial p}{\partial v}}\right)_T = -\left(\frac{dv}{dx}\right)_{p,T} = -\varphi_p.$$

Et de même il s'ensuit de $f(x, v) = 0$ :

$$\left(\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial v}}\right)_{sp} = -\left(\frac{dv}{dx}\right)_{sp} = -\psi_{sp}.$$

Dans l'équation (1) $\frac{\partial p}{\partial T}$ sera positif, $\frac{\partial p}{\partial v}$ négatif et $\frac{\partial f}{\partial v}$ positif. Mais tous ces trois grandeurs resteront *finies* en $R_1$. Il n'en est pas de même de la fraction $\frac{\varphi_{pl} - \varphi_p}{\varphi_{pl} - \varphi_{sp}}$, qui tend à $\frac{0}{0}$, de sorte que nous examinerons quelle sera sa valeur-limite à $R_1$.

Or, on a :

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{pl} &= (\varphi_0 + \varphi'_0\,dx + \varphi''_0\,dx^2 + \ldots)_{pl} \\ \varphi_{sp} &= (\varphi_0 + \varphi'_0\,dx + \varphi''_0\,dx^2 + \ldots)_{sp} \\ \varphi_p &= (\varphi_0 + \varphi'_0\,dx + \varphi''_0\,dx^2 + \ldots)_p \end{aligned}\right\},$$

et nous pouvons écrire :

$$\frac{\varphi_{pl} - \varphi_p}{\varphi_{pl} - \varphi_{sp}} = \frac{[(\varphi'_0)_{pl} - (\varphi'_0)_p] + [(\varphi''_0)_{pl} - (\varphi''_0)_p]\,dx + \ldots}{[(\varphi'_0)_{pl} - (\varphi'_0)_{sp}] + [(\varphi''_0)_{pl} - (\varphi''_0)_{sp}]\,dx + \ldots}.$$

Mais nous avons prouvé plus haut qu'en $R_1$ $(\varphi'_0)_p = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{p,T}$ est égal à $(\varphi'_0)_{sp} = \left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_{sp}$. L'expression précédente devient donc:

$$\frac{\varphi_{pl} - \varphi_p}{\varphi_{pl} - \varphi_{sp}} = 1 + \frac{(\varphi''_0)_{sp} - (\varphi''_0)_p}{(\varphi'_0)_{pl} - (\varphi'_0)_p} dx + \ldots$$

Et puisque $(\varphi''_0)_{sp} = {}^1/_2 \left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)_{sp}$ et $(\varphi''_0)_p = {}^1/_2 \left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)_{p,T}$ auront des valeurs *finies*, et *différentes* entre elles, et parce qu'également $(\varphi'_0)_{pl}$ et $(\varphi'_0)_p$ seront différentes [seulement $(\varphi'_0)_p = (\varphi'_0)_{sp}$], on voit clairement, que la valeur-limite à $R_1$ de la fraction désignée sera *l'unité*, de sorte qu'on peut écrire pour (1):

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)_{pl} = \frac{\partial p}{\partial T} - \Theta,$$

quand on remplace la grandeur négative $R\frac{\partial p}{\partial v} : \frac{\partial f}{\partial v}$ par $-\Theta$.

Et maintenant il sera évident, que dans la fig. 12 la courbe $p = f(T)$ n'aura pas un tangent vertical à $R_1$, puisque $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{pl}$ reste *fini*. Il y aura donc un point de *rebroussement*, où les deux parties de la courbe $p = f(T)$, c.-à-d. $C_1R_1$ et $AR_1$ se toucheront, ayant la même valeur-limite de $\left(\frac{dp}{dT}\right)_{pl}$.

Et pour les autres points de plissement doubles hétérogènes $R_2$ et $R'_2$ (fig. 15 et 21) on aura les mêmes relations.

---

4) Dans un Mémoire précédent dans ces Archives (l. c.) nous avons trouvé pour la détermination du *point double* des deux branches de la courbe de plissement, dans le cas tout-à-fait général, les formules suivantes.

$$\begin{cases} q = \dfrac{2k(1-2k)}{1-2k-k^2} \\ p = \dfrac{(1-2k)(1-4k-k^2) + (1-k)(1-3k)^{1/2}(2-8k+9k^2)}{1-9k+15k^2-3k^3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = (4-35k+96k^2-85k^3)+(-3+20k-29k^2)\sqrt{\ } \;;\; A' = (\ )-(\ )\sqrt{\ } \\ B = \tfrac{1}{3}(-2+3k+12k^2-15k^3)+(-1+2k-3k^2)\sqrt{\ } \;;\; B' = \tfrac{1}{3}(\ )-(\ )\sqrt{\ } \\ P = 2kA^2+4(1-3k)^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi = \varphi + x = -\dfrac{3B'(1-3k)^2}{1-2k-k^2}\sqrt{\dfrac{\frac{1}{2}k}{P}} \\ x = \tfrac{1}{2} + A\sqrt{\dfrac{\frac{1}{2}k}{P}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\Theta}{\sqrt{\pi}} = \dfrac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}} = 1+\dfrac{1}{\varphi} = 1+\dfrac{1}{\psi-x} = 1+\gamma \\ \dfrac{\Theta}{\pi} = \dfrac{b_2}{b_1} = 1+n = 1+\dfrac{1}{{}^p/_q\,\psi - x} = 1+\delta \end{cases} \qquad \begin{cases} \Theta = \dfrac{(\gamma+1)^2}{\delta+1} \\ \pi = \dfrac{(\gamma+1)^2}{(\delta+1)^2} \end{cases}$$

D'ailleurs $\omega = \dfrac{b_1}{v} = p - \dfrac{qx}{\psi}$.

Les valeurs de $\Theta$ et de $\pi$, c.-à-d. de $\dfrac{T_2}{T_1}$ et de $\dfrac{p_2}{p_1}$, pour lesquelles un point double se présente, peuvent donc être exprimées en la seule grandeur $k$, de sorte qu'il existera une relation $f(\Theta, \pi) = 0$ pour le cas du point double. Or, cette relation ne peut pas être mise dans une forme explicite.

Puisque $p = (1+nx)\,\omega = \dfrac{b}{v}$, la valeur de $p$ sera comprise entre $p = {}^1/_3\,(v = 3b)$ et $p = 1\,(v = b)$. Avec ces valeurs correspondent des valeurs de $k$ entre ${}^1/_3$ et 1.

Voici un tableau pour les valeurs diverses de $p$, $q$, $A$, $B'$, etc., calculées à l'aide des formules précédentes.

| $k$ | $p$ | $q$ | $p/q$ | $A$ | $B'$ | $P$ | $\sqrt{\frac{1/2\,k}{P}}$ | $\psi$ | $x$ | $r/b = 1/p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,333 | 0,333 | 1 | 0,333 | 0 | 0,148 (4/27) | 0 | $\infty$ | 0 | 1 | 3 |
| 0,34 | 0,352 | 1,06⁵ | 0,330 | 0,0031 | 0,157 | $664\times10^{-8}$ | 160,0 | −0,148 | 0,996 | 2,84 |
| 0,36 | 0,402 | 1,34 | 0,300 | 0,0123 | 0,185 | $139\times10^{-6}$ | 35,94 | −0,850 | 0,942 | 2,49 |
| 0,38 | 0,442 | 1,91 | 0,231 | 0,0196 | 0,214⁵ | $622\times10^{-6}$ | 17,48 | −2,304 | 0,843 | 2,26 |
| 0,39 | 0,459 | 2,53 | 0,182 | 0,0216 | 0,230 | 0,00113 | 13,13 | −3,855 | 0,784 | 2,18 |
| 0,40 | 0,474 | 4 | 0,119 | 0,0218 | 0,246 | 0,00195 | 10,12 | −7,457 | 0,721 | 2,11 |
| 0,414 | 0,494 | $\pm\infty$ | 0 | 0,0181 | 0,269 | 0,00400 | 7.19⁹ | $\mp\infty$ | 0,630 | 2,02 |
| 0,50 | 0,577 | 0 | $\mp\infty$ | −0,197 | 0,425 | 0,145 | 1,31³ | 1,673 | 0,241 | 1,73 ($\sqrt{3}$) |
| 1 | 1 | 1 | 1 | −32 | 1,333 | 2133 1/3 | 0,153¹ | 0,123 | 0,010 | 1 |

| $k$ | $\gamma$ | $\delta$ | $\theta$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,333 | —1 | —1 | 0 | 9 |
| 0,34 | —0,874 | —0,957 | 0,36[8] | 8,53 |
| 0,36 | —0,558 | —0,835 | 1,19 | 7,21 |
| 0,38 | —0,318 | —0,727 | 1,71 | 6,26 |
| 0,39 | —0,216 | —0,673 | 1,88 | 5,76 |
| 0,40 | —0,122 | —0,623 | 2,04 | 5,42 |
| 0,414 | 0 | —0,550 | 2,22 | 4,94 |
| 0,50 | 0,698 | 0 | 2,89 | 2,89 |
| 1,00 | 8,899 | 8,899 | 9,90 | 1 |

*Remarques.*

*a*) Lorsqu'on veut calculer la valeur de $k$, étant donnée celle de $q$, on aura:

$$k = \frac{1 + q \pm \sqrt{1 - 2q(1-q)}}{4 - q} = \frac{q}{1 + q \mp \sqrt{\ }} .$$

Dans un Mémoire cité (ces Archives) j'avais seulement écrit le signe supérieur; cependant le signe inférieur satisfera également, et cela déjà dans l'équation pour $u$ (l. c.). Le signe supérieur correspond avec les valeurs de $k$, comprises entre $0{,}414 = -1 + \sqrt{2}$ et 1; le signe inférieur avec celles, comprises entre $0{,}333 = {}^1/_3$ et 0,414.

*b*) Pour le calcul des valeurs du tableau précédent, il est utile de mémorer les relations suivantes:

$$BB' = -{}^2/_9 N^2 ; \qquad N = 1 - 9k + 15k^2 - 3k^3$$

$$AA' = {}^2/_3 (1 - 3k) L ; \quad L = 15 - 219k + 1238k^2 - 3390k^3 + \\ + 4515k^4 - 2351k^5$$

$$p = \frac{T}{N} ; \quad TT' = {}^1/_3 MN ; \quad M = 1 - 3k - 9k^2 + 23k^3 ,$$

de sorte que l'on a aussi $p = {}^1/_3 \frac{M}{T'}$.

Dans l'expression pour $p$ le signe — dans $T$ ne satisfera pas l'équation (a) (ces Arch., l.c.) de la courbe de plissement.

Les racines de $N = 0$ sont $k = 0{,}14842$ ; 0,52755 ; 4,32403.

Les racines de $M = 0$ sont $k = -0{,}34669$ ; 0,26534 ; 0,47265.

Seulement pour $k = 0{,}53$ et $k = 0{,}27$ on a $T = 0$, tandis que $T' = 0$ pour $k = 0{,}15$ et 4,32, et pour $k = -0{,}35$ et 0,47

Nous aurons donc, quant à la valeur de $p$:

| $k =$ | $-0{,}35$ | $0{,}15$ | $0{,}27$ | $0{,}47$ | $0{,}53$ | $4{,}32$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $T =$ | fini | fini | 0 | fini | 0 | fini |
| $N =$ | fini | 0 | fini | fini | 0 | 0 |
| $T' =$ | 0 | 0 | fini | 0 | fini | 0 |
| $M =$ | 0 | fini | 0 | 0 | fini | fini |
| $p =$ | fini | $\infty$ | 0 | fini | fini | $\infty$ |

Les valeurs de $k$, étant comprises dans notre tableau entre $1/3$ et 1, il est utile de savoir, que les valeurs $k = 0{,}47$ ($M = 0$) et $0{,}53$ ($N = 0$) donnent des valeurs *finis* pour $p$.

Une autre manière de déterminer la valeur de $p$ dans les cas où $M$ ou $N$ sont $= 0$, est la suivante. L'équation quadratique pour $p$ était (voir ces Archives, l.c.):

$$3\,N p^2 - 6\,p\,(1 - 2\,k)\,(1 - 4\,k - k^2) + M = 0.$$

Pour $M = 0$ cela donne:

$$p = 0 \quad \text{ou} \quad p = \frac{2\,(1 - 2\,k)\,(1 - 4\,k - k^2)}{N}\,.$$

Pour $N = 0$ on trouve:

$$p = \infty \quad \text{ou} \quad p = \frac{M}{6\,(1 - 2\,k)\,(1 - 4\,k - k^2)}\,.$$

*c*) L'expression pour $\psi$, tirée d'une formule pour $\frac{\psi^2}{x\,(1 - x)}$ [ces Archives, l.c., formule (12)] aura deux signes; nous nous sommes bornés au signe —, parce que le signe + donnera pour $\Theta$ et $\pi$ une série de valeurs, *réciproques* à celles que donne le signe —.

La formule (13) [ces Archives, l.c.] donnera de même deux valeurs pour $x$, mais la seconde valeur ne satisfera pas, parce que [voir ces Archives entre (11) et (12)] nous avons quadraté une certaine équation.

*d*) On voit, que la valeur de $A$ sera $= 0$ pour une valeur de $k$, comprise entre $k = 0{,}414$ et $k = 0{,}50$; cette valeur sera une racine de $L = 0$, et on aura alors $x = 0{,}5$.

*e*) Les valeurs $\psi = 0$ et $x = 1$ pour $k = 1/3$ sont trouvées de la manière suivante.

Puisque dans la formule pour $\psi$ les grandeurs $B'$ et $1 - 2\,k - k^2$ sont finis pour $k = 1/3$, on n'aura qu'examiner la valeur de

$$\frac{(1-3k)^2}{\sqrt{P}} \text{ ou de } \frac{(1-3k)^4}{P} = \frac{(1-3k)^4}{2kA^2 + 4(1-3k)^4 B'}.$$

Or, $A^2$ étant $= {}^4/_9 (1-3k)^2 L^2 : A'^2$ (voir Remarque (*b*)), on aura pour $(1-3k)^4 : P$ l'expression

$$\frac{(1-3k)^2}{2k \cdot {}^4/_9 L^2 : A'^2 + 4(1-3k)^2 B'} = \frac{(1-3k)^2}{{}^8/_9 k L^2 : A'^2} = 0,$$

parce que $L$ et $A'$ sont tous les deux finis.

La formule $x = {}^1/_2 + A \sqrt{\frac{\frac{1}{2}k}{P}}$ donnera ensuite:

$$x = {}^1/_2 + A \sqrt{\frac{{}^1/_2 k}{2kA^2}} = 1.$$

Quant aux valeurs de $\Theta$ et $\pi$, nous aurons en premier lieu:

$$\Theta = \frac{\left(1 + \frac{1}{\psi - x}\right)^2}{1 + \frac{1}{{}^p/_q \psi - x}} = -\frac{(\psi - x + 1)^2}{{}^1/_3 \psi - x + 1},$$

$\psi - x$ et ${}^p/_q \psi - x$ étant tous les deux $= -1$. Or, $1 - x$ sera d'ordre $\psi^2$ $\left[\text{parce que } \frac{\psi^2}{x(1-x)} = \frac{9}{2} \frac{kB'}{(1-2k-k^2)^2}\right.$ [ces Archives, l.c., formule (12)] est fini$\left.\right]$, de sorte que nous aurons:

$$\Theta = -\frac{\psi^2}{{}^1/_3 \psi} = -3\psi = 0.$$

De même on trouvera pour $\pi$:

$$\pi = \frac{\psi^2}{({}^1/_3 \psi)^2} = 9.$$

*f*) Pour $k = 0{,}414 = -1 + \sqrt{2}$ le dénominateur $1 - 2k - k^2$ dans les expressions pour $q$ et $\psi$ devient $= 0$, de sorte que $q$ et $\psi$ deviennent $\infty$.

Le calcul de $\delta = \frac{1}{{}^p/_q \psi - x}$ mène à $\frac{1}{0 \times \infty - 0{,}63}$, une expression indéfinie. Mais nous pouvons facilement déduire la formule

$${}^p/_q \psi - x = -{}^1/_2 - \left[A + \frac{(1-3k)^2}{2k(1-2k)} C\right] \sqrt{\frac{{}^1/_2 k}{P}},$$

où $C = k(-5 + 20k - 17k^2) + (1 - 4k + 9k^2)\sqrt{1/3(2 - 8k + 9k^2)}$. Ainsi on trouve pour $k = 0{,}414$ la valeur $C = 0{,}3981$, donc $p/q\ \psi - x = -1{,}8174$, c.-à-d. $\delta = -0{,}5502$.

---

Les valeurs principales de $k$ sont les suivantes:

$k = 1/3$ ; $k = 0{,}355$ ; $k = 0{,}414\ (= -1 + \sqrt{2})$ ; $k = 1/2$ et $k = 1$.

$\alpha$) Dans le cas $k = 1/3$ on a dans le *point double* $\Theta = 0$, $\pi = 9$, ou bien en échangeant entre elles les deux composantes: $\Theta = \infty$, $\pi = 1/9$. C'est un cas-limite: le rapport des températures critiques des deux composantes s'approche à $\infty$. Et puisqu'il sera fort invraisemblable, que $\pi$ soit alors $= 1/9$, il n'existera jamais de point double dans le cas $\Theta = \infty$, et la courbe de plissement présentera toujours le type I (anomal).

Puisque $\Theta = \dfrac{a_2 : a_1}{b_2 : b_1}$ et $\pi = \dfrac{a_2 : a_1}{b_2^2 : b_1^2}$, nous aurons:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\Theta^2}{\pi} \quad ; \quad \frac{b_2}{b_1} = \frac{\Theta}{\pi}.$$

Dans le cas $\Theta = \infty$ ($\pi$ fini) on aura donc $\dfrac{a_2}{a_1} = \infty$, $\dfrac{b_2}{b_1} = \infty$.

$\beta$) Lorsque $k = 0{,}355$ environ, on voit qu'on aura dans le point double $\Theta = 1$, $\pi = 7{,}5 \pm$. Alors les *températures critiques* des deux composantes sont *égales* entre elles. Mais encore il sera invraisemblable que $\pi$ soit alors $= 7{,}5$, et il n'existera de point double non plus. La courbe de plissement aura le type II (normal) ou III (avec les trois points de plissement doubles hétérogènes).

Avec $\Theta = 1$ correspondra $\dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_1}{b_1}$, c.-à-d. $a \cdot\cdot b$.

$\gamma$) Le cas $k = 0{,}414\ (= -1 + \sqrt{2})$ donne $\Theta = 2{,}22$, $\pi = 4{,}94$ pour le point double des deux branches de la ligne de plissement. Parce qu'alors $\gamma = 0$, on aura $a_2 = a_1$ ($\alpha = 0$), donc $\pi = \Theta^2$.

Ce cas se présente parfois. Alors les valeurs de $T_c$ seront inversément proportionnelles à celles de $b$.

δ) Dans le cas $k = 0{,}5$ on a $\theta = 2{,}89$, $\pi = 2{,}89$ dans le point double. Comme $\delta = 0$, nous aurons $b_2 = b_1$ ($\beta = 0$), c.-à-d. $\pi = \theta$.

Les valeurs de $T_c$ seront maintenant proportionnelles à celles de $a$.

C'est le cas, que nous avons étudié amplement, et que nous avons discuté particulièrement quant à l'allure des courbes de plissement, parceque la supposition $b_2 = b_1$, c.-à-d. $\beta = 0$, donne de si grandes simplifications dans les équations et dans le calcul.

ε) Enfin nous avons étudié déjà (ces Archives, l.c.) le cas $k = 1$, donnant $\theta = 9{,}90$, $\pi = 1$ pour le point double.

Lorsque $\pi = 1$, c.-à-d. quand les *pressions critiques* des deux composantes sont *égales*, on aura $\frac{a_2}{b_2^2} = \frac{a_1}{b_1^2}$, c.-à-d. $a \cdot\cdot b^2$.

Le cas $\pi = 1$ donne également des simplifications importantes dans le calcul.

En résumant, nous avons donc:

Cas principaux.

| | | Point double. | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | $k$ | $x$ | $r_b = 1/\rho$ |
| $\pi = 1$ | $a \cdot\cdot b^2$ | $\theta = 9{,}90$ | 1 | 0,010 | 1 |
| $\pi = \theta$ | $b_2 = b_1$ | $\theta = \pi = 2{,}89$ | 0,50 | 0,241 | 1,73 ($= \sqrt{3}$) |
| $\pi = \theta^2$ | $a_2 = a_1$ | $\theta = 2{,}22$, $\pi = 4{,}94$ | 0,414 | 0,630 | 2,02 |
| $\theta = 1$ | $a \cdot\cdot b$ | $\pi = 7{,}5 \pm$ | 0,355 ± | 0,96 ± | 2,57 |
| $\theta = \infty$ | $\frac{a_2}{a_1} = \infty$, $\frac{b_2}{b_1} = \infty$ | $\pi = 1/9$ | 0,333 | 0 | 3 |

Chez $\theta = \infty$ nous avons écrit $x = 0$ et non $x = 1$, parce qu'en remplaçant $\theta = 0$, $\pi = 9$ par $\theta = \infty$, $\pi = 1/9$, nous avons échangé entre elles les deux composantes.

Le cas $\theta = \infty$ n'a aucune importance pratique; les deux cas $\theta = 1$ et $\pi = \theta^2$ ne donnent pas de simplifications appréciables dans les formules et dans le calcul, de sorte que seulement les cas $\pi = 1$ et $\pi = \theta$ entrent en ligne de compte.

Le cas $\pi = \theta^2$ donnerait $a_2 = a_1$ ($\alpha = 0$), donc $\varphi = \psi = \infty$.

Quant au cas $\Theta = 1$, celui-ci mènerait à $n = \frac{2}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2}$.

Car $\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}} = 1 + \frac{1}{\varphi}$, donc $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \left(1 + \frac{1}{\varphi}\right)^2$, et $\frac{b_2}{b_1} = 1 + n$, de sorte que nous avons $1 + n = \left(1 + \frac{1}{\varphi}\right)^2$, c.-à-d. $n = \frac{2}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2}$.

Finalement nous donnerons encore un aperçu des valeurs correspondantes de $\Theta$, $\pi$, $x$ et $v/b$, trouvées plus haut.

| $\Theta$ | $\pi$ | $x$ | $v/b = 1/p$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 7,50 et 0,13 | 0,96 et 0,040 | 2,57 et 2,57 |
| 1,19 | 7,21 „ 0,13 | 0,94 „ 0,036 | 2,49 „ 2,60 |
| 1,71 | 6,26 „ 0,13 | 0,84 „ 0,025 | 2,26 „ 2,68 |
| 1,88 | 5,76 „ 0,13 | 0,78 „ 0,021 | 2,18 „ 2,71 |
| 2,04 | 5,42 „ 0,12 | 0,72 „ 0,018 | 2,11 „ 2,74 |
| 2,22 | 4,94 „ 0,12 | 0,63 „ 0,014 | 2,02 „ 2,79 |
| 2,90 | 2,89 „ 0,12 | 0,24 „ 0,003 | 1,73 „ 2,87 |
| 9,90 | 1,00 „ 0,11 | 0,01 „ 0,001 | 1,00 „ 2,95 |
| ∞ | — „ 0,11 | — „ 0,000 | — „ 3,00 |

Dans la fig. 22 on trouve representé grafiquement les relations, contenues dans le tableau précédent. Lorsqu'on considère seulement les valeurs de $\Theta > 1$ (nous supposons toujours $T_2 > T_1$), les valeurs de $k$ commencent par 0,355 et finissent par $k = 1$. Cependant les valeurs de $\Theta$ et $\pi$, correspondant à $k = 0{,}333$ jusqu'à $k = 0{,}355$ (représentées par $AC'$), donneront une autre série de valeurs (représentées par $A'C$), quand on prend les valeurs *réci-*

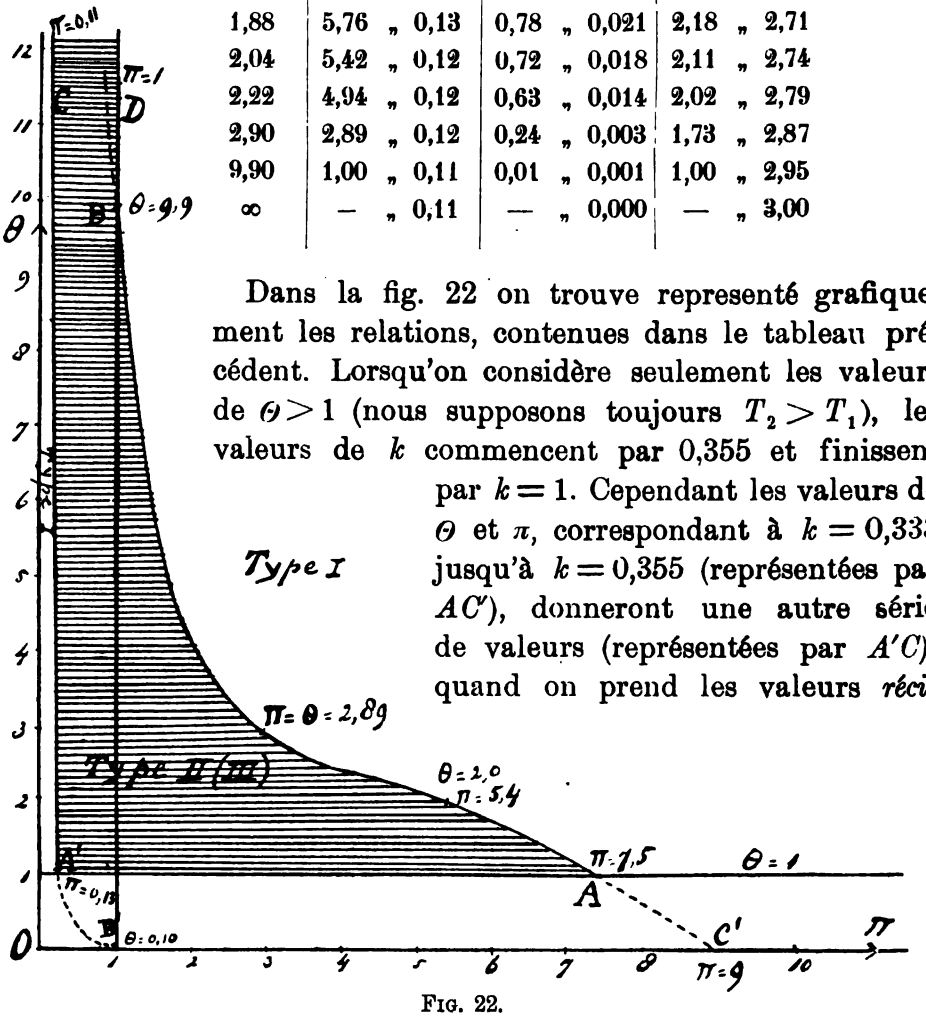



FIG. 22.

*proques*. A $\theta = 0{,}37$, $\pi = 8{,}5$ (voir p. 133) correspondra ainsi $\theta = 2{,}7$, $\pi = 0{,}12$; etc. A $\theta = 1$, $\pi = 7{,}5$ correspondra $\theta = 1$, $\pi = 0{,}13$; à $\theta = 0$, $\pi = 9$ les valeurs $\theta = \infty$, $\pi = 0{,}11$. [De même $A'B'$ correspond à $AB$, mais ici toutes les valeurs de $\theta$ seraient $< 1$].

Pour chaque valeur de $\theta$ il y aura donc *deux* valeurs distinctes de $\pi$, se rapportant à un point double dans la courbe de plissement. La première série de valeurs est pourtant interrompue, lorsque $k$ devient $> 1$, car alors le point double apparaît dans la région où $v < b$, ce qui n'a aucun sens physique. Les deux courbes $AB$ (prolongé par $BD$) et $A'C$ limitent donc toutes les combinations de $\theta$ et $\pi$, où chez les mélanges binaires de substances *normales*, l'on aura le type (normal) II (ou bien le type III). Les combinations de valeurs de $\theta$ et $\pi$, représentées dans la figure à la *droite* de $ABD$, et à la *gauche* de $A'C$, donneront toutes le type (anomal) I (voir § 2). Pour des valeurs de $\theta > 9{,}9$ la droite $\pi = 1$ indiquera la première limite. Car le point double, étant situé alors à l'autre côté de la droite $v = b$, la transformation de type s'accomplit dans une région irréalisable, et ne se rapporte pas à la partie réalisable de la courbe de plissement. Comme nous l'avons dit, la droite $\pi = 1$ donnera alors la transition du Type I en II (III).

Chez $\theta = 1$, où les deux valeurs de $\pi$ sont réciproques, il va sans dire, que les valeurs de $x$ seront complementaires (0,96 et 0,04), et que les valeurs de $v/b$ seront les mêmes. Ce ne sera point le cas chez les autres valeurs de $\theta$.

5) Nous ne pouvons pas insister ici sur l'allure fort compliquée du prolongement de la courbe de plissement dans le domaine irréalisable $v < b$, quoique cela éclaircisserait beaucoup de ce que nous venons de remarquer. Nous nous bornerons de donner dans quelques figures l'allure schématique de la courbe de plissement

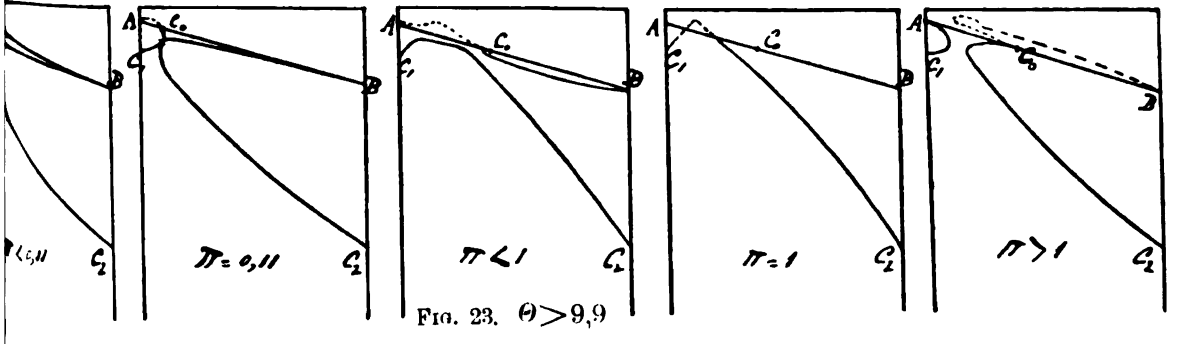



Fig. 23. $\theta > 9{,}9$

dans les domaines divers. On trouvera donc dans les figg. 23, 24 et 25 trois séries de représentations: pour des valeurs de

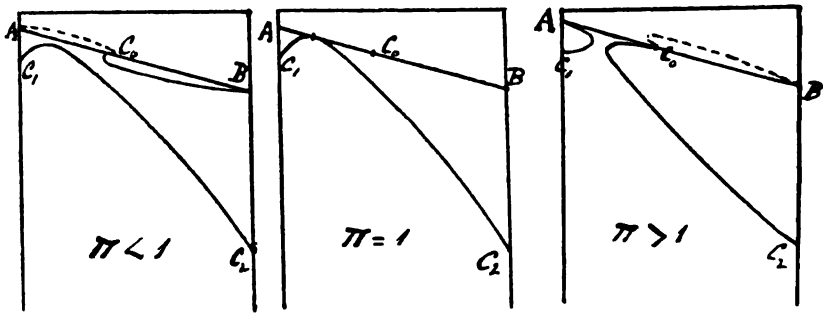



FIG. 24. $\Theta = 9{,}9$

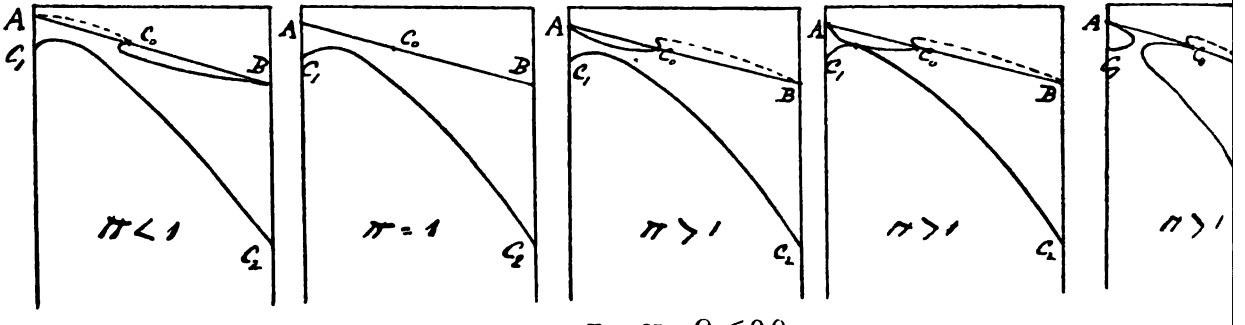



FIG. 25. $\Theta < 9{,}9$

$\Theta > 9{,}9$, $= 9{,}9$ et $< 9{,}9$. On verra la transition aux deux points doubles différents, et que la type I à la droite de $ABD$ diffère en quelque sens du type I à la gauche de $A'C$ (Pour $\pi = 1$ comparer aussi les trois figures du Mémoire cité dans ces Archives).

Les deux cas $\pi = 0{,}11$ et $\pi < 0{,}11$ ont été supprimés dans les figg. 24 et 25, parce qu'il n'y a aucune différence entre cette transition et celle représentée dans la fig. 23.

Nous voyons clairement (fig. 23), que dans le cas $\pi >$ des branches de la courbe de plissement va de $C_1$ à $A_1$, tar l'autre va de $C_2$ à $C_0$. Dans le cas $\pi < 0{,}11$ il en sera exa le contraire: nous avons là $C_1 C_0$ et $C_2 B$.

Le cas $\pi = 1$ forme la transition — et cela est en co avec la remarque précedente — de deux différentes allur branche, partant du point $C_0$. Tandis que pour des val $\pi > 1$ la partie *realisable* se trouve toujours à la *gauche* de $C_0$, l *irréalisable* à la *droite*, on aura au contraire pour $\pi < 1$, que l réalisable est située à la droite, et la partie irréalisable à la

Quant au cours de cette dernière branche au voisinage *in*

des points $A$, $C_0$ et $B$, nous pouvons déduire cette allure facilement de l'équation générale de la courbe de plissement

Or, cette équation est la suivante [voir p. 111, équation (5)]:

$$(1-q)^3\,[(1-2x)-3x(1-x)\,n\omega]+3\psi\,(1-p)^2(1-q)(1-2q)+ \\ +\frac{\psi^3(1-p)^3(1-3p)}{x(1-x)}=0, \ldots\ldots\ldots (1)$$

où $q=\psi n\omega$ et $p=(1+nx)\,\omega$.

Nous rappelons, que $\psi=\varphi+x$, où $\varphi=\frac{\sqrt{a_1}}{\alpha}$, et que $\omega=\frac{b_1}{v}$, $n\omega=\frac{\beta}{v}$, de sorte que $\frac{b}{v}=\frac{b_1+x\beta}{v}=(1+nx)\,\omega=p$.

En écrivant $\frac{q}{\psi}$ pour $n\omega$, nous obtenons après division par $(1-q)$:

$$\left[(1-2x)-3x(1-x)\frac{q}{\psi}\right]+3\psi\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^2(1-2q)+ \\ +\psi^3\left(\frac{1-p}{1-q}\right)^3\frac{1-3p}{x(1-x)}=0.$$

Exprimons $q$ en $p$ On aura évidemment avec $n=\frac{\lambda}{\varphi}$:

$$q=\frac{n\psi}{1+nx}p=\frac{\lambda\,\frac{\varphi+x}{\varphi}}{1+\frac{\lambda}{\varphi}x}p=\frac{\lambda(\varphi+x)}{\varphi+\lambda x}\,p=\gamma p.$$

Avec $\frac{1-p}{1-q}=\frac{1-p}{1-\gamma p}=u$ notre équation se transforme donc

:

$$(1-x)\left[(1-2x)-3\frac{x(1-x)}{\varphi+x}\gamma p\right]+3x(1-x)(\varphi+x)\,1-2\gamma p)\,u^2+ \\ +(\varphi+x)^3(1-3p)\,u^3=0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

Dans le cas $\pi=1$, où $n=\frac{1}{\varphi}$, on aura $\lambda=1$, donc $\gamma=1$ $(q=p)$ et $u=1$, et l'équation (2) deviendra:

$$x(1-x)\left[(1-2x)-3\frac{x(1-x)}{\varphi+x}p\right]+3x(1-x)(\varphi+x)(1-2p)+ \\ +(\varphi+x)^3(1-3p)=0,$$

c.-à-d. l'équation, que nous avons discuté dans la fin de notre Mémoire précédent dans ces Archives pour le cas où les pressions critiques sont égales entre elles.

Supposons maintenant $p$ dans la voisinage de l'unité (c.-à d. $v = b$). Alors l'équation (2) donnera:

$$x(1-x)\left[(1-2x)-\frac{3x(1-x)}{\varphi+x}\gamma\right]+3x(1-x)(\varphi+x)(1-2\gamma)\frac{(1-p)^2}{(1-\gamma)^2}-$$
$$-2(\varphi+x)^3\frac{(1-p)^3}{(1-\gamma)^3}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2^a)$$

*a*) Considérons en premier lieu $x = 0$ (le point $A$).

Alors on aura $\left(\gamma = \frac{\lambda\varphi}{\varphi} = \lambda\right)$:

$$x + 3x\varphi\frac{1-2\lambda}{(1-\lambda)^2}(1-p)^2 - 2\frac{\varphi^3}{(1-\lambda)^3}(1-p)^3 = 0.$$

$x$ sera donc de l'ordre $(1-p)^3$, de sorte que nous aurons simplement:

$$x = 2\frac{\varphi^3}{(1-\lambda)^3}(1-p)^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3^a)$$

Deux cas se présenteront: $\pi < 1$ et $\pi > 1$. ($\Theta = T_2/T_1$ est supposé toujours $> 1$).

Lorsque $\pi < 1$, on aura:

$$\frac{\sqrt{a_2}}{b_2} < \frac{\sqrt{a_1}}{b_1}, \text{ donc } \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}} < \frac{b_2}{b_1} \text{ et } \frac{a_2}{a_1} < \frac{b_2^2}{b_1^2}.$$

Et comme $\left(\text{en vertu de } \frac{T_2}{T_1} > 1\right)$ nous avons $\frac{a_2}{a_1} > \frac{b_2}{b_1}$, on aura aussi, après division:

$$\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}} > 1, \text{ donc } \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1}} > 0, \text{ et } \frac{b_2}{b_1} > 1, \text{ donc } \frac{b_2-b_1}{b_1} > 0;$$

et par suite $\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}} > 0$, ou bien $\varphi > 0$, et $n > 0$, $n$ étant $= \frac{\beta}{b_1} = \frac{b_2-b_1}{b_1}$.

De $\frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}} < \frac{b_2}{b_1}$ il s'ensuit $\frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1}} < \frac{b_2-b_1}{b_1}$, donc $\frac{1}{\varphi} < n$, et par conséquent $\varphi n > 1$ ($\varphi$ et $n$ étant positifs), c.-à-d. $\lambda > 1$.

La fraction $\frac{\varphi^3}{(1-\lambda)^3}$ sera donc *négatif* dans le cas $\pi < 1$, et on aura:

$$x = -f(1-p)^3,$$

où $f$ est un coëfficient *positif*.

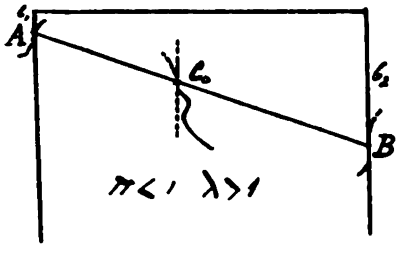



Fig. 26a

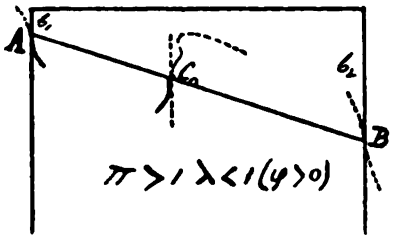



Fig. 26b.

Cela donnera chez $A$ une allure, comme nous l'avons indiqué dans la fig 26$^a$. ($b_2$ sera toujours $> b_1$, $n = \frac{\beta}{b_1}$ étant positif).

Au contraire, la fig. 26$^b$ donnera l'allure chez le point $A$, lorsque $\pi > 1$.

Car maintenant on aura:

$$\frac{\sqrt{a_2}}{b_2} > \frac{\sqrt{a_1}}{b_1}, \text{ donc } \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}} > \frac{b_2}{b_1},$$

par suite

$$\frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1}} > \frac{b_2 - b_1}{b_1},$$

c.-à-d.

$$\frac{1}{\varphi} > n.$$

Mais ici il se présenteront deux sous-cas.

$\alpha$) $b_2 > b_1$ (comme dans la fig 26$^b$).

Alors on aura également $\frac{a_2}{a_1} > 1$, en vertu de $\frac{a_2}{a_1} > \frac{b_2}{b_1}$ $(\theta > 1)$, donc $\frac{b_2 - b_1}{b_1} = n$ et $\frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1}} = \frac{1}{\varphi}$ tous les deux positifs. L'équation précédente donnera par suite $n\varphi < 1$, c.-à-d. $\lambda < 1$. Et puisque $\varphi > 0$, on aura maintenant:

$$x = f(1-p)^3.$$

$\beta$) $b_2 < b_1$. Dans ce cas on aura donc $n < 0$. Mais évidemment $\varphi$ peut être $> 0$ ou $< 0$. Dans le premier cas, savoir $\varphi > 0$, $\frac{1}{\varphi} > n$

donnera $n\varphi < 1$, c.-à-d. $\lambda < 1$. Dans le second cas, savoir $\varphi < 0$, $\frac{1}{\varphi} > n$ donnera au contraire $\varphi n > 1$, c.-à-d. $\lambda > 1$.

On voit donc, que dans les deux cas $\frac{\varphi^3}{(1-\lambda)^3}$ sera positif, et que nous aurons encore:

$$x = f(1-p)^3.$$

*b*) En second lieu nous considérons $x = 1$ (le point $B$).

Nous aurons dans ce cas, en vertu de ($2^a$) $\left(\gamma = \frac{\lambda(\varphi+1)}{\varphi+\lambda}\right)$:

$$-(1-x) + 3(1-x)(\varphi+1)\frac{1-2\gamma}{(1-\gamma)^2}(1-p)^2 - 2\frac{(\varphi+1)^3}{(1-\gamma)^3}(1-p)^3 = 0.$$

Encore $1-x$ sera de l'ordre $(1-p)^3$, de sorte que nous pouvons écrire:

$$1-x = -2\frac{(\varphi+1)^3}{(1-\gamma)^3}(1-p)^3. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3^b)$$

Maintenant on aura:

$$1-\gamma = 1 - \frac{\lambda(\varphi+1)}{\varphi+\lambda} = \frac{\varphi(1-\lambda)}{\varphi+\lambda} = \frac{1-\lambda}{1+n},$$

$\lambda$ étant $= n\varphi$. Nous pourrons donc écrire:

$$1-x = -2\left[\frac{(\varphi+1)(n+1)}{1-\lambda}\right]^3(1-p)^3,$$

ou bien

$$(1-x) = -2\left(\frac{1}{\varphi}+1\right)^3(n+1)^3\frac{\varphi^3}{(1-\lambda)^3}(1-p)^3.$$

Or, $\frac{1}{\varphi}+1 = \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}}$ et $n+1 = \frac{b_2}{b_1}$ étant toujours positifs, nous aurons maintenant pour le coëfficient de $(1-p)^3$ toujours un signe *opposé* à celui du cas précédent ($x = 0$).

Les figg. 26 et $26^a$ représentent encore les deux cas possibles, à mesure que l'on a $\pi < 1$ ou bien $\pi > 1$.

*c*) Finalement $x = x_0$ (le point $C_0$).

Ce point sera donné par la relation

$$1 - 2x_0 - \frac{3x_0(1-x_0)}{\varphi+x_0}\gamma = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

où $x_0$ aura une valeur finie. L'équation ($2^a$) donnera dans ce cas:

$$x_0(1-x_0)\delta + 3x_0(1-x_0)(\varphi+x_0)(1-2\gamma)\frac{(1-p)^2}{(1-\gamma)^2} -$$
$$-2(\varphi+x_0)^3\frac{(1-p)^3}{(1-\gamma)^3}=0,$$

lorsque $\delta$ est la valeur de $1-2x_0-\frac{3x_0(1-x_0)}{\varphi+x_0}\gamma$ pour une valeur de $x$ au voisinage de $x_0$. On voit que $\delta$ sera, comme dans les deux cas précédents, de l'ordre $(1-p)^3$, et nous pouvons écrire simplement:

$$x_0(1-x_0)\delta = 2(\varphi+x_0)^3\frac{(1-p)^3}{(1-\gamma)^3},$$

c.-à-d.

$$\delta = 2\frac{(\varphi+x_0)^3}{x_0(1-x_0)(1-\gamma)^3}(1-p)^3.$$

Comme $1-\gamma = 1-\frac{\lambda(\varphi+x)}{\varphi+\lambda x} = \frac{\varphi(1-\lambda)}{\varphi+\lambda x}$, on aura:

$$\frac{\varphi+x}{1-\gamma} = \frac{(\varphi+x)(\varphi+\lambda x)}{\varphi(1-\lambda)} = \frac{\varphi}{1-\lambda}\cdot\frac{\varphi+x}{\varphi}\cdot\frac{\varphi+\lambda x}{\varphi}.$$

Nous aurons donc:

$$\delta = \frac{2}{x_0(1-x_0)}\left(\frac{\varphi+x_0}{\varphi}\right)^3\left(\frac{\varphi+\lambda x_0}{\varphi}\right)^3\left(\frac{\varphi}{1-\lambda}\right)^3(1-p)^3, \quad (3^c)$$

où les facteurs $\frac{\varphi+x_0}{\varphi} = \frac{\sqrt{a_0}}{\sqrt{a_1}}$ et $\frac{\varphi+\lambda x_0}{\varphi} = 1+nx_0 = \frac{b_0}{b_1}$ seront tous les deux positifs.

Quant au signe de $\delta$, nous pouvons le déterminer de l'équation ($\alpha$). En posant le premier membre $= F$, on aura:

$$F = 1-2x-\frac{3x(1-x)\lambda}{\varphi+\lambda x},$$

$\gamma$ étant $= \frac{\lambda(\varphi+x)}{\varphi+\lambda x}$. Par suite:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2-3\lambda\frac{(\varphi+\lambda x)(1-2x)-x(1-x)\lambda}{(\varphi+\lambda x)^2}.$$

Mais en vertu de $F=0$, nous aurons $(\varphi+\lambda x)(1-2x)=3x(1-x)\lambda$, par conséquent:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2-3\lambda\frac{2x(1-x)\lambda}{(\varphi+\lambda x)^2} = -2\left(1+\frac{3x(1-x)\lambda^2}{(\varphi+\lambda x)^2}\right),$$

donc toujours négatif.

Lorsqu'on prend par suite $x > x_0$, la valeur de $F$, c.-à-d. $\delta$, deviendra négatif, et l'on aura donc $\delta = -f'(x - x_0)$, par conséquent:

$$x - x_0 = -f''\left(\frac{\varphi}{1-\lambda}\right)^3 (1-p)^3.$$

Nous nous trouvons donc dans les mêmes circonstances que dans le cas précédent (savoir $x = 1$), c.-à-d. lorsque $x$ devient $> x_0$, $p$ deviendra $< 1$.

Les figg. 26 et 26$^a$ représentent de nouveau les deux cas possibles au voisinage du point $C_0$.

Il sera utile de comparer maintenant les figg. 23, 24 et 25 avec les figg. 26 et 26$^a$. Parce que la variation de $x$ sera toujours proportionelle à $(1-p)^3$, on aura dans tous les trois cas, que nous venons de discuter, savoir $x = 0$ $(A)$, $x = 1$ $(B)$ et $x = x_0$ $(C_0)$, que la ligne de plissement *touche* la droite verticale dans ces points.

---

Nous insistons encore une fois sur le fait, que l'équation (2) est fort compliquée dans le voisinage de $p = 1$. Pour déterminer avec exactitude l'allure des lignes $C_0A$ et $C_0B$, l'influence de $u = \frac{1-p}{1-\gamma p}$ se fait fortement sentir.

Il ne faut pas croire, que pour de faibles valeurs de $1 - \lambda$ la grandeur $u$ soit continuellement au voisinage de l'unité.

Supposons p. e. $\varphi = 0{,}1$ et $\lambda = 1{,}01$, de sorte que $\pi$ est très peu différent de l'unité ($\pi < 1$), et que $\Theta = \frac{T_2}{T_1} = \left(1 + \frac{1}{\varphi}\right)\sqrt{\pi}$ (voir p. 132) est légèrement $> 9{,}9$ (voir fig 23, $\pi < 1$).

Alors $\gamma = \frac{\lambda(\varphi + x)}{\varphi + \lambda x}$ et $u = \frac{1-p}{1-\gamma p}$ auront les valeurs suivantes pour $x = 0$, $x = 0{,}5$ et $x = 1$. (voir p. 147).

On voit clairement, que $u$ reste longtemps dans le voisinage de l'unité; seulement pour des valeurs de $p$ au voisinage *immédiat* de la valeur, pour laquelle $u$ devient $\infty$, $u$ s'élève tout à coup de 1 à $\infty$. De même dans l'intervalle minime entre $p = 0{,}99$ (lorsque $x = 0$) ou même $p = 0{,}999$ (lorsque $x = 1$) et $p = 1$ la valeur de $u$ varie depuis $-\infty$ jusqu'à 0, pour s'élever encore très vite à la valeur-limite, légèrement inférieure à 1.

| $x=0$ $\gamma=\lambda=1{,}01$ | | $x=0{,}5$ $\gamma=\lambda\left(1-\frac{1}{120}\right)=1+\frac{1}{600}$ | | $x=1{,}0$ $\gamma=\lambda\left(1-\frac{1}{110}\right)=1+\frac{1}{1100}$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $u$ | $p$ | $u$ | $p$ | $u$ |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0,5 | 1,01 | 0,5 | 1,002 | 0,5 | 1,001 |
| 0,8 | 1,04 | 0,8 | 1,007 | 0,8 | 1,004 |
| 0,9 | 1,1 | 0,9 | 1,015 | 0,9 | 1,009 |
| 0,99 | $\pm\infty$ | 0,998 | $\pm\infty$ | 0,999 | $\pm\infty$ |
| 0,995 | $-1$ | 0,999 | $-1$ | 0,9995 | $-1$ |
| 0,999 | $-0{,}11$ | 0,9999 | $-0{,}064$ | 0,9999 | $-0{,}12^4$ |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1,001 | 0,09 | 1,001 | $0{,}37^5$ | 1,001 | 0,52 |
| 1,01 | 0,50 | 1,01 | 0,86 | 1,01 | 0,92 |
| 1,1 | 0,91 | 1,1 | 0,98 | 1,1 | 0,99 |
| 2 | 0,99 | 2 | 0,997 | 2 | 0,998 |
| 10 | 0,99 | 10 | 0,998 | 10 | 0,999 |
| $\infty$ | 0,99 | $\infty$ | 0,998 | $\infty$ | 0,999 |

La valeur pour laquelle $u$ devient $\infty$ est donné par $1-\gamma p=0$, c-à-d.

$$p=\frac{1}{\gamma}.$$

Et la valeur-limite pour $p=\infty$ sera évidemment donnée par

$$u=\frac{1}{\gamma}.$$

On peut donc dire, que $u$ sera pratiquement toujours au voisinage immédiat de l'unité, *excepté* pour les valeurs de $p$ dans l'intervalle entre 0,9 et 1,1 ($x=0$), ou 0,98 et 1,02 ($x=0{,}5$), ou bien entre 0,99 et 1,01 ($x=1$). Alors $u$ parcourit les valeurs depuis 1,1 jusqu'à $\infty$ et depuis $-\infty$ jusqu'à 0,9. L'intervalle devient de plus en plus petit à mesure que $x$ sera plus dans le voisinage de 1.

Et comme les courbes $C_0A$ en $C_0B$ se trouveront presque toujours dans la région de *l'intervalle dangereux*, quand $\lambda$ est près de l'unité ($x=1$), la détermination de l'allure précise de ces courbes sera excessivement difficile. Nous n'y insisterons plus.

Seulement il nous soit permis de faire remarquer, que pour $p=\infty$ (c-à-d. $v=0$) la valeur correspondante de $x$ sera toujours *négatif*, lorsque $b_2>b_1$.

En effet l'équation (2) deviendra alors:

$$x(1-x)\left[-3\frac{x(1-x)}{\varphi+x}\gamma p\right]+\frac{3x(1-x)(\varphi+x)(-2\gamma p)}{\gamma^2}+$$
$$+\frac{(\varphi+x)^3(-3p)}{\gamma^3}=0,$$

$\Theta$ étant $=\frac{1}{\gamma}$, lorsque $p=\infty$.

En posant maintenant $\frac{\varphi+x}{\gamma}=\frac{\varphi+\lambda x}{\lambda}=y$, nous obtenons, après division par $-3p$:

$$\frac{x^2(1-x)^2}{y}+2x(1-x)y+y^3=0,$$

ou bien

$$[y^2+x(1-x)]^2=0,$$

donc

$$x(1-x)=-y^2=-\left(\frac{\varphi}{\lambda}+x\right)^2,$$

donnant:

$$x=-\frac{\frac{\varphi^2}{\lambda^2}}{1+2\frac{\varphi}{\lambda}}=-\frac{\varphi^2}{\lambda(\lambda+2\varphi)}.$$

Avec $\varphi=0{,}1$, $\lambda=1{,}01$ cela devient p. e. $x=-\frac{1}{122}$.

Nous revenons encore une fois sur le tableau sur la page 138 (voir fig. 22), pour faire remarquer, que dans la pratique les valeurs de $\Theta$ et $\pi$ pour les cas ordinaires de mélanges de deux liquides normales tomberont prèsque toujours dans la région inférieure du type II (normale), et que seulement une minorité de cas tombera dans la région anomale du type III ou de I (c-à-d. la région à la droite de $AB$).

6) Maintenant nous discuterons la possibilité du type III pour les mélanges de substances *normales*.

Examinons donc en premier lieu la condition d'un *contact*,

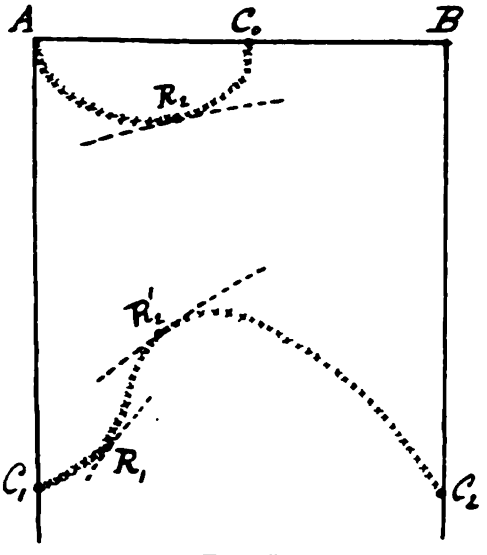



FIG. 27.

en $R_1$ p. e., entre une ligne spinodale et la courbe de plissement. $C_1 C_2$ p. e. On aura évidemment:

$$\varphi_{sp} = \varphi_{pl},$$

ou bien, comme dans un point de plissement $\varphi_{sp} = \left(\frac{dv}{dx}\right)_{sp} = \left(\frac{dv}{dx}\right)_{p,T}$:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{p,T} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial v}}, \quad \ldots \quad (1)$$

lorsque $F = 0$ est l'équation de la courbe de plissement en projection $v, x$.

L'équation (1), combinée avec $F = 0$, donnera ensuite les valeurs de $v$ et $x$ au point de contact, $R_1$ p. e.

Cependant, pour le cas tout-à-fait général, c.-à-d $\beta \lesseqgtr 0$, $\alpha \lesseqgtr 0$, le calcul devient tellement compliqué, qu'il n'est pas possible d'obtenir un résultat. C'est pourquoi nous nous contenterons avec la discussion de quelques cas spéciales.

$\alpha$) Le cas $\beta = 0$ $(b_1 = b_2)$.

Pour la grandeur $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{p,T}$ nous avons trouvé autrefois (V. K. A. v. W., l. c.):

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{p,T} = \frac{\beta - \frac{2\alpha\sqrt{a}}{RT}\frac{(v-b)^2}{v^2}}{1 - \frac{2a}{RT}\frac{(v-b)^2}{v^2}},$$

parce que $\frac{db}{dx} = \beta$ et $\frac{da}{dx} = 2\alpha\sqrt{a}$. Pour $\beta = 0$ nous avons donc:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{p,T} = \frac{-2\alpha\sqrt{a}}{RT\frac{v^2}{(v-b)^2} - 2a/v}.$$

Dans cette équation il faut remplacer $RT$ par

$$RT = \frac{2}{v^3}\left[x(1-x)(\alpha v - \beta\sqrt{a})^2 + a(v-b)^2\right],$$

étant l'équation de la spinodale. Avec $\beta = 0$ cela devient:

$$RT = \frac{2}{v^3}\left[x(1-x)\,\alpha^2 v^2 + a\,(v-b)^2\right],$$

et l'on obtient:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{p,T} = \frac{-\alpha\sqrt{a}.\,v^3}{\left\{\frac{x\,(1-x)\,\alpha^2 v^4}{(v-b)^2} + av^2\right\} - av^2} = -\frac{\sqrt{a}}{\alpha}\,\frac{(v-b)^2}{x\,(1-x)v}.$$

Avec $\sqrt{a} = \sqrt{a_1} + x\alpha = \alpha\,(\varphi + x) = \alpha\psi$, et $\frac{b}{v} = \frac{b_1}{v} = \omega$, de sorte que $\frac{d\omega}{dx} = -\frac{b_1}{v^2}\frac{dv}{dx}$, on aura donc:

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right)_{p,T} = \frac{b_1}{v^2}.\,\psi\,v\,\frac{(1-\omega)^2}{x\,(1-x)},$$

ou bien

$$\left(\frac{d\omega}{dx}\right)_{p,T} = \frac{\psi\omega\,(1-\omega)^2}{x\,(1-x)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

L'équation $F = 0$ de la courbe de plissement deviendra avec $\beta = 0$ (V. K. A. v. W., l. c.):

$$(1-2x) + 3\,\psi\,(1-\omega)^2 + \frac{\psi^3\,(1-\omega)^3\,(1-3\,\omega)}{x\,(1-x)} = 0, \quad . \quad (2)$$

et l'on y tire:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -2 + 3\,(1-\omega)^2 + \frac{3\,\psi^2\,(1-\omega)^3\,(1-3\,\omega)}{x\,(1-x)} - \\ &\qquad - \frac{\psi^3\,(1-\omega)^3\,(1-3\,\omega)\,(1-2\,x)}{x^2\,(1-x)^2} \quad \ldots\ldots \quad (b) \\ \frac{\partial F}{\partial \omega} &= -6\,\psi\,(1-\omega) + \frac{\psi^3}{x\,(1-x)}\left[-3(1-\omega)^3 - 3(1-\omega)^2(1-3\omega)\right] \quad (c) \end{aligned}\right.$$

Pour la dernière équation on peut écrire:

$$\frac{\partial F}{\partial \omega} = -6\,\psi\,(1-\omega)\left[1 + \frac{\psi^2}{x\,(1-x)}(1-\omega)\,(1-2\,\omega)\right],$$

et l'équation (1) deviendra par suite:

$$\left.\begin{aligned} -2 + 3(1-\omega)^2 + \frac{3\,\psi^2\,(1-\omega)^3\,(1-3\,\omega)}{x\,(1-x)} - \\ - \frac{\psi^3\,(1-\omega)^3\,(1-3\,\omega)\,(1-2\,x)}{x^2\,(1-x)^2} = \\ = \frac{6\,\psi^2\,\omega\,(1-\omega)^3}{x\,(1-x)}\left[1 + \frac{\psi^2}{x\,(1-x)}(1-\omega)(1-2\,\omega)\right] \end{aligned}\right\},$$

c.-à-d.

$$-2+3(1-\omega)^2+\frac{3\psi^2(1-\omega)^3(1-5\omega)}{x(1-x)}-$$
$$-\frac{\psi^3(1-\omega)^3}{x^2(1-x)^2}[(1-3\omega)(1-2x)+6\psi\omega(1-\omega)(1-2\omega)]=0.$$

Avec $1-2x$, tirée de l'équation $F=0$, nous pouvons écrire pour celà:

$$-2+3(1-\omega)^2+\frac{3\psi^2(1-\omega)^3(1-5\omega)}{x(1-x)}+$$
$$+\frac{\psi^3(1-\omega)^3}{x^2(1-x)^2}\left[3\psi(1-\omega)^2(1-3\omega)+\frac{\psi^3(1-\omega)^3(1-3\omega)^2}{x(1-x)}-\right.$$
$$\left.-6\psi\omega(1-\omega)(1-2\omega)\right]=0,$$

ou bien, après une réduction légère:

$$-2+3(1-\omega)^2+\frac{3\psi^2(1-\omega)^3(1-5\omega)}{x(1-x)}+$$
$$+\frac{3\psi^4(1-\omega)^4(1-6\omega+7\omega^2)}{x^2(1-x)^2}+\frac{\psi^6(1-\omega)^6(1-3\omega)^2}{x^3(1-x)^3}=0.$$

Posons

$$\frac{\psi^2(1-\omega)^2}{x(1-x)}=u.$$

Nous obtenons alors finalement:

$$1-6\omega+3\omega^2+3(1-\omega)(1-5\omega)u+$$
$$+3(1-6\omega+7\omega^2)u^2+(1-3\omega)^2u^3=0,$$

ou bien, après division par $(u+1)^2$:

$$(1-3\omega)^2u+(1-6\omega+3\omega^2)=0,$$

donnant:

$$u=-\frac{1-6\omega+3\omega^2}{(1-3\omega)^2}\ldots\ldots\ldots\ldots(1^a)$$

Cette relation est donc équivalent à la condition primitive (1).

L'équation (2) donnera, en introduisant la grandeur auxiliaire $u$:

$$(1-2x)+3\psi(1-\omega)^2+\psi(1-\omega)(1-3\omega)u=0\ldots(2^a)$$

En substituant maintenant la valeur de $u$, donnée par $(1^a)$, nous trouvons:

$$(1-2x)+3\psi(1-\omega)^2-\psi\frac{(1-\omega)(1-6\omega+3\omega^2)}{1-3\omega}=0,$$

donnant:

$$\psi = \frac{1-2x}{\frac{(1-\omega)(1-6\omega+3\omega^2)}{1-3\omega} - 3(1-\omega)^2} =$$

$$= -\frac{(1-2x)(1-3\omega)}{2(1-\omega)(1-3\omega+3\omega^2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2^b)$$

L'équation ($1^a$) nous fournit:

$$\psi^2 = -\frac{x(1-x)(1-6\omega+3\omega^2)}{(1-\omega)^2(1-3\omega)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1^b)$$

Nous pouvons donc éliminer la grandeur $\psi$. Le résultat sera:

$$-\frac{x(1-x)(1-6\omega+3\omega^2)}{(1-\omega)^2(1-3\omega)^2} = \frac{(1-2x)^2(1-3\omega)^2}{4(1-\omega)^2(1-3\omega+3\omega^2)^2},$$

ou bien, comme $\frac{(1-2x)^2}{x(1-x)} = \frac{1-4x(1-x)}{x(1-x)} = \frac{1}{x(1-x)} - 4$:

$$\frac{1}{x(1-x)} = 4 - 4\,\frac{(1-6\omega+3\omega^2)(1-3\omega+3\omega^2)^2}{(1-3\omega)^4},$$

c.-à-d.

$$\frac{1}{x(1-x)} = \frac{4}{(1-3\omega)^4}\,9\omega^3(2-9\omega+12\omega^2-3\omega^3),$$

d'où résulte:

$$x(1-x) = \frac{(1-3\omega)^4}{36\omega^3(2-9\omega+12\omega^2-3\omega^3)} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Pour $\psi^2$ nous trouvons donc:

$$\psi^2 = -\frac{(1-3\omega)^2(1-6\omega+3\omega^2)}{(1-\omega)^2\,36\omega^3(2-9\omega+12\omega^2-3\omega^3)},$$

donnant (seulement le signe — satisfera):

$$\psi = -\frac{1-3\omega}{6\omega(1-\omega)}\sqrt{-\frac{1-6\omega+3\omega^2}{\omega(2-9\omega+12\omega^2-3\omega^3)}} \quad \ldots \quad (4)$$

De l'équation (3) on peut résoudre aussi $x$. Puisque

$$1-2x = \pm\sqrt{1-4x(1-x)},$$

on aura (le signe — ne satisfait pas):

$$2x = 1 - \sqrt{1 - \frac{(1-3\omega)^4}{9\omega^3(2-9\omega+12\omega^2-3\omega^3)}},$$

ou bien, parceque $9\omega^3(2-9\omega+12\omega^2-3\omega^3)-(1-3\omega)^4 =$
$= -(1-6\omega+3\omega^2)(1-3\omega+3\omega^2)^2$ (voir p. 152):

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1-3\omega+3\omega^2}{6\omega}\sqrt{\phantom{x}} - \frac{1-6\omega+3\omega^2}{\omega(2-9\omega+12\omega^2-3\omega^3)} \cdot \quad (3^a)$$

Et puisque $\psi = \varphi + x$, nous trouvons finalement pour $\varphi$:

$$\varphi = \left(-\frac{1-3\omega}{6\omega(1-\omega)}\sqrt{\phantom{x}}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1-3\omega+3\omega^2}{6\omega}\sqrt{\phantom{x}},$$

c.-à-d.

$$\varphi = -\frac{1}{2} - \frac{1-6\omega+3\omega^2}{6(1-\omega)}\sqrt{\phantom{x}} \cdots\cdots\cdots \quad (4^a)$$

Ainsi nous avons exprimé $x$ et $\varphi$ en $\omega$, et l'on peut se figurer, que $x$ et $\omega$ soient exprimés explicitement en $\varphi$, ce qui cependant ne sera pas possible pratiquement.

*Discussion du résultat.*

Pour $(\varphi + 1/2)^2$ nous avons:

$$(\varphi + 1/2)^2 = -\frac{(1-6\omega+3\omega^2)^3}{36\omega(1-\omega)^2(2-9\omega+12\omega^2-3\omega^3)}.$$

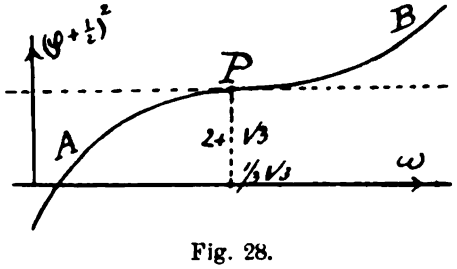


Fig. 28.

Or, le deuxième membre de cette équation sera représenté par la courbe $AB$ (fig. 28), ayant un point d'inflection en $P$ pour une valeur de $\omega = 1/3\sqrt{3}$. La valeur correspondante de $(\varphi + 1/2)^2$ sera alors $= 2 + \sqrt{3}$, de sorte que le point $P$ est précisément le *point double* de la courbe de plissement dans le cas $\beta = 0$. Mais alors il n'est pas nécessaire que la spinodale *touche* la ligne de plissement, car l'équation primitive

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial v} \times \left(\frac{dv}{dx}\right)_{p,T}$$

sera alors verifiée identiquement, $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial v}$ étant tous les deux $= 0$.

Dans le cas de la fig. 27 la valeur de $\varphi$ sera supérieure à celle du point double, par suite $(\varphi + 1/2)^2$ sera également plus élevé, et il s'ensuit de la fig. 28, que $\omega$ sera alors $> 1/3\sqrt{3}$. Cela veut dire, que la spinodale peut toucher seulement la courbe $AC_0$ en $R_2$ (type

II), et qu'un contact en $R_1$ et $R'_2$ ne peut pas se présenter, *de sorte que le Type III sera impossible pour des mélanges de substances normales, quand* $\beta = 0\ (b_1 = b_2)$.

7) Un autre cas spécial sera

$\beta$) Le cas $n = 1\ (p_1 = p_2)$.

Ici il y aura également des simplifications considérables dans le calcul. Car on aura maintenant:

$$\frac{b}{v} = \frac{b_1 + x\beta}{v} = \omega + x n \omega = \omega (1 + n x) = \omega \left(1 + \frac{x}{\varphi}\right),$$

$n = \frac{\beta}{b_1}$ étant $= \frac{1}{\varphi} = \frac{\alpha}{\sqrt{a_1}}$, tandis que $\frac{\beta\sqrt{a}}{\alpha v}$ deviendra également:

$$\frac{\beta\sqrt{a}}{\alpha v} = \frac{\beta}{v} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\alpha} = n\omega(\varphi + x) = \omega\left(1 + \frac{x}{\varphi}\right).$$

L'équation de la spinodale devient ainsi:

$$RT = \frac{2}{v}\left[x(1-x)\alpha^2(1-z)^2 + \alpha^2\psi^2(1-z)^2\right],$$

ou bien

$$RT = \frac{2\alpha^2(1-z)^2}{v}\left[x(1-x) + \psi^2\right],$$

lorsqu'on écrit $z$ pour $\omega\left(1 + \frac{x}{\varphi}\right)$ et $\psi$ pour $\varphi + x$.

Pour $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{p,T}$ nous trouvons:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{p,T} = \frac{\beta RT - 2\alpha^2\psi(1-z)^2}{RT - 2\frac{\alpha^2\psi^2}{v}(1-z)^2},$$

c.-à-d. après substition de la valeur de $RT$, et division par $\alpha^2(1-z)^2$:

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{p,T} = \frac{\frac{2\beta}{v}\left[x(1-x) + \psi^2\right] - 2\psi}{\frac{2}{v}\left[x(1-x) + \psi^2\right] - \frac{2\psi^2}{v}} = \frac{\beta\left[x(1-x) + \psi^2\right] - \psi v}{x(1-x)},$$

ou bien

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{p,T} = \beta + \frac{\psi}{x(1-x)}(\beta\psi - v) = \beta + \frac{\psi v}{x(1-x)}(n\omega\psi - 1).$$

Mais $n\omega\psi = \omega\frac{\psi}{\varphi} = z$, donc

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{p,T} = \beta - \frac{\psi v(1-z)}{x(1-x)}.$$

Or, parceque $z = \omega\frac{\psi}{\varphi} = n\omega\psi = \frac{\beta}{v}\psi$, on aura:

$$\frac{dz}{dx} = \beta\left(\frac{1}{v} - \frac{\psi}{v^2}\frac{dv}{dx}\right),$$

et par conséquent:

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{p,T} = \frac{\beta}{v}\left[1 - \frac{\beta\psi}{v} + \frac{\psi^2(1-z)}{x(1-x)}\right],$$

donc

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{p,T} = \frac{z(1-z)}{\psi}\left(1 + \frac{\psi^2}{x(1-x)}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (a)$$

L'équation de la courbe de plissement prendra la forme suivante:

$$x(1-x)\alpha^3 v^4 (1-z)^3\left[(1-2x) - 3x(1-x)\frac{\beta}{v}\right] +$$
$$+ \alpha\psi v^2(1-z)^2\left[3x(1-x)\alpha^2 v^2(1-z)(1-2z) +\right.$$
$$\left. + \alpha^2\psi^2 v^2(1-z)(1-3z)\right] = 0,$$

ce qui se réduit, après division par $\alpha^3 v^4(1-z)^3$, en

$$x(1-x)\left[(1-2x) - 3x(1-x)\frac{\beta}{v}\right] +$$
$$+ \psi\left[3x(1-x)(1-2z) + \psi^2(1-3z)\right] = 0,$$

ou bien en

$$1 - 2x - \frac{3x(1-x)z}{\psi} + 3\psi(1-2z) + \frac{\psi^3(1-3z)}{x(1-x)} = 0 \ldots\ldots (2)$$

L'équation (2) donne immédiatement:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2 - \frac{3(1-2x)z}{\psi} + \frac{3x(1-x)z}{\psi^2} + 3(1-2z) +$$
$$+ \frac{3\psi^2(1-3z)}{x(1-x)} - \frac{\psi^3(1-3z)(1-2x)}{x^2(1-x)^2} \ldots\ldots (b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{3x(1-x)}{\psi} - 6\psi - \frac{3\psi^3}{x(1-x)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c)$$

L'expression dernière peut s'écrire:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{3x(1-x)}{\psi}\left(1 + \frac{\psi^2}{x(1-x)}\right)^2.$$

Posons maintenant:

$$\frac{\psi^2}{x(1-x)} = u,$$

alors la condition (1), c.-à-d. $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{dz}{dx}\right)_{p,T}$, deviendra:

$$-2 - \frac{3(1-2x)z}{\psi} + \frac{3z}{u} + 3(1-2z) + 3(1-3z)u -$$
$$- \frac{(1-3z)(1-2x)u^2}{\psi} = \frac{3\psi}{u}(1+u)^2 \times \frac{z(1-z)}{\psi}(1+u),$$

ou bien

$$-2\psi u - 3(1-2x)zu + 3\psi z + 3\psi(1-2z)u + 3\psi(1-3z)u^2 -$$
$$-(1-3z)(1-2x)u^3 - 3\psi z(1-z)(1+u)^3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1^a)$$

Ceci, combiné avec l'équation de la courbe de plissement (2), c.-à-d.

$$1 - 2x - \frac{3\psi z}{u} + 3\psi(1-2z) + \psi(1-3z)u = 0,$$

ou

$$(1-2x)u - 3\psi z + 3\psi(1-2z)u + \psi(1-3z)u^2 = 0 \quad \ldots \quad (2^a)$$

donnera les données du point de contact de la spinodale avec la ligne de plissement

En substituant la valeur de $1-2x$, tirée de $(2^a)$, en $(1^a)$, il vient, en divisant par $\psi$:

$$(1-3z)^2u^4 + 3(1-6z+7z^2)u^3 + 3(1-6z+3z^2)u^2 +$$
$$+ (1-6z-9z^2)u - 6z^2 = 0,$$

équation, qui donne après division par $(u+1)^3$:

$$(1-3z)^2u - 6z^2 = 0,$$

c.-à-d.

$$u = \frac{6z^2}{(1-3z)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1^b)$$

Pour $\psi^2$ nous avons, $u$ étant $= \frac{\psi^2}{x(1-x)}$:

$$\psi^2 = x(1-x)u.$$

L'équation ($2^a$) donne:

$$\psi = \frac{(1-2x)\,u}{3z - 3(1-2z)\,u - (1-3z)\,u^2},$$

et nous trouverons donc pour $x$, en éliminant $\psi$:

$$\frac{(1-2x)^2\,u^2}{[3z - 3(1-2z)\,u - (1-3z)\,u^2]^2} = x(1-x)\,u.$$

Parce que $(1-2x)^2 = 1 - 4x(1-x)$, on aura par suite. en divisant encore par $u$:

$$x(1-x) = \frac{u}{N^2 + 4u}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

donc

$$x = \tfrac{1}{2} - \frac{\tfrac{1}{2}N}{\sqrt{N^2 + 4u}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3^a)$$

où $N$ désigne $3z - 3(1-2z)\,u - (1-3z)\,u^2$. (Le signe + ne satisfera pas).

[Nous pouvons contrôler ce résultat, en posant $z = 1$. Alors $v = b$, et la valeur correspondante de $x$ sera celle du point double de la courbe de plissement, qui vérifiera de nouveau (voir § 6) la condition $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial z}\left(\frac{dz}{dx}\right)_{p,T}$.

Pour $z = 1$ on a $u = \tfrac{3}{2}$, par suite $N = 12$, donc

$$x = \tfrac{1}{2} - \frac{6}{\sqrt{150}} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5}\sqrt{6} = 0{,}5 - 0{,}4899 = 0{,}0101,$$

et c'est en effet la valeur de $x$ pour le point double dans le cas $\pi = 1$].

En substituant pour $u$ sa valeur, donnée par ($1^b$), on trouve pour $N$:

$$N = \frac{3z(1 - 15z + 57z^2 - 75z^3)}{(1-3z)^3},$$

ce qui cependant ne donne pas de simplifications dans les expressions, que nous venons de déduire.

La valeur de $\psi$ est déterminée par

$$\psi = \sqrt{x(1-x)\,u},$$

d'où résulte:

$$\varphi = \psi - x = \sqrt{x(1-x)\,u} - x = -\tfrac{1}{2} + \frac{\tfrac{1}{2}N + u}{\sqrt{N^2 + 4u}} \quad \ldots \quad (4)$$

Ainsi on aura $x$ et $\varphi$ exprimées en $z$, c.-à-d. en $\frac{b}{v} = \omega\left(1 + \frac{x}{\varphi}\right)$, contenant encore $x$. Mais il ne sera pas possible de procéder plus loin, et d'exprimer $x$ et $v$ en $\varphi$, pas plus que dans le cas précédent (voir § 6).

*Discussion du résultat.*

Le tableau suivant donne les valeurs de $u, N, x, \varphi$ et $\Theta = \frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{1}{\varphi}$ pour $z = 1$ ($v = b$), $z = 1/2$ et $z = 1/3$ ($v = 3b$).

| | | | $x$ | $\varphi$ | $\Theta = 1 + \frac{1}{\varphi}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $z = 1$ | $u = 3/2$ | $N = 12$ | $1/2 - 1/5\sqrt{6} = 0{,}010$ | $-1/2 + 1/4\sqrt{6} = 0{,}112$ | 9,90 (point double) |
| $1/2$ | 6 | $19\,1/2$ | 0,015 | 0,283 | 4,53 |
| $1/3$ | $\infty^2$ | $\infty^3$ | $0 = \infty^{-4}$ | $0 = \infty^{-1}$ | $\infty^1$ |

On voit donc, que les valeurs de $x$ restent au voisinage de 0. Mais *la possibilité d'un contact entre la spinodale et la courbe de plissement* — et cela *deux* fois, comme l'exige la fig. 27 — et par suite *la possibilité du Type III pour le cas $\pi = 1$, se trouve démontré.*

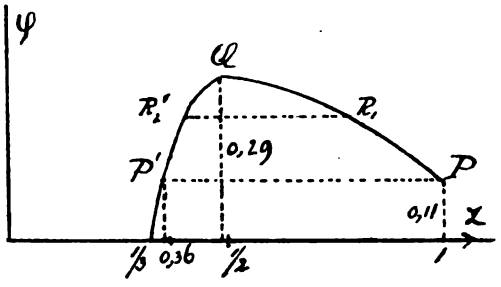


Fig. 29.

Car, la valeur de $\varphi$ étant nécessairement $> 0{,}11$ (la valeur dans le point double) et $z < 1$, pour que la cas du type III peuve se présenter, on voit clairement, qu'il y aura toujours *deux* points $R_1$ et $R_2'$ avec *deux* valeurs distinctes de $z\,(v)$ et donc de $x$, correspondant à une *même* valeur de $\varphi\,(\Theta)$, *quand cette valeur de $\varphi$ est comprise entre celle du point double (0,11) et une valeur maximale en $Q$*, que nous voulons déterminer. (voir fig. 29).

C'est en $Q$, que les deux points de contact $R_1$ et $R_2'$ de la ligne spinodale avec la courbe de plissement coincideront, et où on aura la *transition* du type normal II en le type anomal III. La connaissance de ce point $Q$ sera donc d'une importance tout-à-fait égale à la connaissance du point double en $P$, qui détermine la transition de I en II, et que nous avons discuté amplement dans

un Mémoire précédent dans ces Archives et dans les §§ 4 et 5 du Mémoire présent.

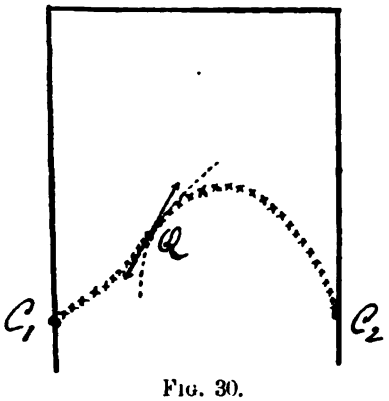


Fig. 30.

Evidemment la courbe de plissement aura au point de contact $Q$ avec la spinodale un *point d'inflexion* (voir fig. 30).

8) Le point $Q$ sera déterminé (voir fig 29) par la valeur *maximale* de $\varphi = f(z)$. Cherchons donc la valeur de $z$, où se présente cette valeur de $\varphi$, ou bien de $(\varphi + {}^1/_2)^2$. En vertu de (4) on a notamment:

$$(\varphi + {}^1/_2)^2 = \frac{({}^1/_2 N + u)^2}{N^2 + 4u}.$$

Il faut donc que la valeur de $\frac{N^2 + 4u}{(N + 2u)^2} = 1 - \frac{4u(N + u - 1)}{(N + 2u)^2}$ soit minimale, c.-à-d. celle de $\frac{u(N + u - 1)}{(N + 2u)^2}$ maximale.

Or, on a, en vertu de $N = 3z - 3(1 - 2z)u - (1 - 3z)u^2$:

$$N + u - 1 = -(1 - 3z)(1 + u)^2$$

$$N + 2u = [1 - (1 - 3z)(1 + u)](1 + u).$$

Par conséquent la valeur de

$$\frac{(1 - 3z)u}{[3z - (1 - 3z)u]^2}$$

doit être minimale. Mais en vertu de ($1^b$) on peut remplacer $(1 - 3z)u$ par $\frac{6z^2}{1 - 3z}$, de sorte que

$$\frac{9z^2\left[1 - \frac{2z}{1 - 3z}\right]^2}{\frac{6z^2}{1 - 3z}} = \frac{3}{2}\frac{(1 - 5z)^2}{1 - 3z},$$

ou bien

$$\frac{(1 - 5z)^2}{1 - 3z}$$

doit être maximale. On trouve facilement, que la valeur de $z$ sera alors:

$$\underline{z = {}^7/_{15}.}$$

Pour $u$ et $N$ on trouve ensuite:

$$u = 8\,{}^1/_6 \qquad N = 26\,{}^4/_9\,,$$

et les valeurs correspondantes de $x$ et $\varphi$ deviennent:

$$x = {}^1/_2 - {}^{17}/_{110}\sqrt{10} = 0{,}011$$
$$\varphi = -{}^1/_2 + {}^1/_4\sqrt{10} = 0{,}291.$$

La valeur de $\Theta$ est alors:

$$\Theta = {}^1/_3\,(7 + 2\sqrt{10}) = 4{,}44.$$

Le second système de valeurs pour $z$, $u$, $N$ et $x$, correspondant avec $\varphi = 0{,}11 = -{}^1/_2 + {}^1/_4\sqrt{6}$ sera évidemment, comme (voir p. 159)

$$\frac{1}{16\,(\varphi + {}^1/_2)^2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{3}\,\frac{1 - 3z}{(1 - 5z)^2}\,,$$

où $(\varphi + {}^1/_2)^2 = {}^3/_8$:

$$z = {}^9/_{25}\,,\ u = 121\,{}^1/_2\,,\ N = 1080,\ x = 0{,}0001,$$

et nous pouvons compléter le tableau sur le p. 158 comme suit:

| | | | $x$ | $\varphi$ | $\Theta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $z = {}^1/_3 = 0{,}33$ | $u = \infty^2$ | $N = \infty^3$ | $0 = \infty^{-4}$ | $0 = \infty^{-1}$ | $\infty^1$ |
| ${}^9/_{25} = 0{,}36$ | $121\,{}^1/_2$ | 1080 | 0,0001 | 0,112 | 9,90 |
| ${}^7/_{15} = 0{,}47$ | $8\,{}^1/_6$ | $26\,{}^4/_9$ | 0,011 | 0,291 | 4,44 |
| 1 | $1\,{}^1/_2$ | 12 | 0,010 | 0,112 | 9,90 |

On aura donc dans le cas $\underline{\pi = 1}$:

$\Theta > 1 \quad < 4{,}44$ Type II ($C_1C_2$ et $C_0A$)

$\Theta > 4{,}44 < 9{,}90$ Type III ($C_1C_2$ et $C_0A$. La spinodale touche $C_1C_2$ en $R_1$ et $R_2'$)

$\Theta > 9{,}90$ Type I ($C_1A$ et $C_2C_0$)

La transition de II—III se présente, lorsque

$$\underline{\Theta = 4{,}44} \quad ;\ \underline{z = {}^7/_{15}\,(v = 2\,{}^1/_7\,b)} \quad ; \quad \underline{x = 0{,}011},$$

tandis que la transition de III—I se présente au point double, lorsque

$$\underline{\Theta = 9{,}90} \quad ; \quad \underline{z = 1\,(v = b)} \quad ; \quad \underline{x = 0{,}010.}$$

Remarquons encore, que pour $\pi = 1$ le point de contact $R_2$ dans la courbe de plissement $C_0A$ (type II) manque, parce que $C_0A$ coïncide alors avec la droite $v = b$. Et qu'il y aura dans le

cas du point double un deuxième point de contact $R_1$ [$z = {}^9/_{25}$ ($v = 2^7/_9\, b$), $x = 0{,}0001$], de sorte qu'après la transition de III en I, lorsque $\Theta$ devient $> 9{,}90$ il y aura aussitôt un point de contact dans la branche $C_1A$, tout comme dans le cas $\beta = 0$, que nous avons discuté déjà dans notre Mémoire primitif sur ce sujet.

Dans la fig. 22 on peut donc tracer encore une ligne-limite, séparant II de III. Or, nous savons déjà, que cette ligne passera par un point sur la droite $\pi = 1$, comprise entre $B$ et la droite $\Theta = 1$ ($\Theta = 4{,}44$), et par le point sur la courbe-limite $BA$, où $\pi = \Theta = 2{,}89$. Dans ce dernier cas ($\beta = 0$) le domaine du Type III est exactement zéro, parce que le point $Q$ coïncide alors avec le point double $P$ (voir § 6).

Il serait très intéressant de savoir si la courbe-limite des points $Q$ *touche* la ligne-limite $BA$ au point $\pi = \Theta = 2{,}89$, ou bien s'il y a intersection de ces deux courbes en ce point. Nous saurions alors un peu plus de l'étendue du domaine du Type III.

L'examen du cas $\alpha = 0$ ($\pi = \Theta^2$) nous apprendra certainement quelque chose sur ce sujet, mais le calcul n'est plus si simple, relativement, que dans les deux cas précédents C est pourquoi nous réserverons le calcul et la discussion de ce cas pour un Mémoire suivant.

Nous aurons aussi à discuter l'influence de la *variabilité de b* avec $v$ et $T$, et de *l'association partielle* des molécules de l'une des deux composantes, ou des deux. On verra que ces influences tendent tous les deux à *abaisser* les valeurs-limites de $\Theta$, qui déterminent, pour une valeur donnée de $\pi$, la transition de II en III et de III en I.

Egalement le cas, qu'un pli *longitudinal* proprement dit se présente sur la surface $\Psi$ — *avant* le moment, où dans le cas du Type II une ligne spinodale aura *touché* la courbe de plissement $C_0A$ — doit être regardé de plus près. Nous verrons que notre théorie de l'allure des deux branches de la ligne de plissement peut rendre compte d'une manière naturelle de la naissance de ce pli chez des mélanges de substances *normales*.

Et finalement nous aurons à résumer tout ce que la théorie, que nous avons élaboré dans plusieurs Mémoires, nous a appris quant au sujet de la *miscibilité partielle* de deux *liquides*. Les trois types principaux représentent autant de cas principaux pour cette miscibilité, qui se distinguent en certains caractères très spécials.

Ainsi nous serons retourné au point de départ de nos recherches, car le but même, dans lequel nous avons entrepris tous ces calculs et discussions souvent longues et compliquées, était la connaissance plus précise des lois de la miscibilité mutuelle et partielle de deux liquides normales.

1904—Avril 1905.

*Remarque* (chez § 4, p. 139).

Nous voulons remarquer encore, que le produit des valeurs de $\Theta = \frac{T_2}{T_1}$ et $\pi = \frac{p_2}{p_1}$ pour le point double de la courbe de plissement (voir le tableau sur le page 133 ou 138) sera approximativement au voisinage de 9 à 11, comme est confirmé par le tableau suivant.

| $\Theta$ | $\pi$ | $\Theta \times \pi$ |
|---|---|---|
| 1 | 7,50 | 7,5 |
| 1,19 | 7,21 | 8,6 |
| 1,71 | 6,26 | 10,7 |
| 1,88 | 5,76 | 10,8 |
| 2,04 | 5,42 | 11,1 |
| 2,22 | 4,94 | 11,0 |
| 2,89 | 2,89 | 8,4 |
| 9,90 | 1,— | 9,9 |

Cette remarque sera parfois utile, lorsqu'on veut déterminer la valeur de $\pi$ pour le point double, correspondant à une valeur quelconque de $\Theta$.

# LA PLURALITÉ DES PÉRIODES GLACIAIRES DANS LES DÉPÔTS PLEISTOCÈNES ET PLIOCÈNES DES PAYS-BAS

PAR

EUG. DUBOIS

## I

Depuis longtemps on a rapporté les dépôts du pleistocène ou diluvium de l'Allemagne du Nord et du cours moyen du Rhin à plusieurs périodes glaciaires. On y a distingué trois de ces périodes.

Dans les Pays-Bas néerlandais, au contraire, on s'est contenté, jusqu'à ces derniers temps, d'une seule période glaciaire, malgré la continuité de ces dépôts avec le reste des „*Pays-Bas de l'Europe septentrionale*", comme l'ensemble de ces terres basses a été appelé par M. DE LAPPARENT [1]).

Avec la section belge de ces terres basses aussi la continuité est telle que les démarcations géologiques ne correspondent nulle part avec la limite des deux états. Néanmoins ce n'est qu'en 1902 que parut un essai de comparaison du pleistocène de la Belgique au glaciaire de l'Europe centrale [2]). M. RUTOT admet quatre phases d'avancement des glaces, dont les trois premières, appartenant au moséen, au campinien et au brabantien, correspondraient avec celles de l'Allemagne, tandis que la quatrième, appartenant au flandrien, ne correspondrait qu'avec un dépôt de l'Écosse.

Dans notre pays on ne voyait que la période de la plus grande

---

[1]) A. DE LAPPARENT, Leçons de géographie physique, p. 381. Paris, 1898.

[2]) A. RUTOT, Comparaison du Quaternaire de Belgique au Glaciaire de l'Europe centrale. [Bulletin de la Société belge de Géologie etc. Mémoires. Tome XIII. Année 1899, p. 307—321. Bruxelles 1902].

extension des glaces, la *seconde* ou période *saxonienne* de M. JAMES GEIKIE [3]), période du *lower boulder-clay* britannique, de l'*untere Geschiebemergel* de l'Allemagne du Nord, correspondant aussi au *Deckenschotter récent*, le *mindélien* de M.M. PENCK et BRÜCKNER [4]). On y rapportait le „diluvium graveleux entremêlé" et „scandinave", dépôts compris dans le „diluvium glacial" et reposant sur le „diluvium rhénan" et „moséan", que l'on considérait comme „préglacial", tandis que le „diluvium sableux" (avec son „facies marin", le „système eemien" de Harting), qui recouvre le diluvium entremêlé et scandinave, était considéré „postglacial" [5]).

Bien qu'aux environs d'Utrecht et à Gorkum, M. J. LORIÉ eût reconnu, dans les sondages, des dépôts de sable grossier, inférieurs et supérieurs, séparés, vers 25 à 30 et environ 70 mètres sous A. P., par des sables plus fins, il rejetait, encore en 1902, la possibilité de rapporter ces deux divisions grossières à deux périodes glaciaires différentes, possibilité qui toutefois s'était présentée à son esprit depuis 1891 [6]).

En parlant des trois divisions du diluvium dans les sondages d'Utrecht, M. LORIÉ, dit en 1891, qu'il ne peut, pour le moment, voir aucun autre alternatif que les suivants:

1. Admettre que l'ensemble doit être considéré comme *diluvium graveleux*, qui d'ailleurs, ainsi qu'il ressort des observations faites dans des tranchées pour chemins de fer, peut consister quelquefois en grande partie de sable avec de l'argile.

2. On pourrait aussi considérer la seconde division comme du *diluvium sableux* plus ancien ou *interglaciaire* et la première comme un *diluvium graveleux*, correspondant avec la seconde extension des glaces scandinaves. Bien qu'il soit plus que probable que

---

[3]) JAMES GEIKIE, Classification of European Glacial Deposits. [Journal of Geology. Vol. III, p. 241—269. Chicago, 1895.]

[4]) PENCK et BRÜCKNER, Die Alpen im Eiszeitalter, p. 110. Leipzig, 1901 - 1906.

[5]) J. LORIÉ, Contributions à la géologie des Pays-Bas. p.p. 1—160. [Archives du Musée Teyler. Série II. Vol. III. Haarlem, 1892]. Voir aussi de cet auteur les descriptions de sondages, dans les „Verhandelingen der Kon. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam", publiées ultérieurement.

[6]) Tijdschrift van het Kon. Nederlandsch Aardrijkskundig Genootschap. 2e Serie. Deel VIII, p. 373. Leiden, 1891, et: Verhandelingen der Kon. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Tweede Serie. Deel VIII, No 4, p. 25. 1902.

Voir aussi: Bulletin de la Société belge de Géologie, etc. Tome III, (Année 1889), Mémoires, p. 448.

celle-ci n'ait absolument pas atteint notre pays, on peut très bien se figurer, que la même cause qui eut pour effet une extension plus petite de la glace continentale scandinave (température plus basse et précipitations augmentées) renforçait aussi le pouvoir transportatif des rivières.

3. Outre ces deux explications possibles, il en est une autre, que la seconde division correspond en effet au *diluvium sableux* ordinaire, mais que la première division n'est qu'un dépôt local de gravier, ainsi qu'une masse déplacée des collines des environs.

En 1902 M. LORIÉ se prononce sur la tripartition du diluvium ancien, aux environs d'Utrecht, en ces termes:

Le gravier supérieur, pouvant en tout cas être considéré comme un dépôt de la période glaciaire la plus importante, c'est à dire la seconde, il est très tentant de rapporter la division fine, contenant de l'argile et de la tourbe, à la période interglaciaire et la division inférieure grossière à la première période glaciaire. Mais les points de contact avec des dépôts bien caractérisés nous manquent pour prouver cette thèse.

Il est clair que M. LORIÉ, en 1902, n'a pas encore succombé à cette tentation et continue à regarder le diluvium graveleux, avec ses couches de sable grossier, supérieures et inférieures, et les couches de sable fin intermédiaires, comme appartenant à une seule période glaciaire, une et indivisible.

Ce n'est qu'en 1903 que l'existence de dépôts d'une autre période glaciaire, postérieure à celle généralement admise, fut démontrée dans les Pays-Bas. Au sommet du diluvium sableux ou „postglacial" de M. LORIÉ on trouvait alors, dans le sol de la Hollande du Nord, de vrais dépôts glaciaires [7]). Nous y reviendrons dans la suite.

Cependant, encore en 1904, M. LORIÉ [8]) pense que les sables grossiers inférieurs et supérieurs, dans les sondages des provinces du Nord-Est de notre pays, sondages qui vont jusqu'à 135 mètres de

---

[7]) EUG. DUBOIS, Diepgelegen keienleem van een jongeren ijstijd in den bodem van Noord-Holland. [Kon. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Verslag van de Vergadering der Wis- en Natuurkundige afdeeling, van 30 Mei 1903], publié en Juin 1908. Aussi: Deep Boulder Clay Beds of a latter Glacial Period in North-Holland. [Proceedings, Ibid.]

[8]) Verhandelingen der Kon. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, 2de Sectie, Deel X, N°. 5, p. 20.

profondeur, s'expliquent par une simple oscillation du glacier scandinave, il ne croit pas avoir besoin, pour cela, de deux périodes glaciaires.

Cette même année le „diluvium rhénan" de STARING et ses successeurs, nommé généralement aussi „diluvium préglacial", fut rapporté à la *première* période glaciaire pleistocène et regardé comme l'équivalent du *Deckenschotter*, dépôt fluvio-glaciaire du *mittelrheinische Diluvium* [9]) des auteurs allemands [10]). Il fut alors demontré que l'argile de Tégelen, dépôt sous-jacent à ces graviers et sables fluvio-glaciaires du „diluvium rhénan", (proprement „moséo-rhénan"), ne peut être rapportée, par les fossiles qu'elle contient, qu'au pliocène supérieur [11]).

L'horizon stratigraphique de la *base* du pleistocène des Pays-Bas étant donc à présent de tous, le mieux défini, nous pouvons le prendre pour plan de répère.

Antérieurement, le diluvium moséo-rhénan était considéré comme le plus ancien, déjà par STARING, mais appartenant à une même période glaciaire que le diluvium scandinave, quoiqu'on nommât le premier „préglacial". Pour M. A. ERENS rien n'était plus naturel; le glacier scandinave, très lent dans sa formation et dans sa marche, n'étant arrivé dans les Pays-Bas qu'après que le Rhin et la Meuse y eurent déposé, même dans les parties septentrionales du pays, des détritus et des pierres d'origine méridionale [12]). Encore en 1905 M. LORIÉ s'est prononcé de la même manière et en employant le même argument que M. ERENS [13]).

---

[9]) EUG. DUBOIS, Over een equivalent van het Cromer Forest-Bed in Nederland. [Kon. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Verslag van de Vergadering der Wis- en Natuurkundige afdeeling van 24 September 1904], publié en Octobre 1904. Aussi: On an equivalent of the Cromer Forest-Bed in the Netherlands. [Proceedings. Ibidem].

[10]) Voir: H. CREDNER, Elemente der Geologie, 9te Auflage, p. 747—748. Leipzig, 1902, où sont indiquées les divisions de ce Diluvium du Rhin moyen, avec la bibliographie principale.

[11]) EUG. DUBOIS, L'âge de l'Argile de Tégelen et les espèces de Cervidés qu'elle contient. Archives du Musée Teyler. Série II, Tome IX, p. 605—611. Haarlem 1905. Voir aussi le travail cité dans la note 9.

[12]) A. ERENS, Recherches sur les formations diluviennes du Sud des Pays-Bas, p. 539. [Archives du Musée Teyler, Série II, Vol. III. Haarlem 1892].

[13]) J. LORIÉ, Beschrijving van eenige nieuwe grondboringen, VI, p. 49. [Verhandelingen der Kon. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. (Tweede Sectie). Deel 12, N°. 2. 1905].

Cependant cette conclusion péremptoire me semble loin d'être prouvée.

D'abord il a été démontré (par le travail cité dans la note 9) que la glace a largement contribué au dépôt des graviers en question, puisqu'ils contiennent, en nombre considérable, de gros blocs d'origine méridionale Mais, de plus, il paraît inévitable, ainsi qu'il a déjà été indiqué dans ce même travail de 1904 (note 9), d'assimiler le transport de l'ensemble de ces cailloutis fluvio-glaciaires à celui qui se produit, quoique comme un phénomène annuel, dans les fleuves actuels de la Sibérie, du Canada et de l'Alaska [14]).

Les eaux d'un fleuve, quelque puissant qu'il soit, ne déplacent des gros graviers de fond que quand la pente appartient au régime torrentiel, ce qui implique des vitesses trois fois celles des grandes rivières.

Or, un régime torrentiel est impossible sur un sol composé de terrains meubles, comme ceux sur lesquels a dû couler le Rhin, depuis sa sortie du massif rhénan, sur une centaine de kilomètres, lorsqu'il a déposé le „diluvium préglacial" dans la partie septentrionale de la province du Limbourg néerlandais, où, à la base des graviers et reposant sur l'argile pliocène, se trouve généralement une couche de sable assez fin. épaisse jusqu'à 2 ou 3 mètres. L'existence de cette base de sable fin prouve déjà que les graviers n'y ont pas été apportés par des vitesses torrentielles de l'eau courante.

Il n'est pas admissible que de nombreux cailloux ayent fait le trajet de l'amont de l'ancien Rhin et de l'ancienne Meuse jusqu'aux parties septentrionales, non seulement du Limbourg, mais des Pays-Bas, sur un terrain composé d'alluvions, autrement que transportés par des glaces. De plus, on ne peut se figurer un transport assez considérable par de simples glaçons; il n'y a pas d'autre moyen de comprendre le transport des matériaux de ces dépôts que par la glace de fond.

A l'amont du Rhin et de la Meuse la formation de glace de fond doit avoir été un phénomène très général aux périodes glaciaires de l'époque pleistocène. Ces glaces, adhérant aux lits des rivières, comprenaient dans leur masse les cailloux qui les

---

[14]) A. DE LAPPARENT, Traité de Géologie. Cinquième Édition, pp. 314—317. Paris 1906.

jonchaient. Avec le dégel universel, des radeaux de glace dérivaient vers l'aval, y apportant les matériaux des graviers.

Il paraît impossible que dans des conditions climatologiques pareilles à l'état actuel un transport de cailloux aussi considérable ait pu avoir lieu. En effet nous n'observons aucun cailloutis (non-remanié) dans les dépôts post-glaciaires des Pays-Bas.

Ces graviers „préglaciaux", constituant le diluvium moséo-rhénan, ne peuvent donc avoir été déposés qu'*à la fin* d'une période glaciaire; de sorte qu'il me semble inévitable de conclure qu'ils appartiennent à une période glaciaire *antérieure* à la seconde période glaciaire de l'ère pleistocène ou celle du „diluvium graveleux entremêlé" et „scandinave".

Que le dépôt du „diluvium rhénan" date de bien longtemps avant le „diluvium scandinave" l'existence des épais dépôts de sables fins et d'argile qui les séparent à Sneek (épaisseur 25 mètres), à Assen (60 à 100 mètres), et à Utrecht (40 mètres) nous en fournit la preuve. Il est vrai que dans d'autres cas le „diluvium glaciaire" et le „diluvium rhénan" sont en contact direct, mais évidemment les premiers cas n'en perdent rien de leur signification.

Le diluvium moséo-rhénan des Pays-Bas ne peut donc qu'appartenir à la *première période glaciaire* de l'ère pleistocène, la *période günzienne* de M.M. Penck et Brückner, correspondant à la *période scanienne* de M. James Geikie.

Les glaces formées dans celle-ci ont dû déblayer, en grande partie, les régions en amont du Rhin et de la Meuse des graviers avec leurs cailloux, galets et blocs accumulés dans ces parties à régime torrentiel, pendant la longue période d'érosion de l'ère tertiaire. Il n'est donc pas étonnant que les périodes glaciaires ultérieures n'ont pas produit des dépôts fluvio-glaciaires dans les Pays-Bas d'une importance pareille à celle du diluvium moséo-rhénan, dit „préglacial". En outre il est difficile de reconnaître ces dépôts fluvio-glaciaires ultérieurs, déjà bien moins considérables que les premiers, parce qu'ils se sont mélangés aux dépôts antérieurement amenés du Nord.

Quant à ces derniers, qui appartiennent à la seconde, c'est-à-dire la plus considérable période d'extension des glaces du pleistocène, ils doivent consister, en grande partie, des matériaux des dépôts glaciaires de l'extension antérieure, qui alors furent transportés plus loin. C'est ainsi que je me figure aussi que le bassin de la Baltique fut déblayé des dépôts glaciaires de la période

scanienne, dépôts qui n'arrivaient pas directement dans les Pays-Bas, mais seulement par suite de ce transport secondaire [15]).

En 1905, M. LORIÉ (p. 49 de son travail cité dans la note 13), bien qu'acceptant le caractère fluvio-glaciaire du gravier superposé à l'argile de Tégelen, considère ce gravier comme appartenant à la seconde période glaciaire de l'ère pleistocène, quoique déposé avant que le glacier scandinave eût atteint notre pays. Il dit que les plantes et les animaux de l'argile de Tégelen ont vécu dans un climat tempéré et que cette argile est probablement interglaciaire et l'équivalent de la division fine moyenne des sondages dans les autres parties des Pays-Bas; car à présent il ne rejette plus la conception de rapporter cette division moyenne fine à une période interglaciaire, s'étant assuré de la justesse de mes observations de 1903 (note 7). M. LORIÉ considère que, puisque le sous-jacent de l'argile n'est pas encore connu, la seule chose qu'on peut baser sur les données stratigraphiques est que les fossiles qu'elle contient sont plus anciens que le gravier. Cela est incontestablement vrai, mais en même temps cela renverse l'ordre d'appréciation des faits qui est en vogue, et non sans de bonnes raissons. Pour la majorité des géologues c'est à la paléontologie qu'appartient le premier, et même aussi le dernier mot, dans toute question d'âge géologique. Or, la paléontologie s'est prononcée et elle s'était déjà prononcée en 1904, dans le travail cité par M. LORIÉ (celui de la note 9), décidément en faveur de l'âge pliocène de l'argile de Tégelen. En effet les Cerfs que l'on trouve dans cette assise appartiennent à plusieurs types anciens, qu'on n'a jamais rencontrés dans le pleistocène incontestable. De même la présence de l'*Equus Stenonis* indique le pliocène. Mais surtout le nombre considérable de plantes caractérisant le tertiaire dans ces régions de l'Europe, plantes dont quelques'unes ne trouvent plus leurs pareilles dans la flore vivante que dans l'Amérique et l'Asie orientale, dautres dans les régions méridionales de l'Europe et du Sud-Ouest de l'Asie, est incompatible avec l'âge pleistocène (interglaciaire) attribué à cette assise par M. LORIÉ.

---

[15]) EUG. DUBOIS, De geographische en geologische beteekenis van den Hondsrug en het onderzoek der zwerfsteenen in ons noordsch Diluvium. [Kon. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. Verslag van de vergadering der Wis- en Natuurkundige Afdeeling van 30 Sept. 1905] publié en Octobre 1905. Voir aussi: The geographical and geological Signification of the Hondsrug in the Northern Diluvium of Holland (Proceedings Ibid.).

Évidemment la présence de *Rhinoceros etruscus*, *Hippopotamus amphibius major* et *Trogontherium Cuvieri*, espèces qui se trouvent aussi dans l'interglaciaire le plus ancien, entre autres de Moosbach, ne prouve rien contre son caractère pliocène. En outre il semble que du moins l'Hippopotame ait eu besoin d'hivers bien moins rigoureux que ceux qui régnent au temps présent dans ces parages.

Afin de faciliter au lecteur l'appréciation de l'âge de l'argile de Tégelen j'ai représenté sur la planche annexée, quelques fossiles végétaux, appartenant à trois espèces qui certainement ne sauraient être rapportées au pleistocène. Des noix de *Juglans tephrodes*, Ung. (= *J. cinerea L. fossilis*, GEYLER et KINKELIN), espèce à peine distincte de celle vivant encore aujourd'hui dans l'Amérique, sont communes dans les lignites du pliocène supérieur du bassin de Mayence et de la Wetteravie [16]). Les graines de la *Magnolia* de Tégelen ressemblent étroitement à celles de *Magnolia Kobus*, DC. du Japon, que j'ai eu l'occasion de comparer en grand nombre, ainsi que d'autres espèces, grâce à la complaisance de mon ami le Dr. M. GRESHOFF et de M. le Professeur J. M. JANSE. Elles ne semblent pas différentes de la *Magnolia cor*, décrite par Ludwig des lignites de la Wetteravie [17]). Le genre *Vitis*, très répandu dans le tertiaire néogène, est aussi un de ces types que l'on ne saurait rapporter au pleistocène de la zone climatologique de Tégelen. Nous pouvons en dire autant de *Staphylea pinnata* et de *Stratiotes Websteri*, de *Taxodium* (*Glyptostrobus*) *heterophyllum* et de *Sequoia*. Qu'à côté de ces espèces il s'en trouve d'autres, dans l'argile de Tégelen, d'un aspect plus moderne, ne saurait affaiblir la force démonstrative de la présence des premières.

En Juillet, l'année passée, j'ai eu le plaisir de rendre une courte visite à l'argilière de MM. CANOY, HERFKENS et CIE. à Tégelen, avec M. CLEMENT REID. J'y avais commandé deux boîtes égales, que M. REID fit remplir avec l'argile du fond de la fosse, au même endroit et exactement de la même manière, de sorte que le contenu des deux boîtes était en tout point comparable. L'une

---

[16]) TH. GEYLER und F. KINKELIN, Oberpliocänflora aus den Baugruben des Klärbeckens bei Niederrad und der Schleuse bei Höchst a. M., p. 31. [Abhandlungen herausgegeben von der Senckenbergischen Naturforschenden Gesellschaft. Bd. XV. Frankfurt 1887].

[17]) R. LUDWIG, Fossile Pflanzen aus der jüngsten Wetterauer Braunkohle, p. 97—98. Taf. XXI. [Palaeontographica, Bd. 5. Cassel 1858].

lui fut expédiée, l'autre m'était destinée. Le volume interne de chacune d'elles était de 0.42 × 0.42 × 0.21 = 0 037 $M^3$. Chaque boîte ne contenait donc certainement pas plus d'un pied cubique (= 0.028 $M^3$) d'argile, abstraction faite des interstices des morceaux.

Or, dans une „épreuve de distribution préalable" du Bulletin de la Société belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie, qui parut en décembre 1905, M. Reid dit qu'il a trouvé, dans son pied cubique d'argile de Tégelen, une flore composée de 70 à 80 espèces! J'avoue que dans le mien, en suivant la „méthode de travailler" de M. Reid, c'est à dire en lavant l'argile sur un tamis; je n'ai pu distinguer que le dixième ou le huitième de ce nombre d'espèces fossiles, y comprises les non-déterminées. Parmi ces espèces étaient *Magnolia cor* Ludwig, *Vitis vinifera* L., *Pterocarya fraxinifolia* Spach. Depuis une huitaine d'années j'ai cherché, quelquefois avec mes étudiants, pour ces débris, au moyen de la loupe, dans l'argile, prise en divers endroits de la fosse, cependant le nombre des espèces rencontrées est certainement bien inférieur à celui du seul pied d'argile de M. Reid. Souvent aussi j'ai examiné, à la loupe, des surfaces lisses produites par la pelle dans la partie de l'argile la plus riche en débris végétaux. A la suite de l'expérience ainsi acquise je suis bien étonné de l'entassement d'espèces dans le pied d'argile de M. Reid.

Aussi l'assertion de M. Reid que „les deux flores sont étroitement alliées", de sorte qu'il ne pourrait dire actuellement „laquelle est la plus ancienne", ne peut qu'étonner beaucoup chacun qui connait le caractère des deux flores.

Quant aux Cerfs, dont les bois sont parmi les plus communs des ossements fossiles de Tégelen, aucune des espèces ne se range à côté des espèces pleistocènes de ces régions de l'Europe. *Cervus elaphus* (avec les formes annexes, telles que *C. canadensis*) y manque absolument. Cependant cette espèce est abondante dans les faunes pleistocènes, même celle de Moosbach, faune du premier interglaciaire pleistocène qui se rapproche quelque peu (par *Rhinoceros etruscus*, *Hippopotamus amphibius major*, *Trogontherium Cuvieri*) des faunes pliocènes.

Des espèces de Cerfs de Tégelen, au contraire, le *Cervus rhenanus* appartient incontestablement au sous-genre *Axis* Une autre espèce n'est comparable qu'avec le *Cervus dicranius* et les formes tertiaires analogues (telles que *C verticornis*). La troisième espèce, le *Cervus teguliensis*, non encore rencontrée ailleurs, ne peut être rapportée à aucune espèce pleistocène.

Le Musée Teyler vient d'acquérir le bois complet de *Cervus teguliensis* que j'ai représenté sur notre planche (fig. 5). Il me paraît utile d'en dire ici quelques mots.

De même que plusieurs bois de cette espèce, déjà obtenus antérieurement, le nouveau bois ne possède pas le double andouiller basilaire de *Cervus elaphus*, quoiqu'il provienne évidemment d'un individu bien moins âgé que celui des figs. 1 et 2 et plûtot comparable à celui de la figure 5 de la planche annexée à mon premier article sur les Cervidés de Tégelen

Les dimensions et la forme générale du bois, le nombre, les implantations et la forme des andouillers ne nous laissent point de doute que ce bois ne provient du *Cervus teguliensis*. Il ne diffère des bois antérieurement décrits que par quelques traits que je considère être individuels et la conséquence de la différence d'âge. Aussi la description générale que j'ai déjà donnée du bois de cette espèce (Archives, Tome IX, pp. 6—9) est applicable au nouveau bois.

En voici d'abord les principales dimensions:

| | | |
|---|---|---|
| Longueur totale du bois, de la base à l'extrémité du merrain, | 705 | m.M |
| Distance de l'extrémité de l'andouiller basilaire à celle du merrain | 705 | „ |
| „ entre les milieux des bases des andouillers I et II | 255 | „ |
| „ „ „ „ „ „ „ „ II et III | 150 | „ |
| Longueur de l'andouiller basilaire (mesurée de l'aisselle) | 235 | „ |
| „ „ „ II (mesurée du milieu de la base) | 185 | „ |
| „ „ „ III „ „ „ „ „ „ | 280 | „ |
| „ „ la pointe du merrain ou quatrième pointe (mesurée de l'aisselle) | 295 | „ |
| Distance du cercle de pierrures (milieu de son hauteur) à l'aisselle de l'andouiller basilaire 45 à | 50 | „ |

Presque rond dans sa moitié inférieure, le merrain obtient un aplatissement de 44 : 33 ou 4 : 3 entre le second et le troisième des andouillers; il est encore plus aplati à la base du troisième andouiller.

Le nouveau bois se distingue du bois complet antérieurement décrit, en ce que, des deux andouillers supérieurs, le premier est moins long que le second, et que ce dernier s'implante sur le merrain par un angle assez aigu et non presque droit. De plus la longueur relative et la forme de la pointe du merrain, la quatrième du bois, sont bien différentes, ainsi qu'il ressort de la fig. 5.

Il ne lui manque pas d'indications des deux saillies sur les

deux côtés de la première bifurcation, l'une sur la face interne et antérieure du merrain, l'autre sur l'andouiller basilaire, que j'ai déjà signalé chez cette espèce et dont la première nommée semble être plus ou moins constante. Ces saillies ont été un peu rongées, de même qu'une grande partie du reste du bois, probablement par le *Trogontherium*, dont les ossements se trouvent fréquemment dans l'argile de Tégelen.

Quoique les saillies en question se retrouvent chez le *Cervus Eldi*, la constance de celle sur le merrain au même endroit où s'implante le second andouiller basilaire des cerfs élaphes, la grande distance entre l'andouiller basilaire et les autres andouillers, de même que plusieurs traits par lesquels le nouveau bois diffère de ceux figurés antérieurement, (surtout en ce que l'andouiller supérieur est le plus grand de tous) me semblent rapprocher *Cervus teguliensis* des espèces primitives du sous-genre *Elaphus* Ces espèces représentées surtout par *Cervus albirostris* (le Cerf de Thorold) ont aussi, à l'opposé des vraies espèces élaphes, le bois non compliqué et les andouillers supérieurs ne s'assemblent pas en forme de coupe; les pointes ne surpassent pas le nombre quatre ou cinq, tout au plus, et le bois ne possède pas le double andouiller basilaire des vrais élaphes; enfin il est plus ou moins aplati dans sa moitié supérieure. Par ces caractères *C. albirostris*, de même que notre espèce fossile, se rallie étroitement au sous-genre des *Sika* ou *Pseudaxis*, duquel les cerfs elaphes semblent être dérivés et qui probablement inclut plusieurs formes pliocènes de la France, telles que *Cervus Perrieri*, *etueriarum*, *pardinensis*, *issiodorensis* et *rusoides*.

L'espèce de Tégelen diffère cependant de *Cervus albirostris*, de même que de tous les autres membres du groupe *Elaphus* (et aussi des *Pseudaxis*), en ce que, d'après les spécimens jusqu'à présent connus, elle n'obtient jamais plus de quatres pointes, un quatrième andouiller (cinquième chez les *Elaphus* à double andouiller basilaire) ne se développant pas.

Le bois de *Cervus teguliensis* se distingue encore du Cerf de Thorold par la droitesse de son merrain qui, chez ce dernier, à l'origine de l'andouiller moyen, se recourbe brusquement en arrière. Cette droitesse, continuée jusqu'au dernier andouiller, le distingue également de tous les autres *Elaphus*, chez lesquels le merrain se recourbe, du moins à la base de l'andouiller supérieur. Par ces caractères il s'éloigne encore plus du type général de ce groupe que ne le fait déjà le *Cervus albirostris*.

Par ces deux derniers caractères *Cervus teguliensis* se distingue aussi de *C. Perrieri* et de ses formes alliées.

En somme je suis disposé, par l'étude du nouveau bois, à considérer *Cervus teguliensis* comme une forme primitive du sous-genre *Elaphus*, de laquelle le Cerf de Thorold est probablement le plus proche parent parmi les espèces vivantes.

Aux yeux de la plupart des géologues les faits paléontologiques bien établis, concernant l'argile de Tégelen, qui la rapportent au pliocène supérieur, devront être d'assez bons arguments, par lesquels, pris ensemble avec les considérations sur le caractère et le mode de dépôt du gravier superposé, il est prouvé que ce gravier appartient à la première période glaciaire du pleistocène, période suivant immédiatement l'époque pliocène. En effet il n'y a aucun horizon stratigraphique dans le pleistocène des Pays-Bas aussi bien défini.

Le grand intérêt qu'il y aurait à connaître les dépôts immédiatement sous-jacents à l'Argile de Tégelen, a induit M.M. les directeurs de la Fondation Teyler à faire exécuter quelques sondages dans cette contrée, où le tertiaire paraît passer insensiblement au pleistocène.

Le premier sondage, exécuté en janvier de l'année courante, par M. A. J. Stoel de Haarlem, dans l'argilière de M.M. Canoy, Herfkens et Cie., et auquel j'assistais, a déjà donné des résultats très remarquables, qui méritent une description détaillée.

Sondage de la bruyère de Jammerdaal (Tégelen).

| Numéro d'ordre | Description des couches rencontrées. | Base, rapportée au A.P., en mètres. | Épaisseur, en mètres. |
|---|---|---|---|
| 1. | Sable et gravier („diluvium rhénan") de +34.7 M. à..... | +27.7 | 7.0 |
| 2. | Sable quartzeux assez fin, jaune clair, presque blanc. (Épaisseur en d'autres endroits jusqu'à 2 mètres)..... | 27.0 | 0.7 |
| 3. | Argile jaune-foncé, peu sableuse, avec fines paillettes de mica..... | 25.0 | 2.0 |
| 4. | Sable peu argileux, gris-jaunâtre..... | 24.7 | 0.3 |
| 5. | Argile grise, sableuse, avec fines paillettes de mica..... | 24.4 | 0.3 |

| Numéro d'ordre | Description des couches rencontrées. | Base, rapportée au A.P., en mètres | Épaisseur, en mètres. |
|---|---|---|---|
| 6. | Argile bleue, très plastique | +23.3 | 1.1 |
| 7. | Argile peu sableuse, plus claire, verdâtre | 22.2 | 1.1 |
| 8. | Argile gris-foncé, brunâtre. Contient des tubes de racines et beaucoup de restes végétaux, parmi lesquels, surtout dans sa moitié supérieure, des graines de plantes: *Vitis*, *Magnolia*, *Pterocarya*, etc. | 21.9 | 0.7 |
| 9. | Argile gris-bleuâtre | 20.4 | 0.5 |
| 10. | Argile sableuse, bleu-grisâtre | 19.0 | 1.4 |
| 11. | Argile sableuse, gris-bleuâtre | 18.5 | 0.5 |
| 12. | Sable gris, assez fin | 18.0 | 0.5 |
| 13. | Sable gris, un peu grossier, avec quelques cailloux très petits, surtout de quartz blanc, ayant jusqu'à 4 millimètres de dimension maximale | 17.5 | 0.5 |
| 14. | Sable grossier, avec beaucoup de ces mêmes cailloux, aux dimensions déjà bien augmentées, allant jusqu'à 24 et même 40 millimètre et dont de poids s'élève jusqu'à 7.5 grammes | 14.5 | 3.0 |
| 15. | Sable grossier et gros gravier | 13.0 | 1.5 |
| 16. | Gravier. Quartz blanc, quartzites gris, verdâtres et rouges, grauwacke, lydites, silex: pierres d'origine rhénane et en partie moséane. Les plus grandes pierres surpassent les 10 centimètres du tube de sonde. Ce gravier ne diffère pas, en sa matière, de celui du „diluvium rhénan". | 12.0 | 1.0 |
| 17. | Sable grossier, avec petits cailloux | 11.2 | 0.8 |
| 18. | Sable grossier et gros gravier | 7.0 | 4.2 |
| 19. | Sable peu grossier, gris foncé, sans cailloux | 6.5 | 0.5 |
| 20. | Sable grossier et gravier médiocre | 5.5 | 1.0 |
| 21. | Sable assez fin, gris foncé, sans cailloux | 4.7 | 0.8 |
| 22. | Bois | 4.5 | 0.2 |
| 23. | Sable très fin, gris, un peu argileux | 4.3 | 0.2 |
| 24. | Argile brun-foncé et tourbe | 4.0 | 0.3 |
| 25. | Sable gris, très fin | 3.7 | 0.3 |
| 26. | Argile sableuse, gris-foncé | 3.5 | 0.2 |
| 27. | Argile gris-claire | 2.9 | 0.6 |
| 28. | Sable gris, fin | 2.7 | 0.2 |
| 29. | Argile gris-foncé | 1.5 | 1.2 |
| 30. | Argile gris brunâtre, avec minces couches de sable | 0.5 | 1.0 |
| 31. | Argile brune, avec restes végétaux (bois) | — 1.1 | 1.6 |

| Numéro d'ordre | Description des couches rencontrées. | Base, rapportée au A.P., en mètres. | Épaisseur, en mètres. |
|---|---|---|---|
| 32. | Terre noire végétale, peu cohérente (terreau) | −1.3 | 0.2 |
| 33. | Bois | 1.4 | 0.1 |
| 34. | Argile très sableuse, gris-foncé | 2.3 | 0.9 |
| 35. | Tourbe | 2.9 | 0.6 |
| 36. | Argile gris-foncé, très sableuse | 3.7 | 0.8 |
| 37. | Argile grise | 4.1 | 0.4 |
| 38. | Argile gris-clair | 4.5 | 0.4 |
| 39. | Argile gris-foncé | 4.9 | 0.4 |
| 40. | Sable fin gris-jaunâtre | 4.95 | 0.05 |
| 41. | Argile gris-clair | 5.3 | 0.35 |
| 42. | Argile gris-foncé | 5.7 | 0.4 |
| 43. | Argile gris-clair | 6 8 | 1.1 |
| 44. | Argile sableuse gris-clair | 7.8 | 1.0 |
| 45. | Argile gris-foncé | 8.0 | 0.2 |
| 46. | Argile sableuse gris clair | 9.5 | 1.5 |
| 47. | Sable fin gris-clair | 11.5 | 2.0 |
| 48. | Sable gris, grossier, avec quelques petits cailloux de quartz blanc, quartzites gris, lydites et des rares silex, dimensions jusqu'à 25 millimètres, tout au plus, et 5 grammes de poids | 18.0 | 6.5 |
| 49. | Sable grossier, gris-foncé | 20.0 | 2.0 |
| 50. | Le même sable, moins grossier | 29.5 | 9.5 |

En condensant ces résultats du sondage on a:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sable grossier et gravier („diluvium rhénan") | de 34.7 m. | à 27.7 m. | + | A.P. | Épaisseur | 7.0 M. |
| Sable assez fin | „ 27.7 „ | „ 27.0 „ | + | „ | „ | 0.7 „ |
| Argile, avec restes végétaux (fossiles du pliocène supérieur) | „ 27.0 „ | „ 18.5 „ | + | „ | „ | 8.5 „ |
| Sable fin | „ 18.5 „ | „ 18.0 „ | + | „ | „ | 0.5 „ |
| Sable grossier et gravier | „ 18.0 „ | „ 5.5 „ | + | „ | „ | 12.5 „ |
| Sable fin | „ 5.5 „ | „ 4.3 „ | + | „ | „ | 1.2 „ |
| Argile, avec restes végétaux | „ 4.3 „ | + „ 9.5 „ | — | „ | „ | 13.8 „ |
| Sable fin | „ 9.5 „ | — „ 11.5 „ | — | „ | „ | 2.0 „ |
| Sable grossier, avec quelques petits cailloux | „ 11.5 „ | — „ 18.0 „ | — | „ | „ | 6.5 „ |
| Sable moins grossier | „ 18.0 „ | — „ 29.5 „ | — | „ | „ | 11.5 „ |

Le fait le plus remarquable ressortant de ce sondage est certainement qu'en dessous de l'argile, qui incontestablement appartient au pliocène supérieur, se trouve un autre gravier, pas

moins épais que le gravier superposé, le „diluvium rhénan", et en tout point comparable à celui-ci.

Or, en considérant la distance énorme à laquelle a dû se faire le transport des éléments de ce gros gravier — étant d'une centaine [18]) ou de plusieurs centaines de kilomètres pour les pierres rhénanes, d'une cinquantaine de kilomètres, tout au moins, pour celles apportées par l'ancienne Meuse — il paraît inévitable d'admettre pour ce gravier le même mode de transport que pour le diluvium moséo-rhénan. Il faut donc y voir un dépôt fluvio-glaciaire, produit dans une époque glaciaire *prépleistocène* et *pliocène*, sinon plus ancienne.

L'argile sous-jacente, qui a 17 mètres d'épaisseur, y-compris les couches de sable fin et de lignites, représent une autre période de climat favorable et de transport très diminué.

En-dessous se trouve encore un sable grossier. Quoique n'étant pas développé en gravier, celui-ci trahit aussi un transport augmenté, de sorte qu'on ne peut pas méconnaître une certaine périodicité dans la puissance de ce transport

On sait que, dans plusieurs régions montagneuses de l'Europe, „la période pliocène a été marquée, après la retraite de la mer, par un régime lacustre, fréquemment interrompu par des phénomènes torrentiels, inaugurant l'ère du creusement des vallées et passant ainsi, par transitions insensibles, à l'époque pleistocène" [19]).

Plusieurs géologues ont regardé des cailloutis et conglomérats à *Elephas meridionalis*, dans la France centrale et orientale, comme des dépôts d'une extension glaciaire pendant le pliocène moyen et supérieur. M. Penck, dans le travail splendide qu'il publie d'ensemble avec M. Brückner, sur les Alpes pendant l'ère glaciaire [20]), soumet la question du prétendu caractère glaciaire des cailloutis français préalpins à un examen critique détaillé et arrive à la conclusion qu'il faut ranger tous ces dépôts dans le pleistocène. Il semble donc permis de douter de leur âge pliocène. Le même doute est tout indiqué pour d'autres dépôts glaciaires que l'on a voulu rapporter au pliocène.

---

[18]) Tel est la distance jusqu'au point où le Rhin sortait de la région montagneuse de son parcours pour entrer dans la grande plaine bas-rhénane.

[19]) A. de Lapparent, Traité de Géologie. Cinquième Edition, p. 1651. Paris, 1906.

[20]) Alb. Penck und Ed. Brückner, Die Alpen im Eiszeitalter, p. 641 sqq. Leipzig, 1904.

Par contre, pour le gravier inférieur de Tégelen l'âge prépleistocène est évident, car l'argile de Tégelen superposée est incontestablement pliocène, d'après sa paléontologie, qui seule peut décider où il faut tracer la limite entre le pliocène et le pleistocène.

Il est vrai que, perdant de vue la signification des mots pliocène et pleistocène, donnée par la paléontologie de ces époques, on s'est tacitement accoutumé à regarder toutes les phases du dernier grand phénomène glaciaire comme le propre de l'époque pleistocène. Mais je crois cette manière de voir erronée; il n'est pas nécessaire que l'ère glaciaire soit chronologiquement identique avec l'ère pleistocène ou quartaire. Le sondage dont je viens de donner les principaux résultats me semble prouver q'une importante phase glaciaire du moins appartient au tertiaire et probablement au pliocène, phase glaciaire qui a précédé la première du pleistocène.

Il est encore impossible de dire à quelle époque au juste il faut rapporter l'argile *inférieure* de Tégelen et les sables qui sont en dessous de cette argile. Dans un sondage exécuté récemment par l'État au Leemhorst à Tégelen (à 3 kilomètres au sud-ouest de celui que je viens de décrire), dont les résultats, autant qu'ils concernent les dépôts tertiaires et quaternaires, ont été gracieusement mis à ma disposition par M. W. VAN WATERSCHOOT VAN DER GRACHT, l'ingénieur-directeur des travaux pour les recherches des minerais dans les Pays-Bas, j'ai déterminé les fossiles suivants, provenant de 54 à 77 M. — A.P.:

*Typhis cuniculosus*, Nyst
*Fusus elongatus*, Nyst
*Pyrula reticulata*, Lam.
*Cancellaria minuta*, A. Braun
*Buccinum Schlotheimi*, Beyr.
*Ancillaria* sp.
*Natica Nystii*, d'Orb., var. *micromphalus*, Sandb.
*Crassatella Bronnii*, Merian
*Otolithus* (*Gadidarum*) *elegans*, Koken

Nous sommes donc là dans l'oligocène supérieur, bien connu des sondages dans la région adjacente de la Province Rhénane de Prusse. D'après des données pétrographiques cette assise semble y commencer déjà à 39 M. — A.P. Le miocène lignitifère ne s'y trouve pas, selon les apparences. Il y a de gros cailloux jusqu'à 0.6 m. + A.P. mais il n'est pas encore clair quelle couche il faut rapporter dans ce sondage à l'argile inférieure que je viens de

décrire. L'argile supérieure y est représentée par un dépôt d'argile avec un peu de tourbe et bois de 19 à 15.5 M. + A.P.

Dans un autre sondage, exécuté par M. L. DE RIJK à Tégelen, à un kilomètre et demi au N. W. du Leemhorst, on a trouvé de l'argile avec quelque bois et tourbe entre 12 et 3 M. + A.P.; mais des données précises sur ce sondage me manquent.

Le plus proche sondage, dans la Province Rhénane de Prusse, est celui de Wankum, à environ 11 kilomètres au N.N.E. de celui de la bruyère de Jammerdaal. Il n'y a point de gravier fluvio-glaciaire prépleistocène et l'oligocène supérieur semble commencer à environ 23 M. — A.P.

Autant que je sache ce n'est que dans le sondage de Tönisberg, à 23 kilomètres au E. N E. de Tégelen, que se trouve, entre 23 et 31 M — A.P., un dépôt analogue de gravier profond, sous une cinquantaine de mètres d'argile et de lignite.

Mais je préfère d'attendre les résultats de plusieurs autres sondages à faire dans la province du Limbourg néerlandais, sur le bord occidental du plateau de gravier rhénan, avant de poursuivre plus en détail ces comparaisons avec les sondages allemands.

En terminant cette prémière étude, qu'il me soit permis de prononcer une opinion sur l'origine des argiles qui se trouvent, sur une si grande étendue et en des dépôts si épais, dans la région en question.

Évidemment le dépôt de ces argiles (dont la plus profonde est de l'argile réfractaire et presque entièrement très pure) s'est fait dans de l'eau coulant très lentement et sans crues de quelque importance. Généralement ces argiles sont le produit de la décomposition kaolinique de plusieurs roches de silicates. Les roches qui ont donné la matière des argiles de Tégelen se trouvaient à plus de cent kilomètres de distance du lieu de dépôt de ces dernières, et il a fallu, pour produire ces épaises couches d'argile, une très longue période, où la décomposition des basaltes et autres roches feldspathiques dans les régions du cours supérieur du Rhin a eu lieu régulièrement et sans aucun intervalle notable, soit par l'acide carbonique dégagé en abondance, dans un climat favorable, par la terre végétale revêtant ces roches, soit par l'acide carbonique volcanique. Les sables gris sousjacents au dépôt d'argile inférieur ne contiennent pas peu de grains de basalte, provenant évidemment d'éruptions volcaniques dans la région de l'Eifel. C'est dans l'Eifel et le Westerwald qu'il faut aussi chercher l'origine des argiles.

*Haarlem*, Avril 1906.

## EXPLICATION DE LA PLANCHE.

Fig. 1. Noix de *Juglans tephrodes*, Ung (= *Juglans cinerea*, L. *fossilis*. GEYLER et KINKELIN). $^1/_1$.

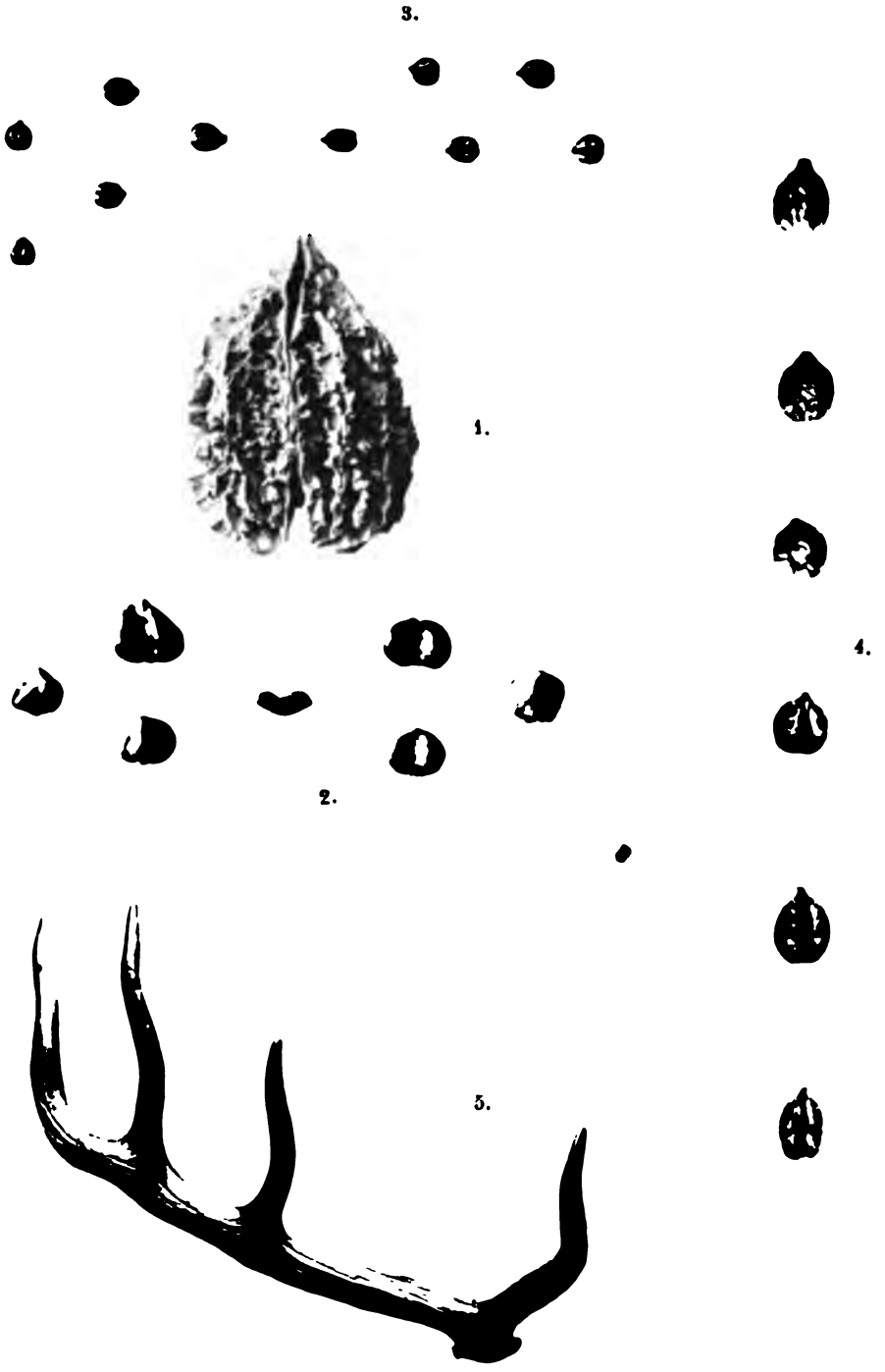
Fig. 2. Graines de *Magnolia cor*, Ludwig (cf. *Kobus*, DC). Les deux spécimens de la première ligne, le premier spécimen de la ligne moyenne et le deuxième de la troisième ligne sont représentés dans la vue extérieure, le dernier spécimen de la ligne moyenne et le premier de la troisième ligne dans la vue intérieure, le deuxième de la ligne moyenne est figuré vu par la base. Toutes ces figures sont de grandeur naturelle ($^1/_1$).

Fig. 3. Graines de *Vitis vinifera*, L. Les cinq spécimens à gauche sont dans la vue extérieure, les cinq à droite dans la vue intérieure. $^1/_1$.

Fig. 4. Six de ces graines, agrandies à $^2/_1$. Les trois supérieures dans la vue extérieure, les trois inférieures dans la vue intérieure.

Fig 5. Bois de droite de *Cervus teguliensis*. Vue extérieure. $^1/_8$.

Tous ces objets proviennent de l'argilière de M.M. CANOY, HERFKENS et Cie, dans la bruyère de Jammerdaal à Tégelen, et se trouvent au Musée Teyler.


3.
1.
4.
2.
5.

IMPRIMERIE LES HÉRITIERS LOOSJES à HAARLEM.

L Soc 3072.10

JAN 20 1907

# ARCHIVES

DU

# MUSÉE TEYLER

SÉRIE II, VOL. X.

TROISIÈME PARTIE.

HAARLEM. — LES HÉRITIERS LOOSJES.
1906.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIC,
G. E. SCHULZE.

# ARCHIVES

DU

# MUSÉE TEYLER

---

SÉRIE II, VOL. X.

Troisième partie.

HAARLEM. — LES HÉRITIERS LOOSJES.

1906.

PARIS, GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIC, G. E. SCHULZE.

# AVIS.

En ouvrant cette nouvelle série l'Institut scientifique et littéraire de la fondation Teyler a l'honneur d'informer les lecteurs des Archives, que M. M. les Directeurs ont résolu de lui en confier dorénavant la rédaction, qui, à partir de ce jour, se fera sous sa responsabilité.

Les Archives, comme l'indique déjà leur titre, contiendront d'abord la description scientifique des principaux instruments de précision et des diverses collections que la fondation possède, ainsi que les résultats des expériences et des études, qui seront faites par leur moyen, soit que ce travail soit fait par les conservateurs de ces collections, soit par d'autres, auxquels les Directeurs en auront accordé l'usage.

En second lieu, et pour tant que l'espace disponible ne sera pas occupé par ces publications obligatoires, les pages des Archives seront ouvertes aux savants, dont les travaux scientifiques ont rapport à une des branches, dont la culture a été recommandée à l'Institut par son fondateur.

Pour de plus amples informations à cet égard on est prié de s'adresser au Secrétaire de l'Institut,

E. VAN DER VEN.

HAARLEM, janvier 1881.

# TABLE DE MATIÈRE.

**Expériences de culture à l'ombre faite avec du tabac de Déli sur la côte orientale de Sumatra, par le Dr. F. W. T. Hunger.**

# FONDATION

DE

# P. TEYLER VAN DER HULST.

À HAARLEM.

---

**Directeurs.**

L. P. ZOCHER.
P. LOOSJES.
Mr. A. W. THÖNE.
J. J. VAN OORDE.
J. A. FONTEIN.

**Secrétaire.**

Mr. A. A. VAN DER MERSCH.

**Trésorier.**

P. DROSTE.

**Conservateur du Cabinet de Physique.**

Dr. E. VAN DER VEN.

**Conservateur du musée de Paléontologie et de Minéralogie.**

*Prof.* Dr. EUG. DUBOIS.

**Bibliothécaire.**

J. J. VERWIJNEN.

**Conservateur des Collections de tableaux, de dessins et de gravures.**

H. J. SCHOLTEN.

---

**Conservateur du cabinet numismatique.**

Jhr. H. M. RIDDER BARONET SPEELMAN.

---

# MEMBRES DES SOCIÉTÉS TEYLERIENNES.

---

**De la première Société ou Société de théologie.**

*Prof.* Dr. S. CRAMER.
*Prof.* Dr. I. J. DE BUSSY.
Dr. J. G. BOEKENOOGEN.
*Prof.* Dr. D. E. J. VÖLTER.
Dr. A. C. DUKER.
*Prof.* Dr. H. J. ELHORST.

---

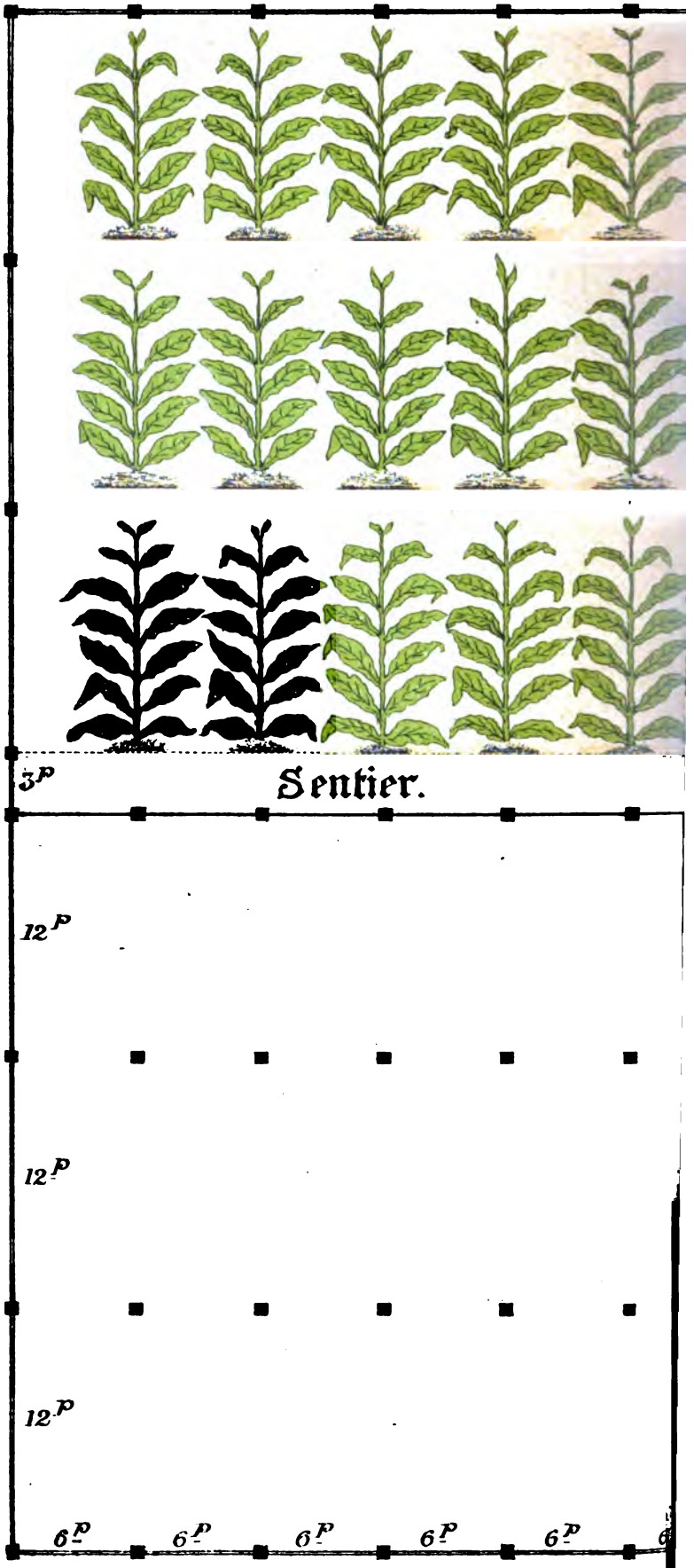
**De la seconde Société.**

Dr. E. VAN DER VEN.
H. J. SCHOLTEN.
J°. DE VRIES.
*Prof.* Dr. HUGO DE VRIES.
*Prof.* Dr. P. J. BLOK.
Dr. H. J. DE DOMPIERRE DE CHAUFEPIE.

---

à

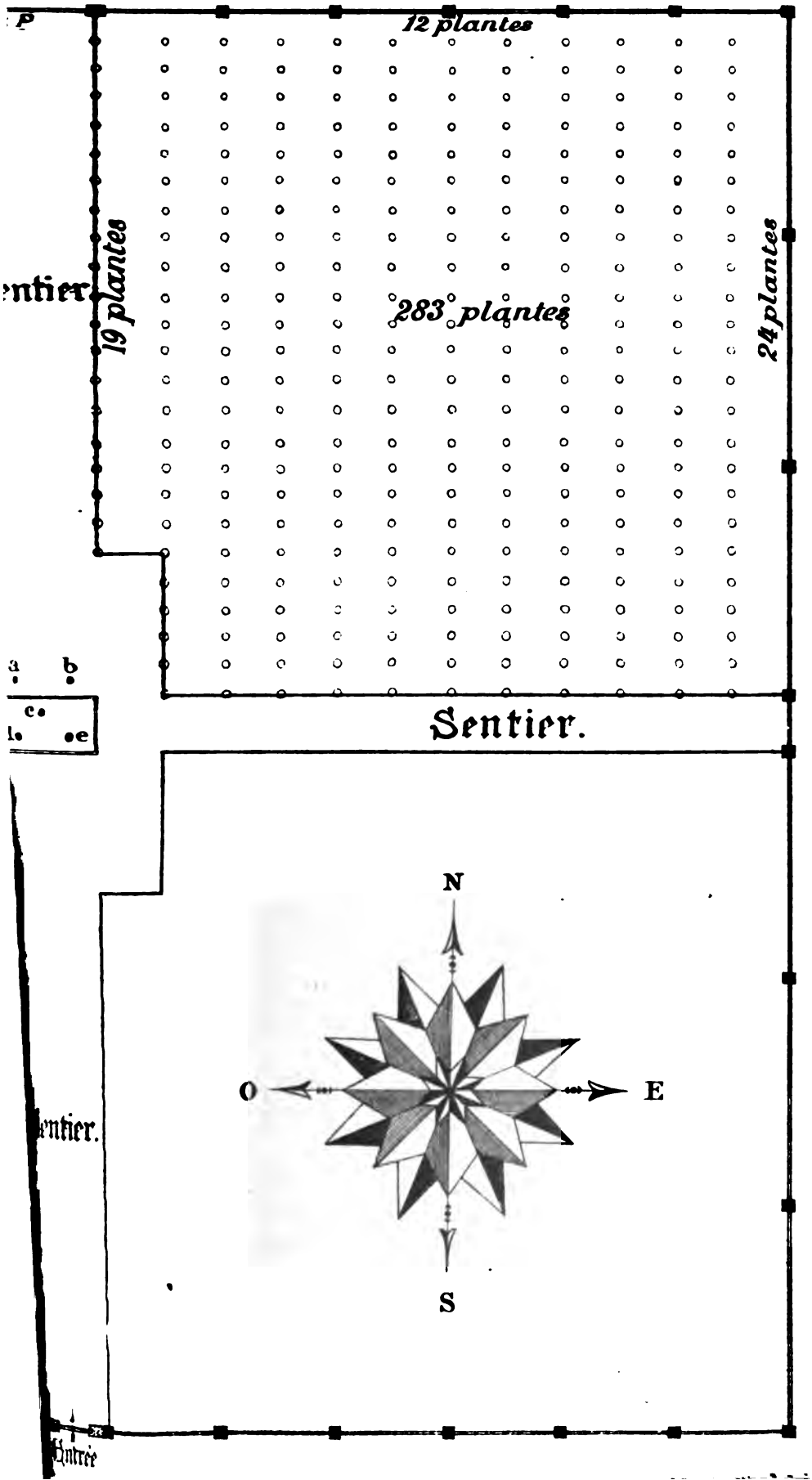
Echelle



[redacted] ombre

n-Estate.

aphique 1 à 100.



# EXPÉRIENCE DE CULTURE À L'OMBRE

## FAITE AVEC DU TABAC DE DÉLI SUR LA CÔTE ORIENTALE DE SUMATRA,

PAR

le Dr. F. W. T. HUNGER,

*Privat-docent à l'Université d'Utrecht (Pays Bas),*
*Directeur de l'„Algemeen Proefstation" à Salatiga (Java).*

> Talrijke factoren beheerschen alzoo de quaestie der beschaduwing, en men moet ze gezamenlijk overwegen en in onderling verband beschouwen, wil men met recht een oordeel uitspreken.
>
> (VAN GORKUM, *De O.-I. cultures 1884, Dl. I, p. 309*).

I.

## Introduction.

Le principe de la culture à l'ombre dans les régions tropicales n'est pas à proprement parler une nouveauté, mais son application à la culture du tabac est toute récente.

Dans nos colonies des Indes Orientales aussi bien qu'aux Indes Occidentales, la culture du café et du cacao s'effectue souvent en terrain ombreux, bien que les opinions soient fort différentes au sujet de l'utilité ou de la nécessité du procédé.

Aussi VAN GORKUM écrit-il: „Dans une question aussi contestée, chaque parti veut donner des exemples frappants. Les uns indiquent des terrains découverts, donnant la preuve convaincante de l'action salutaire du plein soleil; d'autres sont désappointés par leurs cultures dans des conditions apparemment identiques, et vantent par contre les excellents résultats obtenus avec des arbres ombragés" (l. c. p. 308).

Dans les dernières cultures, la protection contre une trop forte ardeur du soleil est obtenue par des arbres, que l'on plante au milieu de la culture à des distances régulières.

Les avantages fournis par un tel ombrage doivent être cherchés dans une modération de l'intensité des rayons solaires, d'où résulterait non seulement un éclairement moins fort, mais encore une température plus basse et un degré d'humidité plus élevé de l'air. Dans des contrées très sèches et où la chaleur est vive, ces circonstances doivent être favorables à une régulière désassimilation de la plante cultivée à l'ombre.

Mais là où, comme c'est le cas pour le caféier, une même plante est cultivée aussi bien dans les plaines basses qu'aux hautes altitudes des régions montagneuses, c.-à-d. en des endroits qui diffèrent tant au point de vue météorologique que géologique, il va de soi que la question de la culture à l'ombre ne saurait être jugée d'après une seule et même mesure, et que l'on doit incontestablement tenir compte de la nature du climat local, aussi bien que de la nature du sol.

L'ombrage que l'on applique dans ce qu'on appelle la „shade grown tobacco culture" ne s'obtient pas par des arbres protecteurs, bien que, comme nous le verrons dans le chapitre suivant (p. 185), les „orchard grown wrappers" aient fait naître l'idée d'une pareille modification dans la culture du tabac.

Il y a pourtant une différence essentielle entre le but de la culture à l'ombre du café et du cacao et celui d'une pareille méthode de culture pour le tabac

Dans les deux premières cultures on se propose de créer par l'ombrage un état aussi naturel et aussi normal que possible, où les processus de la floraison et de la fructification puissent se produire de la façon la plus avantageuse; en d'autres termes, dans la culture du café et du cacao on tâche d'arriver par l'ombrage à la normale physiologique de la fonction reproductive.

Par contre, dans la culture du tabac, on sait d'avance que le produit de la culture à couvert présentera, tant au point de vue morphologique qu'anatomique, des propriétés qui seront des écarts négatifs du produit normal. Il s'agit ici uniquement de la fonction végétative, et, par l'action de conditions physiologiquement anormales, produites par une modération de l'éclairage, on essaie d'influencer la formation des organes foliaires.

Par la culture à l'ombre la feuille de tabac devient d'un tissu

plus fin; de plus elle prend une couleur plus claire, donnant après séchage et fermentation la couleur actuellement à la mode pour les feuilles préservantes.

Si l'engouement pour cette couleur fauve-clair venait à faiblir, le but de cette modification artificielle dans la culture viendrait à tomber *en partie* en même temps.

Depuis l'origine de la culture du tabac sur la côte orientale de Sumatra (c.-à-d. depuis 1864), la feuille du tabac de Déli a toujours été renommée comme feuille préservante et est préférée comme telle jusqu'à ce jour par tout le monde. La finesse de sa feuille, et l'élasticité et la bonne combustibilité qui en sont la conséquence, la rendent bien appropriée à ce but; on a reconnu d'ailleurs que sa coloration peut être modifiée par l'époque de la récolte (voir chapitre V).

Voilà pourquoi le besoin d'imiter ces cultures à l'ombre pour le tabac de Déli ne se fait pas directement sentir; dans la culture de ce produit naturel on en est déjà au point que l'on espère atteindre à l'avenir dans les cultures artificielles à l'ombre.

Cela n'empêche pas pourtant qu'il y eût quelque intérêt à faire, à titre d'épreuve, une pareille culture à l'ombre à Déli, et c'est ce qui a été fait en 1903.

A l'époque où j'entrepris cette expérience de culture à l'ombre à Déli, l'intérêt pour cette nouvelle manière de cultiver le tabac avait atteint pour ainsi dire son apogée. En Amérique on s'occupait déjà depuis quelques années de ce qu'on appelait la „shade grown tobacco culture," et les rapports qui en furent publiés dans des revues périodiques et des feuilles techniques attirèrent à juste titre l'attention des collègues des plantations de Sumatra. Mais à l'intérêt que suscitait cette méthode de culture nouvellement imaginée venait s'ajouter la publication, dans les journaux de Déli, d'articles où il était question de l'influence que les cultures américaines pourraient avoir sur celles de la côte orientale de Sumatra.

Les rapports optimistes venus de l'autre côté de l'océan, faisant espérer que le temps ne serait plus éloigné où l'Amérique ne devrait plus importer d'Amsterdam du tabac de Sumatra, firent évidemment une grande impression sur les Sociétés pour la culture du tabac à Sumatra, qui ne désiraient pas perdre la clientèle des Yankees à leurs ventes.

Voilà pourquoi l'Etablissement pour des expériences de culture avec le tabac de Déli (VIIIe section du Département d'Agriculture des Indes Néerlandaises) prit en considération un projet d'entreprendre, dans de modestes conditions, une épreuve de culture à couvert, en partie comme démonstration, pour enseigner aux planteurs la nouvelle méthode de culture du tabac, en partie pour examiner l'influence que l'ombrage aurait sur la feuille de Déli, déjà si fine. Cette expérience fut confiée au botaniste de l'Etablissement, un poste que j'occupais à cette époque.

Il me paraissait que, pour pouvoir réellement juger de l'influence d'une couverture sur le produit cultivé sous elle, il était nécessaire de faire à côté une expérience de contrôle *à découvert*, dans des conditions absolument identiques pour le reste.

A cet effet, j'ai fait à côté de la tente, précisement dans les mêmes conditions, une plantation à l'air libre; de cette manière on pouvait tirer de la comparaison des conclusions motivées.

Dans cette épreuve combinée, j'ai fait particulièrement attention à une différence possible dans l'état atmosphérique, un facteur dont on a eu tort de ne pas tenir compte dans les expériences américaines du même genre; or, à mon avis, c'est précisément dans la différence des conditions atmosphériques que l'on doit chercher la raison des écarts que le tabac d'ombre présente vis à vis du produit de culture normal.

Voilà pourquoi j'ai disposé au milieu de chacune de ces cultures une installation spéciale pour des observations météorologiques; les données qui s'y rapportent sont réunies dans les tableaux que l'on trouvera à la fin.

Les trois photographies reproduites dans ce travail représentent la tente employée à Medan Estate en Déli.

Avant de passer à la description de l'expérience de culture à l'ombre avec du tabac de Déli, je désire donner d'abord un aperçu de ce qu'en Amérique on a fait de plus important à ce sujet.

---

Fig. 1. Portion d'un champ de tabac de 10 acres, couvert de „Cheese-cloth", pour montrer les détails de la structure externe de la membrure.

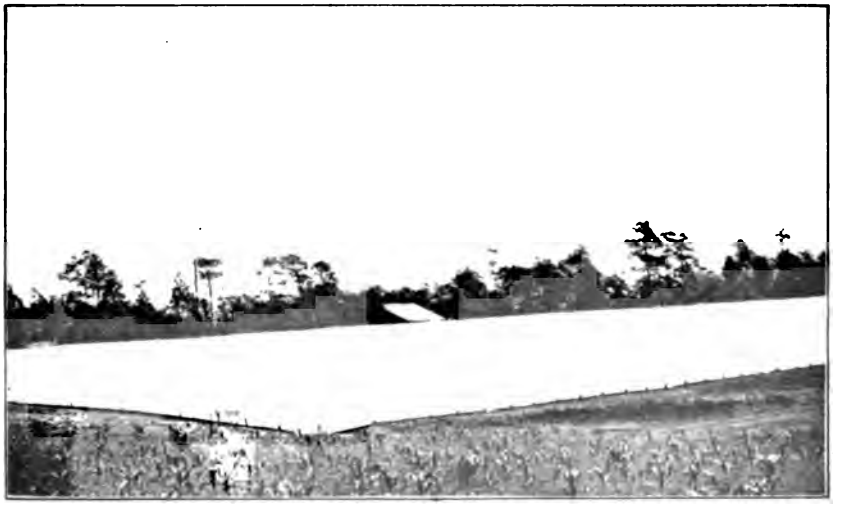


Fig. 2. Vue extérieure d'un champ de tabac de 10 acres, couvert de „Cheese-cloth", prise d'une élévation située à quelque distance.

Fig. 3. Portion d'un champ de tabac de 8 acres, montrant la façon d'attacher le „Cheese-cloth".

Fig. 4. Un champ de tabac de 8 acres couvert de „Cheese-cloth", à Mitchelson Farm, Tariffville [Conn.]

## II.

## Aperçu de la culture à couvert du tabac en Amérique.

J'emprunte à une lettre, adressée au U. S. Tobacco Journal du 18 janvier 1902 [1]), la communication, que l'on doit considérer comme l'inventeur de la culture à couvert du tabac M. J. A. SCHROEDER de Quincy en Floride.

Je ne garantis pas toutefois l'exactitude de cette information.

Voici dans quelles circonstances ce M. SCHROEDER conçut l'idée de cette modification dans la méthode de culture:

„The idea had been suggested to him by the fact that so-called „orchard grown wrappers (that is, tobaccos partly shaded by the „trees in the island of Cuba) were finer in texture than tobacco „not shaded. Six years ago (1896) an experiment was made by „him at Quincy, Fla. A half acre of ground was covered with an „artificial shade made of slats and from that half acre this method „of growing tabacco has grown to its present large proportions in „Florida."

En 1901 la culture du tabac à l'ombre couvrait en Floride 1000 acres, et l'année suivante (1902) le procédé s'était étendu sur plus de 1500 arpents. Les données suivantes permettent en quelque sorte de juger de la qualité de la feuille de tabac ainsi obtenue:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 320 | feuilles | de | 12 | pouces | de | longueur | pesaient une livre anglaise. |
| 276 | „ | „ | 14 | „ | „ | „ | |
| 202 | „ | „ | 16 | „ | „ | „ | |

La première expérience avec ce qu'on appelait „cloth tenting" fut entreprise par la Owl. Commercial Company en Floride; c'est sa méthode que l'on suit actuellement partout.

On commence par construire une membrure en bois, sur laquelle on tend ensuite une étoffe comme celle dont on fait des tentes, ainsi qu'on peut le voir sur les figures ci-jointes (fig. 1, 2, 3 et 4). [2])

---

[1]) Vol. XLVII, n°. 26, [Whole n°. 1338].

[2]) Empruntées au Report n°. 62, U. S. Department of Agriculture.

Les figures suivantes pourront servir à donner une idée des dimensions de la construction de la membrure, telle qu'on la construit en Amérique. [1])

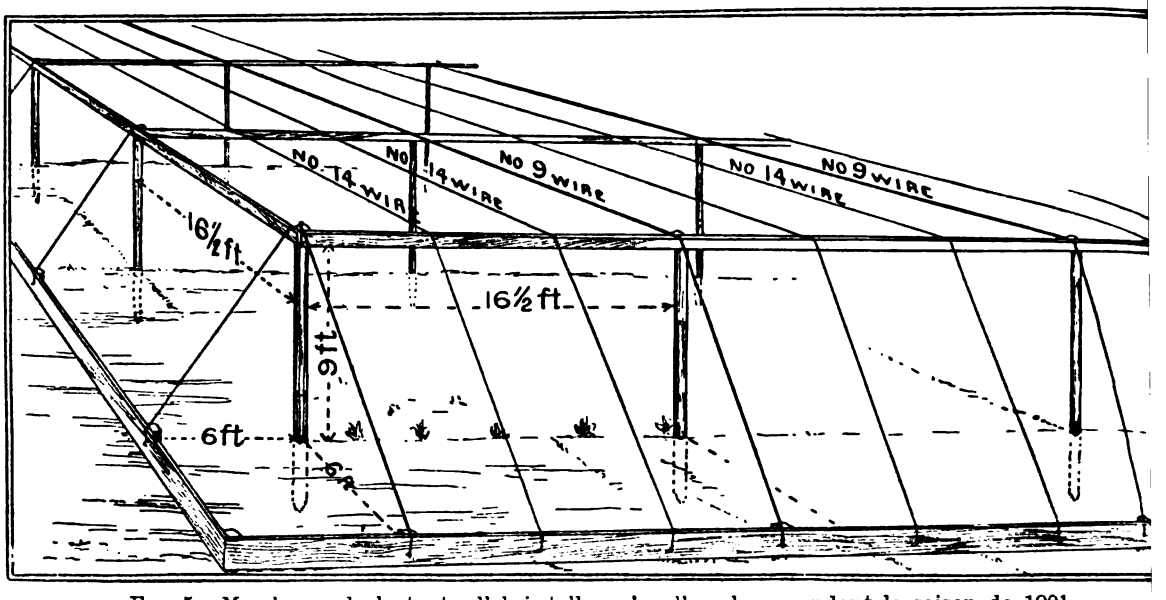



FIG. 5. Membrure de la tente d'abri, telle qu'on l'employa pendant la saison de 1901, prête à être recouverte.

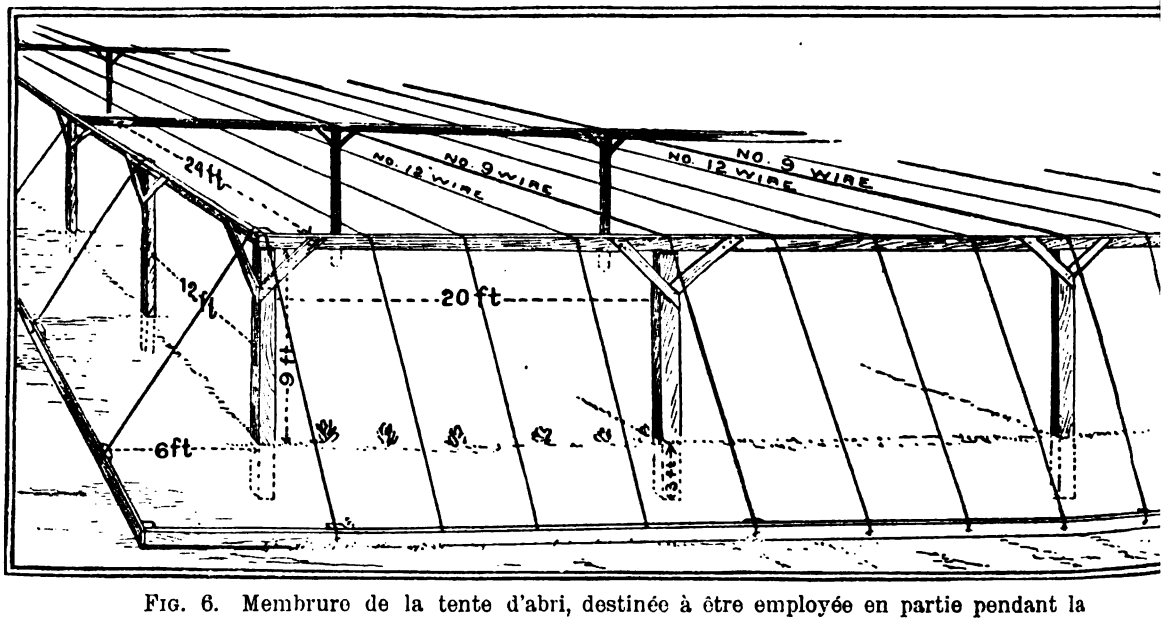



FIG. 6. Membrure de la tente d'abri, destinée à être employée en partie pendant la saison de 1902, avec pieux distants de 20 à 24 pieds, et faite pour une couverture large de 288 pouces.

---

[1]) Empruntées au bulletin n°. 20 du Bureau of Soils, U. S. Department of Agriculture.

En 1900 la „Division of Soils" du Ministère de l'Agriculture à Washington fit des plans pour entreprendre, de concert avec l'„Agricultural Experiment Station" de New-Haven, une expérience en petit de culture de tabac à l'ombre en Connecticut.

Au sujet de cette tentative, les planteurs de Floride firent des remarques assez aigres, témoin le passage suivant: „The growing „of tobacco under artificial shade in Connecticut is not an expe„riment, as this experiment had already been made in Florida, „and it is only necessary for the Connecticut growers to follow „the methods already practiced by the Florida planters."

L'expérience de New-Haven en 1900 fut faite à frais communs, comme je viens de le dire, en ce sens que l'Etablissement de culture expérimentale fournit le terrain, les engrais, la main d'oeuvre et la plus grande partie des moyens financiers, tandis que le gouvernement américain donna le reste de l'argent nécessaire. livra la semence de tabac et offrit les services d'un expert en matière de tabac du Depart. of Agric. Cet expert (M. M. L. Floyd) prit la direction générale de l'expérience, tandis que le directeur de l'Etablissement (M. le Dr. E. H. Jenkins) fut chargé de la direction quotidienne.

Le terrain destiné à l'épreuve avait une étendue de 1/3 acre; on y dressa une tente formée d'un lattis recouvert de tous côtés de „Cheese-cloth". Sur une moitié de cette superficie, soit 1/6 acre, on sema du tabac ordinaire Connecticut-Havane; sur l'autre on sema du tabac de Sumatra cultivé en Floride [1]).

Le resultat de cette petite plantation fut réellement favorable.

Le *rapport commercial* mentionna à ce sujet [2]) que la récolte fut vendue pour $ 473.70, ce qui reviendrait à $ 1421.— par acre. Les frais de production, y compris ce que la couverture avait coûté, — et ce matériel pouvait servir pendant cinq ans —, ne dépassaient pas $ 500.— par acre; il restait donc un gain net de $ 900.— par acre. Cela représente un moyen profit de 71 cents américains par livre. Le rapport disait encore que des commerçants de New-York et de Philadelphie avaient exprimé leur satisfaction au sujet de ce tabac, qu'ils trouvaient absolument identique à celui que l'on importait de Sumatra.

[1]) Depuis 1874 on cultive en Floride du tabac provenant de véritable semence de Sumatra.

[2]) Voir dans le Deli-Courant du 19 oct. 1904 un article emprunté au U. S. Tobacco Journal.

Ce rapport fit sensation chez tous les partis intéressés à la culture du tabac. Les planteurs songèrent évidemment aux millions de dollars qui passent annuellement à la Hollande par l'achat du tabac de Sumatra, ce tabac exquis que l'on ne trouve pas ailleurs et sur lequel on prélève un droit d'entrée de $ 1.85 par livre. S'il était possible de cultiver à couvert, en Connecticut, ce tabac de Sumatra, ce seraient les planteurs américains qui profiteraient dorénavant de ces millions.

Le tabac ordinaire de la vallée du Connecticut rapporte environ 20 cents américains par livre, c-à-d $ 360 — par acre, et, déduction faite des frais, il reste un gain d'environ $ 260.— Le tabac de Sumatra cultivé à l'ombre donnerait maintenant $ 900.— de profit par acre; il n'est donc pas étonnant qu'on en avait la cervelle démontée.

On trouve un *rapport scientifique* de cette expérience dans le 24th Report of the Connecticut Agricultural Experiment Station at New-Haven [1]); j'y emprunte textuellement cette conclusion: „No „further evidence is required to demonstrate that tobacco of the „Sumatra type can be raised in Connecticut, which is equal in all „respects to the average imported Sumatra. To determine whether „this could, or could not, be done was the object, and the *only* „object of this experiment.

„It remains to be seen whether such tobacco can be *economically* „raised in Connecticut; raised on a considerable scale *at a profit.* „To determine these points will probably require some years of „experiment.

„We would strongly urge farmers not to undertake to raise „Sumatra tobacco under shade at present, in anything more than „a very small way, and purely as an experiment, which will not „seriously cripple them, even if it is a complete failure.

„The Station proposes to continue these experiments on a some- „what larger scale, so as to get some data to show the cost of „making the shade and of harvesting, and also to show the yield „of shaded Sumatra per acre."

Le point de vue auquel se plaçait l'Etablissement de culture expérimentale est à coup sûr des plus justes, et, si les planteurs de Connecticut avaient mieux apprécié le conseil qui leur était ainsi donné, ils auraient évité plus tard beaucoup de misères.

Encouragé par le succès de cette première tentative dans les

---

[1]) pp. 322 à 329.

états du Nord, le Ministère de l'Agriculture proposa à des particuliers, cultivateurs de tabac en Connecticut, de continuer à faire de pareilles expériences à frais communs.

En 1901 déjà 13 particuliers acceptèrent cette proposition et une étendue de terrain de 41 acres fut destinée en Connecticut à la culture du tabac à couvert.

Dans l'accord conclu entre les particuliers et le gouvernement, il était stipulé que les planteurs paieraient les frais de couverture et se chargeraient de la culture, de la moisson et de la vente effective du produit, en ce sens que le Département d'Agriculture ne retirerait aucun avantage financier de cette vente, mais aurait simplement le droit de mettre la moisson en vente, afin de déterminer la valeur que les commerçants et les fabricants lui attribueraient. Le gouvernement fournirait encore une fois gratuitement la semence, et chargerait ses employés de l'inspection de la culture.

Quoique l'Etablissement de New-Haven eût formellement prévenu les particuliers de ne pas entreprendre à la légère, pour leur propre compte, une plantation de tabac à l'ombre, quiconque disposait d'un petit capital ou pouvait entrer dans les fonds nécessaires s'adonna à cette nouvelle culture, et bientôt on vit se former des sociétés, avec de gros capitaux, pour réaliser en grand la culture à couvert.

Malheureusement ces essais ont eu trop souvent des résultats défavorables.

Quand ces expériences de plantation à l'ombre furent connues du public, les journaux américains ne manquèrent pas de divertir leurs lecteurs aux dépens de ce nouveau mode de culture, ni de se moquer des résultats qu'on en attendait; c'est ce que prouve entre autres l'article satirique suivant, que l'on trouve dans le „Brooklyn Eagle" du 30 décembre 1901:

„A shout of joy arises from an oppressed and embittered land. „They are going to improve Connecticut tobacco. The way to „improve it, is to raise it in a tent. It is to be grown from Sumatra „seed, and hence will be used for wrappers only, and the growers „promise that it shall be nearly tasteless. It does not matter so „much, they say, what you have on the outside of a cigar, so „long as the inside is right, and the less of taste there is about „the wrapper, the better it is for all concerned, including those „who have to sit in the same room and ride on the same train „with the burning vegetable. The trouble with Connecticut tobacco

„in the past has been that it had a taste, and that taste was not „agreeable. Tobacco that really was tobacco fell into the disrepute „of comic papers, because it was alleged that it looked and acted „and tasted like burning cabbage, and sometimes it was supposed „to be paper, and sometimes leaves of beets, and sometimes ropes. „But by putting tents over the new tobacco in Connecticut and „keeping off the sun and the flies and the weather, it is claimed „that the product will be smokable and inoffensive to observers".

Voici quels furent les résultats de l'épreuve faite en 1901 par le Département de l'Agriculture de concert avec 13 particuliers:

En tout 40,59 acres furent mises sous tente, et 35,88 acres furent plantées de tabac de Sumatra (Floride); sur le reste — 4,71 acres — on cultiva du tabac de la Havane, récolté en Connecticut.

Le tableau suivant donne un aperçu du rendement de ces 13 épreuves indépendantes, faites avec du tabac de Sumatra.

| Lieu de l'épreuve. | Superficie en acres. | Tabac récolté. | | Après fermentation | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Poids total en livres. | Livres par acre. | Poids total en livres. | Perte en °/o |
| 1. Avon, Conn. | 4.51 | 5636 | 1250 | .... | .... |
| 2. Pine Meadow, Conn. | 1.02 | 1616 | 1571 | 2717 | 8.0 |
| 3. idem. | —.80 | 1337 | 1677 | | |
| 4. Southwick, Mass. | —.25 | 442 | 1768 | 331 | 25.1 |
| 5. idem. | —.23 | 397 | 1764 | 268 | 32.4 |
| 6. Mapleton, Conn. | —.50 | 558 | 1116 | 486 | 12.9 |
| 7. Poguonock, Conn. | 1.09 | 1635 | 1528 | 1522 | 6.9 |
| 8. Tariffville, Conn. | 1.09 | 1543 | 1416 | 1358 | 12.0 |
| 9. Windsor, Conn. | —.74 | 1265 | 1700 | 1079 | 14.6 |
| 10. Barkhamsted, Conn. | 1.56 | 2613 | 1665 | 2236 | 14.4 |
| 11. Suffield, Conn. | 6.44 | 7968 | 1237 | 6613 | 17.0 |
| 12. Tariffville, Conn. | 1.24 | 2245 | 1925 | 1953 | 13.0 |
| 13. idem. | 16.41 | 24053 | 1416 | 21648 | 10.0 |
| Total ou moyenne | 35.88 | 51308 | 1430 | 40211 | 12.0 |

Les 4,71 acres plantées de tabac Connecticut-Havane à couvert, rapportèrent en tout 6439 livres de tabac, soit en moyenne 1367 livres par acre.

J'emprunte à l'„Agricultural Dept.'s Report [1]) les détails suivants:

„The Department's experts estimate that the tobacco cost on „an average of 51½ cents per pound baled and ready for market. „The ordinary tobacco grown in the open fields in Connecticut „brings on an average from 18 to 20 cents per pound. The average „price for the shade grown tobacco was $ 1,20 per pound; the „price varying from $ 2,80 per pound for the best to 25 cents „per pound for some of the mixed bales. The crop that brought „the best price sold for $ 1,63 per pound on the average.

„The total cost of production was $ 23.579,26 [2]) and the total „value was $ 49.255,20, which gave a net profit to the growers of „$ 25.675,94 or 108,8 %. This did not include the cost of land, „barns or warehouses, nor the interest on investment, but included „the whole cost of the shade, the framework of which is expected „to last from 5 to 8 years. The best crop gave a yield of 1026 „pounds per acre for 6 acres, to a net profit of $ 1022,52 per acre."

Le total de 40.211 livres de tabac fermenté donna, après triage, 71 % de feuilles préservantes, 18 % de feuilles de deuxième et 13 % de feuilles de troisième qualité. En moyenne 225 à 250 feuilles préservantes pesaient une livre.

Cette expérience eut à subir en Amérique une critique des plus vives, parce qu'on désapprouvait à un point de vue commercial la coopération de l'Etat avec les planteurs de tabac en Connecticut. On y voyait un favoritisme qui ne pouvait être justifié aux yeux du public; témoin le passage suivant que j'emprunte à un des articles de ce genre: „But why should the handful of farmers alone derive „the benefit of the free Government's services? Are the leaf trade „and cigar manufacturers and consumers not likewise entitled to „share in them? If by reason of the Government's aid the cost „of a product is lowered, should not the consumer have the same „privilege in participating in the aid distributed by the paternal „purse of our Government? For surely there is nothing in our

---

[1]) Voir U. S. Tobacco Journal, 6 December 1902, Vol. XLIX, N°. 20 [whole N°. 1384].

[2]) The total cost of the crop per acre varied from $ 613,42 to $ 849,55, or an average of $ 657,17, the former cost being for a large area, while the highest cost was for an area of about a quarter of an acre.

„Constitution that vouchsafes to a handful of Connecticut tobacco „farmers some special rights and benefits to the exclusion of any-„body else, or which anybody else is not entitled to share in the „same degree." [1])

Conformément à sa promesse, l'Institut Agricole de New-Haven a poursuivi en 1901 ses expériences de culture du tabac à l'ombre; un rapport détaillé en parut dans le 25th Report of the Connecticut Agricultural Experiment Station for 1901. [2])

Encore une fois M. le Dr. JENKINS commence son rapport par engager les planteurs à être prudents, puisqu'il s'agit ici d'une modification d'une méthode de culture, au sujet de laquelle les données recueillies en Connecticut sont encore totalement insuffisantes. A la page 297 il dit textuellement: „It should also be said „that this experiment (1901) was made for the information of the „tobacco growers of this State. It is our aim, therefore, to state „exactly the facts regarding it, whether favorable or unfavorable „to the prospects of the new industry. It is not likely that the „growing of the Sumatra type of leaf in this State can be made „a complete success without some years of experience and intel-„ligent experiment.

„A fictitious *booming* of the business at the outset will certainly „be followed by a correspondingly irrational depression later".

Cette fois l'expérience fut faite sur un terrain dont la superficie atteignait presque une acre; le lattis de l'année précédente put servir en partie.

Le rendement de la récolte fut:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 180½ | livres | de feuilles | de tabac | cueillies, | |
| | 825½ | „ | „ | „ | „ | „ coupées, |
| en tout | 1006 | „ | „ | „ | „ | „ . |

Dans cette expérience on étêta les plantes. La qualité du produit fut très satisfaisante, plus satisfaisante même qu'en 1900; la consistance aussi bien que la couleur étaient excellentes.

La récolte entière fut vendue pour $ 1,75 la livre et rapporta donc $ 315,87.

---

[1]) U. S. Tobacco Journal, 26 April 1902, Vol. XLVIII, N°. 14 [whole N°. 1352]. Rapport en hollandais dans le Indische Mercuur du 27 mai 1902.

[2]) Part IV, pp. 295 à 312.

Du tabac coupé on vendit 369 livres, savoir

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 179 livres | à $ 2,50 | par livre | | soit en moyenne à $ 2,16 par livre. |
| 89 „ | „ „ 2,25 | „ | „ | |
| 101 „ | „ „ 1,40 | „ | „ | |

Plus de la moitié de la récolte, savoir 549½ livres furent donc vendues pour un prix moyen de $ 2,01 par livre.

Aussi la conclusion finale du Dr. JENKINS est-elle favorable et inspire-t-elle une grand confiance dans l'avenir. Pour plus de clarté, je la reproduis ici textuellement:

„In conclusion, our success with two crops, the first (1900) raised „during a season so dry as to affect the growth of tobacco in the „open, the second (1901) raised when the latter part of the season „was unusually cloudy and wet, indicates that Sumatra tobacco „can be successfully produced in Connecticut under shade in any „season which is not very abnormal as to rainfall und sunshine.

„It is, however, a new industry which must be slowly learned „by our growers. While much may be acquired from the prevail- „ing ideas and practices in Sumatra and in Florida, there yet „remains much more which is absolutely necessary to success but „which our growers must learn for and by themselves.

„The adaptation of methods of raising, harvesting and curing „the leaf to the special local conditions of labor and particularly „to the peculiarities of our climate during growth. harvest and „curing are essentials, to be worked out by our growers and in „which no one but themselves can be experts.

„We are not raising Sumatra tobacco, nor Florida tobacco; we „are not in a Sumatra climate or a Florida climate. To succeed „our farm practice must be that which we find best for this leaf „under Connecticut conditions."

En 1902, 38 planteurs particuliers en Connecticut et Massachusetts se présentèrent pour entreprendre en commun, et sous la direction du Department of Agriculture, la culture du tabac à l'ombre; ensemble ils destinèrent à l'épreuve 645 acres.

Les résultats de cette expérience en grand furent de nouveau très satisfaisants; à la fin de l'année de culture 1902 la vente eut lieu à Hartford en Connecticut; on y paya de $ 1,40 à $ 2,90 par livre, le prix moyen étant $ 1,50.

Il venait s'y ajouter un autre facteur encore, savoir les résul-

tats favorables relatifs au nombre de cigares que l'on peut fabriquer au moyen d'une quantité déterminée de tabac d'ombre. Dans son rapport sur la feuille préservante de Sumatra d'Amérique, publié dans le „Tobacco Leaf" n°. 48, M. ROSZELLE donne à ce propos la description suivante:

En comparaison de la même quantité du tabac de Sumatra importé, la différence était manifestement en faveur de la feuille cultivée à l'ombre. Au moyen d'un ballot d'un poids net de 155 livres, on a pu couvrir 85.432 cigares, alors que la même quantité de tabac de Sumatra importé n'avait suffi à couvrir que 70.000 cigares de la même marque. La raison de cette grande différence réside en ceci, que la feuille préservante de Sumatra d'Amérique est moins lourde, que ses nervures et ses pétioles sont plus fins, en somme qu'une livre représente une plus grande quantité de feuille utile, et que par conséquent la perte est moins grande. (Indische Mercuur, 27 Jan. 1903, No 4.)

D'après un prospectus de la U. S. Sumatra Tobacco Growing Company, le tabac à couvert de ses champs d'expérience rapporta en 1902 environ $ 2,45 par livre. Le prospectus de cette société était enchanté de la nouvelle culture, à preuve le passage suivant: „La découverte, qu'il était possible de cultiver en Connecticut les espèces les plus fines de tabac de Sumatra, en recouvrant tout simplement le champ d'une tente basse en cheese-cloth, promet des bénéfices énormes à ceux qui ont l'occasion de prendre part à une entreprise d'aussi bon augure."

La société fut fondée avec un capital de $ 500.000 et se proposait de planter immédiatement sous tente 140 acres de terrain; l'entreprise donnait évidemment au public la perspective d'énormes dividendes: „40% est une rente mediocre, 80% pour la seconde année peut être appelé une prévision raisonnable. Au bout de cinq années la valeur du capital de la U. S. Sumatra Tobacco Growing Company aura triplé ou même quadruplé."

C'est par un pareil langage que le public américain fut poussé à une contribution financière à la nouvelle méthode de culture, et, comme il arrive toujours quand il est question de gagner de l'argent, les fonds vinrent de tous les côtés; comme de coutume ils vinrent pour une grande partie de gens dont les moyens d'existence n'étaient pas des plus larges.

La fièvre de la spéculation avait atteint le public américain; la désillusion n'en serait que plus forte

Aussi les feuilles du métier nous apprennent-elles que la débâcle ne se fit pas longtemps attendre, une débâcle sans précédent dans l'histoire de la culture du tabac en Amérique. En l'année 1903, 700 acres de terrain en Connecticut furent encore destinées à la culture à couvert, mais quand la récolte vint au marché elle ne trouva pas d'acheteur.

D'après un rapport du U. S. Tobacco Journal, la perte de cette anneé fut évalueé à $ 800.000 ou $ 1.000.000.

Comme on pouvait s'y attendre, les cris de joie et les louanges firent place tout à coup à des accusations et des expressions indigneés

Il était tout aussi naturel d'ailleurs que l'attaque la plus vive fut à l'adresse du Ministère de l'Agriculture, qui avait encouragé les tentatives et favorisé l'extension des expériences sur une grande échelle. Les reproches s'adressaient en premier lieu à M. le Prof. WHITNEY, Directeur de la Division of Soils, qui avait travaillé de toutes ses forces à la réalisation de cette nouvelle culture et avait déclaré dans ses écrits „que la culture à l'ombre avait passé la période expérimentale et pouvait déjà être appelée un succès."

Le U. S. Tobacco Journal nomme l'affaire du tabac à l'ombre une tombe cimentée et traite de fossoyeur le Prof. WHITNEY, qui fit tant de réclame pour cette question.

Il va de soi que cette ironie n'était guère motivée, car, pour autant qu'on puisse en juger par les écrits, le Prof. WHITNEY s'est toujours laissé guider par les meilleurs sentiments et a conduit les expériences avec beaucoup d'initiative personnelle.

Comme juge impartial, je tiens à exprimer ici toute mon admiration pour l'oeuvre du Prof. WHITNEY, à mon avis une des expériences d'agriculture les plus grandioses que l'on ait jamais faites

Il n'est pas facile de se faire, uniquement d'après des informations, une bonne ideé de ce qui s'est passé dans ce domaine en Amérique après 1903 Après que diverses feuilles du métier eurent fait voir qu'en 1903 la culture n'avait pas été avantageuse, le rapport du Consul-Général hollandais à New-York vint confirmer complètement cette assertion. Le rapport consulaire apprit en outre que l'état de la culture était des plus déplorables et que les récoltes ne pouvaient être vendues. Il y était dit que la plantation du tabac à couvert était un fiasco complet; il n'y avait pas un seul

„shade-grown-grower" qui n'eût travaillé à perte et les capitaux que les sociétés avaient dû sacrifier étaient énormes.

Divers échantillons de tabac d'ombre d'Amérique, récoltés en 1903, étaient déjà venus en mains de fabricants hollandais, qui en avaient jugé la feuille désavantageuse pour la fabrication de cigares. [1])

Cela s'accordait parfaitement avec l'impossibilité de vendre ce tabac, pour laquelle on pouvait admettre la même cause, et l'on croyait donc en Hollande que cette tentative avait complètement échoué et qu'il ne serait plus question de cultiver du tabac sous tente.

Cette opinion fut encore renforceé quand les feuilles du métier américaines publièrent des détails relatifs à la faillite de l'International Tobacco Culture Corporation of Hartford, Connecticut, qui avait commencé son entreprise avec un capital de $ 50.000, eut bientôt besoin d'un nouveau capital de $ 46 000 et fut déclarée en faillite avec un déficit de $ 108.000! [2])

Mais ces informations ne s'accordent pas avec le contenu d'une brochure du Prof. WHITNEY, intitulée „The Work of the Bureau of Soils" [3]), qui fut repandue en un très grand nombre d'exemplaires à l'exposition de St. Louis en 1904, et où l'auteur affirme positivement: „the (shade-grown) industry is now established on „a sound basis and the work of the Bureau has been discontinued in that locality."

Cette communication n'est susceptible que d'une seule explication: que la culture à l'ombre n'est pas du tout abandonnée.

Voilà pourquoi je partage volontiers l'avis de l'auteur d'un article sur ce sujet [4]), auquel j'ai emprunté en partie les données précédentes, et qui présume que les échecs subis en 1903 doivent être attribués aux conditions atmosphériques désavantageuses, dont les districts à tabac ont eu à souffrir pendant cette année en Amérique.

Comme je viens de le dire, il n'est pas facile de se faire une idée exacte du mouvement relatif à la culture de tabac à couvert en Amérique, en se basant uniquement sur ce qui a été ecrit là-dessus.

Malgré le silence que les feuilles du métier américaines gardent dans les dernières années au sujet de la „shade grown tobacco culture", je ne crois pas du tout que cette modification dans la

---

[1]) Voir Indische Mercuur, 1903, N°. 17.

[2]) Voir U. S. Tobacco Journal, 16 avril 1904; vol. 52, n°. 13.

[3]) Circular Number 13 of the Bureau of Soils.

[4]) Indische Mercuur, 10 mai 1904. n°. 19.

méthode de culture du tabac américain ait complètement cessé d'être appliquée; il me semble plutôt que le Prof. WHITNEY, en parlant de la base solide sur laquelle repose à présent la culture à l'ombre, se place au bon point de vue, et à mon avis il veut dire que le temps est heureusement passé, où cette nouvelle culture était l'enfant chéri de quelques spéculateurs, qui mettaient leur intérêt personnel et immédiat au-dessus de l'avenir de la culture du tabac en Amérique en général.

Ce n'est pas seulement en Connecticut et Massachusetts que l'on fit des expériences à l'ombre avec du tabac; on en fit aussi en Ohio, Géorgie et Pensylvanie; dans ce dernier état e a. des épreuves fort réussies furent faites sur les îles Bainbridge et Duffy, situées toutes deux dans la rivière Susquehanna en Donegal; puis encore à Janesville en Wisconsin.

Dans leur rapport sur „Experiments in growing Cuban Seed Tobacco in Texas" [1]), MM. MC NESS et HINSON mentionnent, que dans les expériences de culture de tabac, faites en 1904 par le département d'agriculture en Texas, les pépinières furent couvertes de cheese-cloth, „to protect the young plants from cool nights and the ravages of insects" (l. c. p. 22). Cette couverture était apportée de telle façon, „that it was easy to remove and replace it, „whenever the beds needed watering or weeding"; d'ailleurs „the „cloth was taken off on warm days" (l. c. p. 23).

A Cuba aussi [2]) on obtint des résultats favorables D'après le „El Tobacco" de 1902, une plantation de 1.500.000 pieds à l'ombre de M. ADOLFO MOELLER eut un succès énorme. Dans la Vuelta Abajo en Havane de vastes terrains auraient été couverts de toile, et des informations récentes de Vuelta Abajo et Partido disent que de tous les planteurs ce sont ceux qui cultivent à l'ombre qui font les meilleures affaires. Dans l'Amérique centrale on fit, outre les épreuves à Cuba dont je viens de parler, des essais de culture à couvert à Porto-Rico et dans les Etats-Unis du Mexique.

A l'instar de l'Amérique, la question de la culture du tabac à l'ombre fut egalement examinée en d'autres parties du monde, e. a. dans l'île Hawaï de l'archipel des Sandwich. L'„Annual Report

[1]) Bulletin n°. 27 Bureau of Soils. U. S. Department of Agriculture, Washington 1905.

[2]) „The Agric. News", 19 décembre 1903.

of the Hawai Agricultural Experiment Station 1904" [1]) fait mention de pareilles expériences de culture, qui eurent lieu à Hamakua et donnèrent des résultats favorables pour le moment.

Puis, aux îles Philippines, dans la vallée de Cagayan, des expériences à l'ombre furent faites avec du tabac de Manille. Le Bureau d'Agriculture à Manille rapporte que l'Etablissement agricole de Malata a fait aussi des expériences de ce genre, dont les résultats furent favorables.

De pareilles expériences furent faites en outre dans l'Asie orientale ainsi que dans les colonies Néerlandaises, aussi bien à Java qu'à Bornéo et à Sumatra.

En 1902 e a. la plantation Widi-Birit en Java central fit une tentative du même genre, qui sembla d'abord donner de bons résultats, mais échoua ensuite pour ainsi dire complètement, à cause de la grande quantité de pucerons. Les frais, main d'oeuvre non comprise, s'élevèrent en total à ± *f* 800 par champ [2]); la dépense fut si forte que de pareilles tentatives ne furent pas renouvelées à Java.

Tout comme en Texas, on fit à Java aussi des essais de culture en recouvrant les pépinières de tabac de toile tendue à petite distance du sol et constituant ainsi l'unique couverture. Le développement des plantules fut considérablement activé par cette protection, et l'on obtint au bout de 28 jours du „bibit" en état d'être transplanté, et présentant en outre l'avantage de n'être pas endommagé le moins du monde, ni par les chenilles, ni par les sauterelles.

En 1903, j'ai fait moi-même une expérience de culture à l'ombre avec du tabac de Sumatra à Déli; j'en rapporterai tous les détails dans le chapitre IV.

## III.

## Aperçu de l'importation du tabac de Sumatra en Amérique.

Le consul d'Amérique à Amsterdam m'a communiqué quelques données relatives à la quantité de tabac, qui a été expédiée d'Amsterdam aux Etats-Unis d'Amérique, dans les années 1900 à 1905,

[1]) pp. 366 à 369.

[2]) Un champ à Déli (nommé „bâhoe" en langue malaise) = 7096, 5 m².

et à la valeur qu'elle représentait. Je considère comme un agréable devoir de lui exprimer ici mes sincères remercîments pour son obligeance.

Si nous comparons ces données avec la récolte toute entière de Déli en ces années et la somme qu'elle a rapporté, nous voyons clairement combien il importe pour la culture du tabac à Sumatra qu'elle continue à trouver en partie un débouché en Amérique; cela saute surtout aux yeux quand on voit la forte somme que représente le tabac importé en Amérique.

Le tableau suivant donne une idée de la grandeur des deux facteurs en question: [1])

| Année. | Nombre des paquets de tabac. | | | Valeur en florins hollandais. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Récolte de Déli. | Import. Am. | % | Récolte de Déli. | Import. Am. | % |
| 1900 | 264.100 | 35.330 | **13,5** | 33.300.000 | 12.714.728 | **38,2** |
| 1901 | 223.731 | 35.568 | **15,9** | 38.000.000 | 14.330.766 | **37,7** |
| 1902 | 227.512 | 30.740 | **13,5** | 32.550.000 | 10.772.918 | **33,1** |
| 1903 | 242.132 | 38.426 | **15,9** | 31.200.000 | 12.033.155 | **38,6** |
| 1904 | 254.602 | 39.085 | **15,4** | 35.900.000 | 12.110.618 | **33,7** |
| 1905 | 233.957 | 37.741 | **16,1** | 35.800.000 | 13.363.315 | **37,3** |
| Total: | 1.446.034 | 216.890 | **15,—** | 206.750.000 | 75.325.500 | **36,4** |

Je sais bien que les pourcentages ainsi calculés ne sont pas absolument exacts, aussi bien pour ce qui regarde la quantité que pour ce qui regarde la valeur du tabac de Sumatra importé en Amérique; beaucoup de tabac a notamment été vendu indirectement à des Américains, et dans la valeur sont également compris les frais consulaires. Mais il me parut impossible d'obtenir au susujet de ces particularités des données absolument dignes de confiance; dans tous les cas les chiffres précédents donnent une idée de l'importance du commerce du tabac avec l'Amérique.

[1]) Dans le tableau précédent les années de vente 1900 – 1905 correspondent aux années de récolte 1899 – 1904. Les chiffres relatifs au nombre total de paquets et à la valeur totale de ces diverses récoltes, je les ai empruntés à l'opuscule de M. Henri Dentz, 11e année, p. 59.

## IV.

## L'expérience de culture à l'ombre en Déli (1903).

Cette expérience de culture à l'ombre et l'épreuve de contrôle à découvert correspondante ont été commencées simultanément le 22 avril 1903 et achevées le 10 juillet suivant. Cette double expérience a donc duré exactement 80 jours.

Les conditions atmosphériques ont été favorables en général, abstraction faite de quelques nuits orageuses qui ont causé quelques dégâts à la tente.

### A. Les préparatifs de l'expérience.

Le *terrain* destiné à ces expériences avait une situation très favorable; les deux surfaces étaient absolument plates, sans élévations ni dépressions. Dans les deux cas le sol était, par sa nature, aussi homogène que possible et consistait en un terreau noir, une espèce d'humus.

En l'année 1904 le terrain tout entier avait été planté de tabac pour la dernière fois; depuis il s'y était développé une jeune végétation forestière, fort luxuriante, qui avait donc atteint en 1903, à l'époque où le terrain fut de nouveau destiné à la culture du tabac, l'âge de neuf ans.

La préparation préliminaire du sol avait uniquement consisté en un travail à la bêche; le terrain avait été retourné pour la dernière fois en janvier 1903.

Les *pépinières* qui devaient fournir les matériaux de plantation furent ensemencées le 13 mars. La semence employée provenait d'un récolte à Medan Estate en 1902; elle possédait un pouvoir germinateur de 74 %.

Les graines germèrent distinctement le 21 mars, sans que les pépinières eussent reçu de l'engrais. Le bibit se développa vigoureusement et avait atteint l'âge de 33 jours lorsqu'il fut déterré le 22 avril pour être transplanté.

La *tente d'ombre* avait été dressée avec beaucoup de soin; les matériaux employés pour sa construction étaient de la meilleure qualité, afin qu'elle fût aussi solide que possible.

Sa longueur était de 78 pieds, sa largeur 75 pieds; sa superficie était de 5850 pieds carrés; sa hauteur de 10 pieds.

Le tout était couvert de toile à tentes, qui fermait aussi les côtés; au côté sud de la tente une porte y donnait accès. Outre deux sentiers, il y avait encore un espace libre au milieu de la tente pour l'installation des instruments météorologiques.

La *construction de la tente* était conforme à la méthode d'usage en Amérique. On avait d'abord construit une carcasse en bois, sur laquelle la toile fut tendue ensuite.

Les *pieux* employés pour cette contruction étaient de jeunes troncs de djatti, longs de 14 pieds et enfoncés de 4 pieds dans le sol, de sorte qu'ils émergaient de 10 pieds.

Dans le sens de la longueur de la tente, ces pieux étaient placés à des distances de 6 pieds; il y en avait donc $(78' : 6) + 1 = 14$ rangées; dans le sens de la largeur, de part et d'autre du sentier du milieu, large de 3′, ils étaient distants de 12 pieds, et formaient donc 8 rangées. En tout on employa donc 112 pieux (voir le plan de la tente).

Ces pieux furent reliés entr'eux par des traverses en bois de djatti, rabotées à la face supérieure, où la toile à tentes fut attachée plus tard par des clous. En tout il y avait $(75' \times 14) + (78' \times 8) = 1674$ pieds courants de traverses en bois de djatti.

Pour augmenter encore la solidité de la tente, des fils de fer furent tendus en diagonale aussi bien au toit que sur les côtés; de cette façon on empêchait l'affaissement de la tente. Puis, pour mieux tendre la toile sur les côtés, des traverses furent établies sur tout le pourtour, tout près du sol, ce qui augmentait la longueur totale des traverses de $(75' \times 2) + (78' \times 2) = 306$ pieds.

La *toile à tentes* avait été fournie par la fabrique de la maison G. VAN BESOUW JBZN à Goorle (Br. Sept.) en Hollande; c'était du cheese-cloth en toile de lin, marque 3B [1]) (voir figg. 7 et 8). Elle fut livreé en bandes de 80 pieds de longueur et 15 pieds de

---

[1]) La fig. 7 représente l'espèce de „cheese-cloth" qui fut employée dans l'expérience de culture à l'ombre à Medan Estate en 1908.

La fig. 8 représente un autre „cheese-cloth", provenant également de la fabrique de M. G. VAN BESOUW JBZN à Goorle. Cette dernière toile est en coton, et, comme on le voit sur la figure, on y a intercalé à des distances régulières, aussi bien dans le sens de la largeur que dans le sens de la longueur, des bandes d'un tissu plus serré, dans l'intention de clouer la toile le long de ces bandes, afin de maintenir plus solidement la toile tendue.

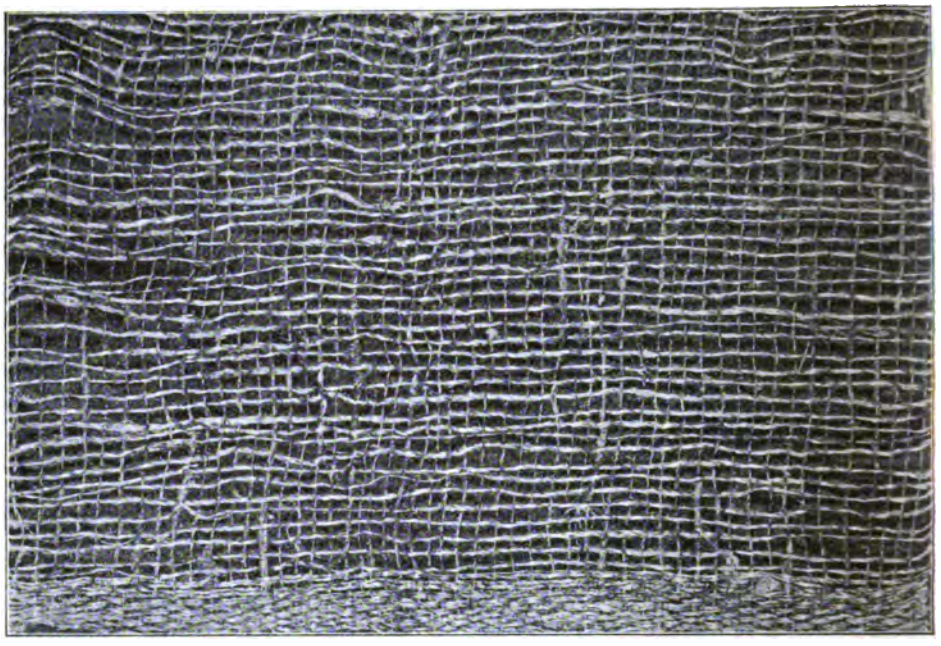


FIG. 7. „Cheese-cloth" en toile de lin, produit hollandais de la fabrique de M. VAN BESOUW (Goorle).

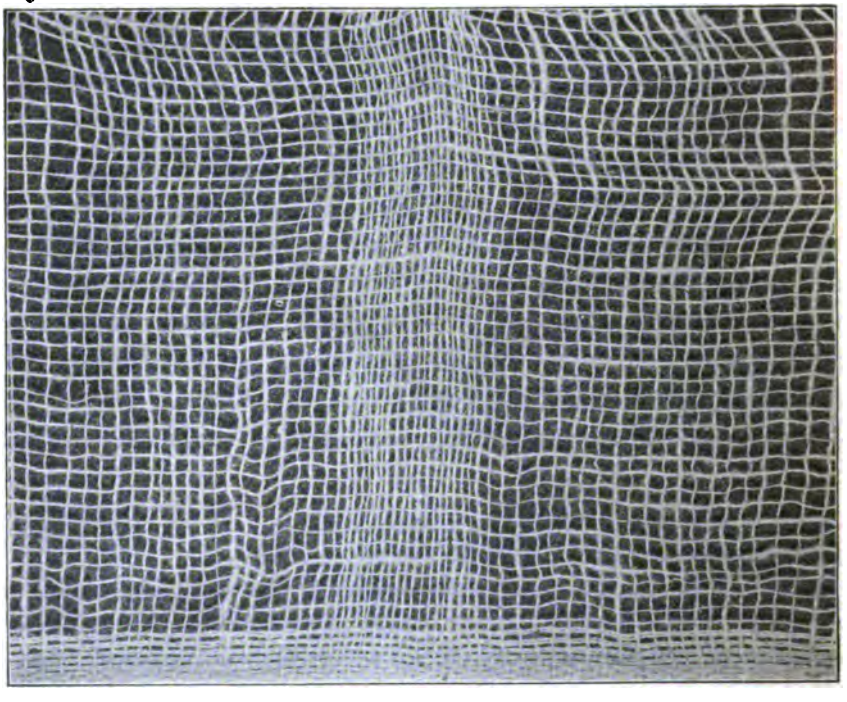


FIG. 8. „Cheese-cloth" en toile de coton, produit hollandais de la fabrique de M. VAN BESOUW (Goorle).

largeur; cinq de ces bandes juxtaposées et cousues ensemble dans le sens de la largeur, et découpées à une longueur de 78 pieds, formaient la surface de couverture pour le toit. Cette surface était de 75 × 78 = 5850 pieds carrés; les deux faces latérales nord et sud mesuraient ensemble (75 × 10′) × 2 = 1500 pieds carrés, les deux faces latérales est et ouest (78 × 10′) × 2 = 1560 pieds carrés. Il fallait donc, pour la tente entière, une surface de toile de 8910 pieds carrés en tout. On commanda en tout neuf de ces rouleaux, de sorte qu'il resta encore une petite quantité de toile pour les réparations éventuelles.

Les bandes de cheese-cloth ne pouvaient être cousues ensemble que sur la lisière; là où elle n'existait pas, la suture se fit sur un double ourlet des deux côtés. La couverture de toile fut d'abord cousue ensemble, et quand elle fut prête on la mit sur le lattis où on la déroula; chaque fois qu'on en avait déroulé six pieds on tendait la toile que l'on clouait solidement aux traverses.

*Les dépenses faites pour la tente* s'élevaient à:

| | | |
|---|---|---|
| Prix de la toile, 9 ballots 3B à *f* 11.— | = *f* | 99,— |
| Frais d'emballage, d'assurance et de transport Hollande-Indes | = „ | 18,81 |
| Salaire pour la couture + fil | = „ | 7,20 |
| Bois et fil de fer | = „ | 37,42 |
| Frais de construction, clous, menues dépenses | = „ | 20,79 |
| Total des dépenses | = *f* | 183,22 |

*L'épreuve de contrôle* à découvert était installée immédiatement à côté de la tente, dont elle était séparée par un sentier de 6 pieds de largeur; tout comme la tente, le terrain destiné à cette épreuve était entouré d'une rigole pour le drainage.

La superficie était aussi de 5850 pieds carrés, avec une hutte au milieu pour les mêmes observations météorologiques que dans la tente; il y avait aussi deux sentiers perpendiculaires entr'eux, que divisaient le terrain en quatre parterres égaux, ou pouvaient être plantés 283 plants à des distances de 3 : 1½ pieds.

*Les observations météorologiques*, faites séparément dans la tente et sur le terrain de contrôle, ont été effectuées de la même façon à tous les points de vue.

Dans les deux cas un thermomètre à maxima et à minima, ainsi qu'un psychromètre (thermomètre sec et thermomètre humide), étaient installés à couvert, sous une petite toiture en atap, à 5½

; au-dessus du sol; hors de la toiture étaient placés un plu-
ıètre et un actinomètre, ainsi qu'un thermomètre pénétrant
ı'à 30 cm. dans le sol, pour en mesurer la température. On
'ait faire ainsi sept observations météorologiques différentes;
ectures furent faites six fois par jour, savoir à 6, 9 et 11 h.
natin et à 1, 3 et 5 h. de l'après-midi. On trouvera toutes
ectures dans les tables spéciales à la fin de ce travail.

ıand tous les préparatifs furent terminés et que les deux ter-
: eurent été nettoyés une dernière fois et légèrement remués,
ɔrocéda à la plantation des bibits le 22 avril, de 4 à 5 h.
oir.
. *transplantation* dans la tente et à l'extérieur eut lieu simul-
ıent par deux travailleurs habiles, qui plantèrent chacun
bibits. Nous n'avons absolument pas introduit de guano dans
rous de plantation; nous n'avons pas davantage fait usage de
engrais quand plus tard nous avons butté le terrain autour
plants; dans les deux cas nous avons employé des planchet-
.'ombre.

ɔilà comment fut mise en train l'expérience qui aurait à établir
uence d'une couverture de toile à tentes sur la qualité du
: de Déli.

## B. L'allure de l'expérience.

ıs le début de cette épreuve combinée on pouvait constater
différence entre les deux cultures, en faveur de la culture sous
. Pendant toute la journée succédant à la transplantation
avril), les jeunes plantes à l'ombre restèrent absolument nor-
s, tandis que celles exposées à l'air libre étaient fanées au
ıu de la journée.
premier développement était d'ailleurs plus rapide dans le
ıier cas, comme il résulte du fait que sous la tente on dut
exhausser faiblement le terrain le 29 avril, tandis qu'à l'air
cette opération ne dut avoir lieu que deux jours après. La
'ence devint encore plus nette quand les plantes à l'ombre
'ent le 7 mai le haut buttage, que les plantes au soleil ne
'ent que cinq jours plus tard.

| | Transplantation. | Bas buttage. | Haut buttage. |
|---|---|---|---|
| Terrain couvert. | 22 avril. | 29 avril. | 7 mai. |
| Terrain découvert. | 22 avril. | 1 mai. | 12 mai. |

Dans la suite, les plantes sous tente continuèrent à se développer plus rapidement que celles à l'air libre, et, quand elles eurent atteint leur complet développement, les plantes couvertes dépassèrent en moyenne d'un pied au moins celles qui étaient exposées au soleil. Dans les deux cas nous avons laissé avec intention les têtes aux plantes, et, pour empêcher qu'elles ne fussent couchées par le vent, nous les avons soutenues dans la suite par des bâtons.

Dans l'habitus aussi on pouvait constater entre les plantes à couvert et les plantes découvertes des différences fort apparentes. Les plantes à l'ombre avaient des tiges plus minces et des entrenoeuds plus longs, mais le nombre des feuilles était en moyenne le même. Les feuilles développées à l'ombre étaient plus fines; un examen superficiel entre les doigts permettait déjà de constater qu'elles étaient plus minces, et leur couleur était d'un vert plus pâle.

Le tabac à l'ombre n'avait presque pas à souffrir de l'attaque des insectes nuisibles, tandis que les plantes placées à l'extérieur furent assez fortement endommagées, ainsi qu'on le reconnaîtra plus tard au pourcentage des feuilles avariées.

Dans les deux cas la maladie de la panachure en mosaïque fut observée très tôt, mais les plantes découvertes en furent atteintes à un degré beaucoup plus fort que les autres Je reviendrai dans un chapitre spécial sur la relation possible entre la culture à l'ombre et la maladie de la panachure chez le tabac

Plus loin je traiterai également en détail l'influence de la couverture sur les facteurs atmosphériques sous la tente, en comparaison des circonstances normales à l'air libre.

En égard aux bons résultats obtenus en 1902 [1]), *la récolte* fut faite presque exclusivement le matin de bonne heure. Après la lecture de la température minima de la nuit, — il était avantageux qu'à l'extérieur elle ne fût pas inférieure à 22° C. —, on fit la cueillette des feuilles à 6 heures du matin. Une seule fois

[1]) Mededeelingen uit 's Lands Plantentuin te Buitenzorg, n°. LXVI.

seulement on s'est départi avec intention de cette règle, et on fit la récolte l'après-midi, ainsi que cela se pratique généralement à Déli, pour soumettre à un contrôle le résultat obtenu l'année précédente.

Le 3 juin (minimum de température pendant la nuit, à l'air libre, 22° C.) eut lieu le premier cueillage matinal des feuilles, aussi bien sous la tente qu'à l'extérieur; il rapporta 2260 feuilles de terre, cueillies à l'air libre et 1980 cueillies sous la tente.

Le 6 juin (temp. noct. min. ext. 22° C.) on récolta de nouveau le matin des feuilles de terre, savoir 4640 à l'extérieur et 3240 sous la tente. Le nombre total de feuilles de terre récoltées était donc de 5220 pour l'épreuve sous tente et de 6900 pour l'épreuve de contrôle.

Le 10 juin (temp. noct. min. ext. 22° C.) on cueillit, à 6 heures du matin, 1060 feuilles de base à l'air libre et 1080 sous la tente; et le 14 juin on prit, à 1 heure de relevée, 1840 feuilles de base à l'extérieur et 2120 sous la tente.

Le 24 juin (temp. noct. min. ext. 22° C.) eut lieu une nouvelle récolte matinale de feuilles de base, qui fournit 3260 feuilles du dehors et 1520 de la tente; et le 28 juin au matin (temp. noct. min. ext. 22° C.) on procéda pour la dernière fois à la cueillette des feuilles de base; elle fournit 1700 feuilles d'air libre et 1240 de tente. Le nombre total de feuilles de base récoltées atteignit donc 5960 pour l'épreuve sous tente et 7860 pour l'épreuve de contrôle.

Le 3 juillet (temp. noct min. ext. 22° C.) on fit de bonne heure un cueillage de feuilles du milieu; on en prit 540 au dehors et 860 sous tente. Une dernière récolte de feuilles eut lieu le 10 juillet à 6 heures du matin (temp. noct. min. ext. 22° C.); elle fournit à l'air libre 380 feuilles du sommet et 600 de ces feuilles sous la tente.

Ainsi finit la récolte dans les deux épreuves; le nombre total de feuilles récoltées fut de 12.640 pour l'épreuve sous tente et de 15.680 pour l'épreuve de contrôle (voir le tableau synoptique).

Tableau de la récolte des épreuves sous tente et de contrôle.

| Espèce de feuille. | Date de la récolte. | Epreuve sous tente. Nombre de feuilles cueillies, par jour. | Epreuve sous tente. Nombre total de feuilles de chaque espèce. | Epreuve de contrôle. Nombre de feuilles cueillies, par jour. | Epreuve de contrôle. Nombre total de feuilles de chaque espèce. |
|---|---|---|---|---|---|
| Feuille de terre | 3 juin | 1980 | | 2260 | |
| | 6 „ | 3240 | 5220 | 4640 | 6900 |
| Feuille de base | 10 „ | 1080 | | 1060 | |
| | 14 „ | 2120 | | 1840 | |
| | 24 „ | 1520 | | 3260 | |
| | 28 „ | 1240 | 5960 | 1700 | 7860 |
| Feuille du milieu | 3 juillet | 860 | 860 | 540 | 540 |
| Feuille du sommet | 10 „ | 600 | 600 | 380 | 380 |
| | Total | | 12640 | | 15680 |

Vu le changement dans l'heure de la récolte, on dut apporter, dans le *séchoir*, quelques modifications dans la manière de sécher les feuilles. Une pareille récolte matinale, cueillie à 6 h., était ordinairement humide de rosée, quand elle était apportée au séchoir; il fallait donc tenir compte de cette circonstance anormale. Voilà pourquoi on modifia le mode opératoire habituel, en ce sens que sur une même baguette on n'enfila que 20 feuilles (d'habitude on en met 40), et l'on ne pendit que 10 baguettes dans une même salle (au lieu de 20 qu'on y pend d'ordinaire).

Cette légère modification, par laquelle chacun des deux facteurs fut réduit de moitié, de sorte que les feuilles étaient plus espacées, prouva encore une fois qu'il est possible de résoudre d'une façon bien simple la difficulté qu'il y a à sécher efficacement des feuilles de tabac fort mouillées.

Le *séchage* eut lieu *fenêtres closes* et l'on ne *fit jamais de feu* dans le séchoir.

Les feuilles furent mises en *bottes* au bout de

10 à 16 jours pour les feuilles de terre
12 à 19 „ „ „ „ „ base
21 „ „ „ „ du milieu
17 „ „ „ „ „ sommet.

La *fermentation* eut lieu de la manière dont cette opération se pratique ordinairement à Déli. Les deux espèces de tabac d'épreuve furent placées exprès en grands tas, entre des feuilles de tabac ordinaire, pour y subir la fermentation.

Le processus eut lieu à 61° pour les feuilles de terre, à 60° pour les feuilles de base, et à 60° aussi pour les feuilles du milieu et du sommet.

Pour les détails relatifs à l'allure de cette fermentation, je renvoie aux tableaux suivants, qui se rapportent à ce processus.

Le tableau que voici fait connaître les dates auxquelles le tabac des deux épreuves subit les diverses opérations.

| Espèce de feuilles. | Date de la récolte. | Nombre de feuilles récoltées. | | Date de la mise en bottes. | Date du commencement de la fermentation. |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Epreuve sous tente. | Epreuve de contrôle. | | |
| Feuilles de terre | 3 juin | 1980 | 2260 | 13 juin | 14 juin |
| | 6 „ | 3240 | 4640 | 18 „ | 19 „ |
| | | | | 22 „ | 23 „ |
| Feuilles de base | 10 „ | 1080 | 1060 | 23 „ | 24 „ |
| | 14 „ | 2120 | 1840 | 28 „ | 29 „ |
| | 24 „ | 1520 | 3260 | 10 juillet | 11 juillet |
| | 28 „ | 1240 | 1700 | 17 „ | 18 „ |
| Feuilles du milieu | 3 juillet | 860 | 540 | 24 „ | 25 „ |
| Feuilles du sommet | 10 „ | 600 | 380 | 27 „ | 28 „ |

On effectua le *triage* pour séparer les feuilles intactes des feuilles avariées; les feuilles intactes subirent un nouveau classement d'après la couleur et la longueur (1re, 2e, 3e et 4e longueur).

Pour la détermination quantitative de ces marques je renvoie aux tableaux qui s'y rapportent.

# TABLEAUX

## relatifs à l'allure du processus de la fermentation. [1]

### FEUILLE DE TERRE.

N°. 1 28/V – 1/VI m/55° – 6/VI m/52° | 49°
- 2 5/VI – 8/VI m/52° – . . . . . | 54° 11/VI | 52°
- 3 7/VI – 9/VI m/52° – 12/VI m/50° . . . . . | 50° 71/VI | 60°
- 4 11/VI – 13/VI m/53° . . . . . | 52°
- 5 13/VI – 16/VI m/55° | 55°
- 6 14/VI . . . . . | 54° 17/VI | 54°
- 7 14/VI – 15/VI m/55° . . . . . | 55° 24/VI . . . . . | 52° 31/VII | 59°
- 8 19/VI . . . . . | 55°
- 9 20/VI | 55° 23/VI . . . . . | 58°
- 10 20/VI | 57°
- 11 22/VI | 56° 25/VI . . . . . | 55°
- 12 23/VI | 56° 28/VII – 23/VIII m/61°
- 13 24/VI | 56°
- 14 24/VI | 56°
- 15 25/VI | 56° 28/VI | 58°
- 16 25/VI | 58° 9/VII . . . . . | 60°
- 17 26/VI | 56° 1/VII | 58°
- 18 26/VI | 55°

[1]) Les caractères imprimés en *rouge* servent à indiquer l'introduction de tabac d'épreuve (aussi bien de l'expérience à l'ombre que de l'expérience de contrôle); les caractères *noirs* se rapportent à du tabac ordinaire de la plantation Medan-Estate. De cette façon le tabac d'épreuve fermenta en grands tas d'une manière aussi normale que possible.

## FEUILLE DE BASE (première récolte).

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N°. 1 | 8/VI – 11/VI m/51° | | 52° | 17/VI | 56° | | | | | | |
| „ 2 | 12/VI . . . . . | | 54° | | | 25/VI | 58° | | | | |
| „ 3 | 14/VI | 53° | 18/VI . . . . . | | | | | | | | |
| „ 4 | 15/VI | 54° | | | 55° | | | | | | |
| „ 5 | 19/VI | 56° | 22/VI – 25/VI m/54° . . . . . | | | | 54° | 10/VII | 59° | | |
| „ 6 | 19/VI | 54° | | | | | | | | | |
| „ 7 | 21/VI | 55° | 25/VI . . . . . | | | | 54° | | | | |
| „ 8 | 21/VI | 54° | | | | | | | 4/VIII | 60° | |
| „ 9 | 22/VI | 56° | 27/VI | 59° | | | | | | | |
| „ 10 | 23/VI | 55° | | | 12/VII . . . . . | | | | 59° | | |
| „ 11 | 24/VI | 58° | 29/VI | 58° | | | | | | | |
| „ 12 | 24/VI | 60° | | | | | | | | 3/IX | 60° |
| „ 13 | 25/VI | 60° | 2/VII | 59° | | | | | | | |
| „ 14 | 25/VI | 60° | | | 15/VII | 60° | | | | | |
| „ 15 | 26/VI | 60° | 2/VII | 59° | | | | | | | |
| „ 16 | 26/VI | 60° | | | | 6/VIII . . . . . | | | | 60° | |
| „ 17 | 29/VI | 56° | 3/VII | 58° | | | | | | | |
| „ 18 | 29/VI | 56° | | | 18/VII | 60° | | | | | |
| „ 19 | 30/VI | 56° | 6/VII | 59° | | | | | | | |
| „ 20 | 30/VI | 55° | | | | | | | | | |
| „ 21 | 1/VII | 58° | 7/VII | 60° | | | | | | | |
| „ 22 | 2/VII | 57° | | | 18/VII | 60° | | | | | |
| „ 23 | 2/VII | 57° | 8/VII | 58° | | | | | | | |
| „ 24 | 3/VII | 57° | | | | 9/VIII | 59° | | | | |
| „ 25 | 4/VII | 58° | 9/VII | 59° | | | | | | | |
| „ 26 | 4/VII | 57° | | | 21/VII | 60° | | | | | 28/IX – 31/X |
| „ 27 | 5/VII | 59° | 10/VII | 58° | | | | | | | |
| „ 28 | 5/VII | 59° | | | | | 7/IX . . . . . | | | | 60° |
| „ 29 | 6/VII | 58° | 11/VII | 58° | | | | | | | |
| „ 30 | 6/VII | 60° | | | 22/VII | 60° | | | | | |
| „ 31 | 7/VII | 59° | 12/VII | 59° | | | | | | | |
| „ 32 | 7/VII | 60° | | | | 12/VIII | 59° | | | | |
| „ 33 | 9/VII | 59° | 14/VII | 59° | | | | | | | |
| „ 34 | 9/VII | 56½° | | | 25/VII | 58° | | | | | |
| „ 35 | 10/VII | 58° | 15/VII | 58° | | | | | | | |
| „ 36 | 10/VII | 58° | | | | | | | | | |
| „ 37 | 11/VII | 60° | 16/VII | 60° | | | | | | | |
| „ 38 | 11/VII | 58½° | | | | | | | | | |
| „ 39 | 12/VII | 59° | 18/VII | 60° | 2/VIII – 19/VIII m/60° – 11/IX m/58° . . . . . | | | | | | 60° |
| „ 40 | 12/VII | 60° | | | | | | | | | |
| „ 41 | 13/VII | 61° | 19/VII | 60° | | | | | | | |
| „ 42 | 13/VII | 59° | | | | | | | | | |

## FEUILLE DE BASE (dernière récolte).

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N° | 43 | 14/VII | 60° | 20/VII | 60° | | | | |
| „ | 44 | 14/VII | 59° | | | 2/VIII | 60° | | |
| „ | 45 | 15/VII | 58° | 21/VII | 60° | | | | |
| „ | 46 | 17/VII | 58° | | | | | | |
| „ | 47 | 18/VII | 59° | | | | | | |
| „ | 48 | 18/VII | 58° | 24/VII | 60° | | | | |
| „ | 49 | 19/VII | 61° | 26/VII | 60° | 6/VIII | 58° | | |
| „ | 50 | 20/VII | 59° | | | | | | |
| „ | 51 | 21/VII | 61° | 27/VII | 60° | | | | |
| „ | 52 | 21/VII | 59° | | | | | | |
| „ | 53 | 21/VII | 60° | 28/VII | 60° | 7/VIII | 59° | | |
| „ | 54 | 22/VII | 61° | | | | | | |
| „ | 55 | 22/VII | 60° | 28/VII | 60° | | | 25/VIII | 60° |
| „ | 56 | 23/VII | 61° | | | | | | |
| „ | 57 | 23/VII | 60° | 29/VII | 60° | 8/VIII | 59° | | |
| „ | 58 | 24/VII | 61° | | | | | | |

## FEUILLES DU MILIEU ET DU SOMMET.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N°. | 1 | 27/VI | 51° | 5/VII | 53° | | | | | |
| „ | 2 | 3/VII | 52° | | | 13/VII | 51° | | | |
| „ | 3 | 6/VII | 50° | 10/VII | 53° | | | | | |
| „ | 4 | 6/VII | 52° | | | | | | | |
| „ | 5 | 7/VII | 53° | 12/VII | 53° | | | | | |
| „ | 6 | 10/VII | 52° | | | 20/VII | 58° | 4/VIII | 60° | |
| „ | 7 | 11/VII | 53° | 14/VII | 54° | | | | | |
| „ | 8 | 12/VII | 54° | | | | | | | |
| „ | 9 | 12/VII | 55° | 15/VII | 55° | | | | | |
| „ | 10 | 13/VII | 55° | | | 21/VII | 57° | | | |
| „ | 11 | 13/VII | 55° | 17/VII | 55° | | | | | |
| „ | 12 | 14/VII | 54° | | | | | | | |
| „ | 13 | 14/VII | 56° | 18/VII | 53° | | | | | |
| „ | 14 | 15/VII | 54° | | | 24/VII | 58° | | | |
| „ | 15 | 17/VII | 55° | 20/VII | 54° | | | | | |
| „ | 16 | 18/VII | 56° | | | | | | | |
| „ | 17 | 18/VII | 55° | 21/VII | 54° | | | | | |
| „ | 18 | 19/VII | 53° | | | 28/VII | 57° | 8/VIII | 58° | 25/VIII — 22/IX m. 6[illegible] — 4/XI m. 60°. |
| „ | 19 | 20/VII | 56° | 23/VII | 55° | | | | | |
| „ | 20 | 21/VII | 56° | | | | | | | |
| „ | 21 | 22/VII | 55° | 25/VII | 55° | | | | | |
| „ | 22 | 22/VII | 56° | | | 31/VII | 57° | | | |
| „ | 23 | 23/VII | 55° | 26/VII | 54° | | | | | |
| „ | 24 | 23/VII | 56° | | | | | | | |
| „ | 25 | 24/VII | 55° | 27/VII | | 54° | | | | |
| „ | 26 | 24/VII | 54° | | | | | | | |
| „ | 27 | 25/VII | 56° | 28/VII | M. | 54° | | | | |
| „ | 28 | 25/VII | 56° | | | | | | | |
| „ | 29 | 26/VII | 57° | 28/VII | | 54° | | | | |
| „ | 30 | 26/VII | 54° | | | | | | | |
| „ | 31 | 27/VII | 57° | 29/VII | | 56° | 5/VIII | | 59° | |
| „ | 32 | 27/VII | 57° | | | | | | | |
| „ | 33 | 27/VII | 56° | 29/VII | T. | 56° | | | | |
| „ | 34 | 28/VII | 56° | | | | | | | |
| „ | 35 | 28/VII | 55° | 31/VII | | 54° | | | | |
| „ | 36 | 28/VII | 55° | | | | | | | |

### C. Les résultats de l'expérience.

L'examen purement quantitatif, dans ces expériences, a été quelque peu troublé par deux circonstances défavorables, dont il faudra tenir compte pour bien juger les résultats.

Un de ces facteurs est la maladie de la mosaïque, qui se présenta d'une façon tellement différente, qu'à une certaine époque la proportion des plantes atteintes par la maladie était plus grande de 36 % pour l'expérience de contrôle à découvert que pour l'épreuve sous tente.

En second lieu, dans la nuit du 14 au 15 juin, et plus tard dans celle du 8 au 9 juillet, il souffla une forte tempête. dont le tabac sous tente eut surtout beaucoup à souffrir. Les deux fois la toile fut déchirée en quelques endroits, et en s'abattant elle cassa les tiges des plantes qu'elle couvrait ou endommagea considérablement leurs feuilles. Par contre, chez les plantes de contrôle, les dégâts furent relativement faibles; les tiges s'inclinèrent il est vrai, mais il fut aisé de les redresser dans la suite.

La preuve que les dégâts causés par ce mauvais temps étaient considérables pour le tabac sous tente, c'est que l'épreuve à l'ombre fournit 3040 feuilles *de moins* que l'expérience de contrôle, bien que sous la tente il y eut beaucoup moins d'individus atteints de la mosaïque, et que les plantes à l'ombre eussent atteint une plus grande hauteur (grâce à la circonstance précédente).

Dans les deux épreuves de culture, aussi bien dans l'épreuve à l'ombre que dans celle servant de contrôle, se sont donc fait sentir des influences désavantageuses, — dommages mécaniques ou maladie —, qui ont diminué le rendement, surtout pour les feuilles du milieu et du sommet Mais il n'est pas possible d'apporter de ce chef aux résultats une correction quelque peu certaine. Aussi doit-on comparer dans ce cas les nombres relatifs (pourcentage) et non les nombres absolus.

Le *nombre des feuilles* récoltées sous la tente fut de 12640, et celui des feuilles cueillies à l'air libre fut 15680, ce qui donne, pour 1132 plantes de part et d'autre, au moins 11 feuilles par plante couverte et presque 13 feuilles par plante découverte.

Le tableau suivant sert à faire voir le rapport de la récolte des diverses espèces de feuilles:

| | Tabac d'ombre. | | Tabac de contrôle. | |
|---|---|---|---|---|
| | Nombre. | % | Nombre. | % |
| Feuille de terre | 5220 | 41,30 | 6900 | 44,— |
| „ „ base [1]) | 5960 | 47,15 | 7860 | 50,13 |
| „ du milieu | 860 | 6,80 | 540 | 3,44 |
| „ „ sommet | 600 | 4,75 | 380 | 2,43 |
| | 12640 | 100,00 | 15680 | 100,00 |

La récolte remarquablement faible en feuilles du milieu et du sommet, dans les deux expériences, doit être attribuée, pour l'expérience de contrôle, surtout à cette circonstance, que des plantes extérieures adultes il n'y eut pour ainsi dire aucun individu qui ne fût atteint de la maladie de la mosaïque; quant au tabac sous tente, la récolte des feuilles du milieu et du sommet avait été presque anéantie, surtout par la dernière tempête du 8 au 9 juillet.

*Le poids* des deux récoltes complètes (non compris le cueillage de feuilles de base effectué une fois dans l'après-midi) était après fermentation:

pour le tabac cultivé à l'ombre: 16.497 gr.
„ „ „ de contrôle : 30.202 gr.,

c.-à-d.:

pour 10520 feuilles de tente un poids global de 1,57 gr. par feuille,
et „ 13840 „ d'air libre „ „ 2,18 gr. „ „ .

Voici quels étaient les poids pour les diverses espèces de feuilles:

| | Expérience à l'ombre. | | Expérience de contrôle. | |
|---|---|---|---|---|
| | Poids en gr. | % | Poids en gr. | % |
| Feuilles de terre | 6030 | 36,55 | 12010 | 39,77 |
| „ „ base [2]) | 7114 | 43,12 | 15330 | 50,76 |
| „ du milieu | 1861 | 11,28 | 1608 | 5,32 |
| „ „ sommet | 1492 | 9,05 | 1254 | 4,15 |
| | 16497 | 100,00 | 30202 | 100,00 |

[1]) Y-compris la récolte dans l'après-midi du 14 juin.

[2]) Les récoltes matinales seules.

On déduit de là:

| | Poids moyen d'une feuille en grammes. | |
|---|---|---|
| | Tente. | Air libre. |
| Feuille de terre | 1,16 | 1,74 |
| „ „ base [1]) | 1,85 | 2,55 |
| „ du milieu | 2,16 | 2,98 |
| „ „ sommet | 2,49 | 3,30 |

Les proportions des feuilles *intactes* et *endommagées* étaient les suivantes pour le tabac des deux épreuves:

| | Tabac d'ombre. | | Tabac de contrôle. | |
|---|---|---|---|---|
| | Nombre. | % | Nombre. | % |
| Feuilles intactes | 9879 | 93,90 | 11543 | 83,40 |
| „ endommagées | 641 | 6,10 | 2297 | 16,60 |
| | 10520 | 100,00 | 13840 | 100,00 |

Les feuilles intactes furent encore classées au point de vue de la couleur [2]) et de la longueur. On ne distingua que trois couleurs, savoir fauve-clair, fauve-foncé et panaché; d'après la longueur on les subdivisa en 1e, 2e, 3e et 4e longueurs.

*Couleur.*

| | Tabac d'ombre. | | Tabac de contrôle. | |
|---|---|---|---|---|
| | Nombre. | % | Nombre. | % |
| Fauve-clair | 7541 | 71,68 | 6450 | 46,60 |
| Fauve-foncé | 2761 | 26,25 | 6906 | 49,90 |
| Panaché | 218 | 2,07 | 484 | 3,50 |
| | 10520 | 100,00 | 13840 | 100,00 |

[1]) Les récoltes matinales seules.

[2]) J'entends ici par couleur „*fauve*" la couleur brun-verdâtre terne, qui est tant recherchée pour les feuilles préservantes en Allemagne, où on la connaît sous le nom de „*Hamburger Fahl*". Voilà pourquoi on l'appelle aussi „*vaal*" en Hollande.

*Longueur.*

| | Tabac d'ombre. | | Tabac de contrôle. | |
|---|---|---|---|---|
| | Nombre. | % | Nombre. | % |
| 1e longueur | 1979 | 18,81 | 3801 | 27,46 |
| 2e " | 4329 | 41,15 | 6391 | 46,18 |
| 3e " | 3536 | 33,61 | 2895 | 20,92 |
| 4e " | 676 | 6,43 | 753 | 5,44 |
| | 10520 | 100,00 | 13840 | 100,00 |

Les résultats précédents permettent déjà de tirer les conclusions suivantes au sujet de l'épreuve à couvert:

1. l'épreuve à couvert a fourni un produit qui, pour toutes les feuilles individuellement, pesait bien moins que celui de l'épreuve de contrôle;

2. l'épreuve à couvert a fourni *plus* de feuilles intactes et *moins* de feuilles endommagées que l'épreuve de contrôle;

3. l'épreuve à couvert a fourni beaucoup plus de tabac fauve-clair (la couleur actuellement en vogue) que l'épreuve de contrôle;

4. l'épreuve de contrôle, à découvert, a fourni des feuilles dont la longueur était plus convenable que celle des feuilles fournies par l'épreuve à l'ombre.

Je donne maintenant les tableaux de classement des diverses espèces de feuilles dans les deux expériences; on a compté le nombre de feuilles de chaque marque et on a déterminé le poids total, pour en déduire le poids moyen par feuille.

## FEUILLE DE TERRE.

### Expérience à couvert.

Récolte: 5220 feuilles; poids: 6030 grammes.

Poids moyen d'une feuille: *1,16* gr.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I. FAUVE CLAIR | : **4442** feuilles; | poids **5050** gr.; | poids moyen d'une feuille: | | | **1,14** gr. |
| A. *Feuilles intactes* | : *4135* „ ; | „ *4730* „ ; | „ „ „ „ | | : | *1,14* „ |
| 1e longueur | : — | | | | | |
| 2e „ | : 1327 „ ; | „ 1590 „ : | „ „ „ „ | | : | 1,20 „ [1] |
| 3e „ | : 2312 „ ; | „ 2590 „ ; | „ „ „ „ | | : | 1,12 „ [1] |
| 4e „ | : 496 „ ; | „ 550 „ ; | „ „ „ „ | | : | 1,10 „ [1] |
| B. *Feuilles avariées* | : *307* „ ; | „ *320* „ ; | „ „ „ „ | | : | *1,04* „ |
| II. FAUVE FONCÉ | : **778** „ ; | „ **980** „ ; | „ „ „ „ | | : | **1,26** „ |
| A. *Feuilles intactes* | : *725* „ ; | „ *920* „ ; | „ „ „ „ | | : | *1,22* „ |
| 1e longueur | : — | | | | | |
| 2e „ | : 233 „ ; | „ 320 „ ; | „ „ „ „ | | : | 1,37 „ [1] |
| 3e „ | : 405 „ ; | „ 500 „ ; | „ „ „ „ | | : | 1,23 „ [1] |
| 4e „ | : 87 „ ; | „ 100 „ ; | „ „ „ „ | | : | 1,15 „ [1] |
| B. *Feuilles avariées* | : *53* „ ; | „ *60* „ ; | „ „ „ „ | | : | *1,13* „ |

### Expérience de contrôle à découvert.

Récolte: 6900 feuilles; poids: 12.010 grammes.

Poids moyen d'une feuille: *1,74* gr.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I. FAUVE CLAIR | : **2904** feuilles; | poids **4830** gr.; | poids moyen d'une feuille | | : | **1,66** gr. |
| A. *Feuilles intactes* | : *2180* „ ; | „ *3740* „ ; | „ „ „ „ | | : | *1,72* „ |
| 1e longueur | : 107 „ ; | „ 270 „ ; | „ „ „ „ | | : | 2,52 „ [1] |
| 2e „ | : 1018 „ ; | „ 1850 „ ; | „ „ „ „ | | : | 1,81 „ [1] |
| 3e „ | : 817 „ ; | „ 1300 „ ; | „ „ „ „ | | : | 1,59 „ [1] |
| 4e „ | : 238 „ ; | „ 320 „ ; | „ „ „ „ | | : | 1,35 „ [1] |
| B. *Feuilles avariées* | : *724* „ ; | „ *1090* „ ; | „ „ „ „ | | : | *1 50* „ |
| II. FAUVE FONCÉ | : **3858** „ ; | „ **6950** „ ; | „ „ „ „ | | : | **1,80** „ |
| A. *Feuilles intactes* | : *2897* „ ; | „ *5380* „ ; | „ „ „ „ | | : | *1,80* „ |
| 1e longueur | : 142 „ ; | „ 390 „ ; | „ „ „ „ | | : | 2,74 „ [1] |
| 2e „ | : 1353 „ ; | „ 2730 „ ; | „ „ „ „ | | : | 2,01 „ [1] |
| 3e „ | : 1086 „ ; | „ 1820 „ ; | „ „ „ „ | | : | 1,67 „ [1] |
| 4e „ | : 316 „ ; | „ 440 „ ; | „ „ „ „ | | : | 1,39 „ [1] |
| B. *Feuilles avariées* | : *961* „ ; | „ *1570* „ ; | „ „ „ „ | | : | *1,63* „ |
| III. PANACHÉ | : **138** „ ; | „ **230** „ ; | „ „ „ „ | | : | **1,67** „ |
| A. *Feuilles intactes* | : *105* „ | | | | | |
| B. „ *avariées* | : *33* „ | | | | | |

[1]) Un échantillon en fut envoyé en Hollande.

## FEUILLE DE BASE.

### Expérience à couvert.

Récolte: 3840 feuilles; poids: 7119 grammes.

Poids moyen d'une feuille: *1,85* gr.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I. | FAUVE CLAIR | **2723** feuilles; | poids **4970** gr.; | poids moyen d'une feuille: | **1,83** gr. |
| A. | *Feuilles intactes*: | *2560* „ ; | „ *4690* „ ; | „ „ „ „ : | *1,83* „ |
| | 1ère longueur : | 1222 „ ; | „ 2420 „ ; | „ „ „ „ : | 1,98 „ |
| | 2e „ : | 1157 „ ; | „ 2000 „ ; | „ „ „ „ : | 1,73 „ |
| | 3e „ : | 181 „ ; | „ 270 „ ; | „ „ „ „ : | 1,49 „ |
| B. | *Feuilles avariées*: | *163* „ ; | „ *280* „ ; | „ „ „ „ : | *1,71* „ |
| II. | FAUVE FONCÉ : | **1090** „ ; | „ **2100** „ ; | „ „ „ „ : | **1,93** „ |
| A. | *Feuilles intactes*: | *1025* „ ; | „ *1980* „ ; | „ „ „ „ : | *1,93* „ |
| | 1ère longueur : | 489 „ ; | „ 1000 „ ; | „ „ „ „ : | 2,05 „ |
| | 2e „ : | 463 „ ; | „ 860 „ ; | „ „ „ „ : | 1,86 „ |
| | 3e „ : | 73 „ ; | „ 120 „ ; | „ „ „ „ : | 1,62 „ |
| B. | *Feuilles avariées*: | *65* „ ; | „ *120* „ ; | „ „ „ „ : | *1,85* „ |
| III. | PANACHÉ : | **27** „ ; | „ **49** „ ; | „ „ „ „ : | **1,81** „ |
| A. | *Feuilles intactes*: | *25* „ | | | |
| B. | „ *avariées*: | *2* „ | | | |

### Expérience de contrôle à découvert.

Récolte: 6020 feuilles; poids: 15.330 grammes.

Poids moyen d'une feuille: *2,55* gr.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I. | FAUVE CLAIR : | **3366** feuilles; | poids **8380** gr.; | poids moyen d'une feuille: | **2,50** gr. |
| A. | *Feuilles intactes*: | *3090* „ ; | „ *7750* „ ; | „ „ „ „ : | *2,50* „ |
| | 1ère longueur : | 1728 „ ; | „ 4550 „ ; | „ „ „ „ : | 2,63 „ |
| | 2e „ : | 1266 „ ; | „ 3000 „ ; | „ „ „ „ : | 2,37 „ |
| | 3e „ : | 96 „ ; | „ 200 „ ; | „ „ „ „ : | 2,08 „ |
| B. | *Feuilles avariées*: | *276* „ ; | „ *630* „ ; | „ „ „ „ : | *2,28* „ |
| II. | FAUVE FONCÉ : | **2444** „ ; | „ **6450** „ ; | „ „ „ „ : | **2,64** „ |
| A. | *Feuilles intactes*: | *2244* „ ; | „ *5960* „ ; | „ „ „ „ : | *2,66* „ |
| | 1ère longueur : | 1255 „ ; | „ 3460 „ ; | „ „ „ „ : | 2,75 „ [1] |
| | 2e „ : | 920 „ ; | „ 2350 „ ; | „ „ „ „ : | 2,55 „ [1] |
| | 3e „ : | 69 „ ; | „ 150 „ ; | „ „ „ „ : | 2,17 „ [1] |
| B. | *Feuilles avariées*: | *200* „ ; | „ *490* „ ; | „ „ „ „ : | *2,45* „ |
| III. | PANACHÉ : | **210** „ ; | „ **500** „ ; | „ „ „ „ : | **2,38** „ |
| A. | *Feuilles intactes*: | *193* „ ; | „ *463* „ ; | „ „ „ „ : | *2,40* „ |
| B. | „ *avariées*: | *17* „ ; | „ *37* „ ; | „ „ „ „ : | *2,18* „ |

---

[1]) Un échantillon en fut envoyé en Hollande.

## FEUILLE DU MILIEU.

### Expérience à couvert.

Récolte: 860 feuilles; poids: 1861 grammes.

Poids moyen d'une feuille: *2,16* gr.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. Fauve clair | : | **326** | feuilles; | poids | **650** | gr.; | poids | moyen | d'une | feuille: | **1,99** | gr. | |
| A. *Feuilles intactes* | : | *318* | „ ; | „ | *636* | „ ; | „ | „ | „ | „ : | *2,—* | „ | |
| 1ère longueur | : | 54 | „ ; | „ | 115 | „ ; | „ | „ | „ | „ : | 2,13 | „ | [1] |
| 2e „ | : | 234 | „ ; | „ | 475 | „ ; | „ | „ | „ | „ : | 2,03 | „ | [1] |
| 3e „ | : | 30 | „ ; | „ | 46 | „ ; | „ | „ | „ | „ : | 1,53 | „ | [1] |
| B. *Feuilles avariées* | : | *8* | „ ; | „ | *14* | „ ; | „ | „ | „ | „ : | *1,75* | „ | |
| II. Fauve foncé | : | **460** | „ ; | „ | **1040** | „ ; | „ | „ | „ | „ : | **2,26** | „ | |
| A. *Feuilles intactes* | : | *449* | „ ; | „ | *1020* | „ ; | „ | „ | „ | „ : | *2,27* | „ | |
| 1ère longueur | : | 76 | „ ; | „ | 183 | „ ; | „ | „ | „ | „ : | 2,41 | „ | [1] |
| 2e „ | : | 330 | „ ; | „ | 759 | „ ; | „ | „ | „ | „ : | 2,30 | „ | [1] |
| 3e „ | : | 43 | „ ; | „ | 78 | „ ; | „ | „ | „ | „ : | 1,81 | „ | [1] |
| B. *Feuilles avariées* | : | *11* | „ ; | „ | *20* | „ ; | „ | „ | „ | „ : | *1,82* | „ | |
| III. Panaché | : | **74** | „ ; | „ | **171** | „ ; | „ | „ | „ | „ : | **2,31** | „ | |
| A. *Feuilles intactes* | : | *71* | „ | | | | | | | | | | |
| B. „ *avariées* | : | *3* | „ | | | | | | | | | | |

### Expérience de contrôle à découvert.

Récolte: 540 feuilles; poids: 1608 grammes.

Poids moyen d'une feuille: *2,98* gr.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I. Fauve clair | : | **137** | feuilles; | poids | **377** | gr.; | poids | moyen | d'une | feuille: | **2,75** | gr. | |
| A. *Feuilles intactes* | : | *122* | „ ; | „ | *340* | „ ; | „ | „ | „ | „ : | *2,79* | „ | |
| 1ère longueur | : | 22 | „ ; | „ | 66 | „ ; | „ | „ | „ | „ : | 3,— | „ | [1] |
| 2e „ | : | 95 | „ ; | „ | 262 | „ ; | „ | „ | „ | „ : | 2,76 | „ | [1] |
| 3e „ | : | 5 | „ ; | „ | 12 | „ ; | „ | „ | „ | „ : | 2,40 | „ | |
| B. *Feuilles avariées* | : | *15* | „ ; | „ | *37* | „ ; | „ | „ | „ | „ : | *2,47* | „ | |
| II. Fauve foncé | : | **322** | „ ; | „ | **978** | „ ; | „ | „ | „ | „ : | **3,04** | „ | |
| A. *Feuilles intactes* | : | *287* | „ ; | „ | *882* | „ ; | „ | „ | „ | „ : | *3,07* | „ | |
| 1ère longueur | : | 52 | „ ; | „ | 170 | „ ; | „ | „ | „ | „ : | 3,27 | „ | [1] |
| 2e „ | : | 224 | „ ; | „ | 680 | „ ; | „ | „ | „ | „ : | 3,04 | „ | [1] |
| 3e „ | : | 11 | „ ; | „ | 32 | „ ; | „ | „ | „ | „ : | 2,91 | „ | [1] |
| B. *Feuilles avariées* | : | *35* | „ ; | „ | *96* | „ ; | „ | „ | „ | „ : | *2,74* | „ | |
| III. Panaché | : | **81** | „ ; | „ | **253** | „ ; | „ | „ | „ | „ : | **3,12** | „ | |
| A. *Feuilles intactes* | : | *72* | „ | | | | | | | | | | |
| B. „ *avariées* | : | *9* | „ | | | | | | | | | | |

[1] Un échantillon en fut envoyé en Hollande.

## FEUILLE DU SOMMET.

### Expérience à couvert.

Récolte: 600 feuilles; poids: 1492 grammes.

Poids moyen d'une feuille: *2,49* gr.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I. FAUVE CLAIR | : **50** | feuilles; poids | **114** | gr.; poids moyen d'une feuille: | **2,28** | gr. [1] |
| Toutes feuilles intactes. | | | | | | |
| II. FAUVE FONCÉ | : **433** | „ ; „ | **1070** | „ ; „ „ „ „ : | **2,47** | „ |
| A. *Feuilles intactes* | : *412* | „ ; „ | *1030* | „ ; „ „ „ „ : | *2,50* | „ |
| 1ère longueur | | | | | | |
| 2e „ | : 196 | „ | | | | [1] |
| 3e „ | : 181 | „ | | | | [1] |
| 4e „ | : 35 | „ | | | | [1] |
| B. *Feuilles avariées* | : *21* | „ ; „ | *40* | „ ; „ „ „ „ : | *1,90* | „ |
| III. PANACHÉ | : **117** | „ ; „ | **308** | „ ; „ „ „ „ : | **2,63** | „ |
| A. *Feuilles intactes* | : *109* | „ | | | | |
| B. „ *avariées* | : *8* | „ | | | | |

### Expérience de contrôle à découvert.

Récolte: 380 feuilles; poids: 1254 grammes.

Poids moyen d'une feuille: *3,30* gr.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I. FAUVE CLAIR | : **43** | feuilles; poids | **132** | gr.; poids moyen d'une feuille: | **3,07** | gr. [1] |
| II. FAUVE FONCÉ | : **282** | „ ; „ | **931** | „ ; „ „ „ „ : | **3,30** | „ |
| A. *Feuilles intactes* | : *262* | „ ; „ | *878* | „ ; „ „ „ „ : | *3,35* | „ [1] |
| B. „ *avariées* | : *20* | „ ; „ | *53* | „ ; „ „ „ „ : | *2,65* | „ |
| III. PANACHÉ | : **55** | „ ; „ | **191** | „ ; „ „ „ „ : | **3,47** | „ |

[1]) Un échantillon en fut envoyé en Hollande.

Aperçu des quantités relatives des diverses marques dans les diverses espèces de feuilles des deux épreuves.

| | | Feuille de terre. | | Feuille de base. | | Feuille du milieu. | | Feuille du sommet. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Tente. | Air. | Tente. | Air. | Tente. | Air. | Tente. | Air. |
| *Feuilles* | Nombre | *4860* | *5182* | *3610* | *5527* | *838* | *481* | *571* | *353* |
| *intactes* | °/o | *93,10* | *75,10* | *94* | *91,80* | *97,50* | *89,10* | *95,20* | *92,80* |
| *Feuilles* | Nombre | *360* | *1718* | *230* | *493* | *22* | *59* | *29* | *27* |
| *avariées* | °/o | *6,90* | *24,90* | *6,—* | *8,20* | *2,50* | *10,90* | *4,80* | *7,20* |
| **Fauve** | Nombre | **4442** | **2904** | **2723** | **3366** | **326** | **137** | **50** | **43** |
| **clair** | °/o | **85,10** | **42,10** | **70,90** | **55,90** | **38** | **25,40** | **8,30** | **11,30** |
| **Fauve** | Nombre | **778** | **3858** | **1090** | **2444** | **460** | **322** | **433** | **282** |
| **foncé** | °/o | **14,90** | **55,90** | **28,40** | **40,60** | **53,40** | **59,60** | **72,20** | **74,20** |
| **Panaché** | Nombre | — | **138** | **27** | **210** | **74** | **81** | **117** | **55** |
| | °/o | — | **2,—** | **0,70** | **3,50** | **8,60** | **15,—** | **19,5** | **14,50** |
| 1ère longueur | Nombre | — | 338 | 1832 | 3365 | 147 | 98 | — | — |
| | °/o | — | 4,90 | 47,70 | 55,90 | 17,10 | 18,10 | — | — |
| 2e " | Nombre | 1676 | 3222 | 1736 | 2468 | 631 | 422 | 286 | 279 |
| | °/o | 32,10 | 46,70 | 45,20 | 41,— | 73,40 | 78,20 | 47,60 | 73,40 |
| 3e " | Nombre | 2918 | 2587 | 272 | 187 | 82 | 20 | 264 | 101 |
| | °/o | 55,90 | 37,50 | 7,10 | 3,10 | 9,50 | 3,70 | 44,— | 26,60 |
| 4e " | Nombre | 626 | 753 | — | — | — | — | 50 | — |
| | °/o | 12,— | 10,90 | — | — | — | — | 8,40 | — |

Enfin, j'ai fait encore une détermination d'épaisseur du tissu de la feuille (après fermentation) pour les deux cultures. Pour déterminer cette épaisseur, j'ai découpé à l'emporte-pièce trois ronds dans le limbe de chaque feuille à mesurer, savoir un rond à la pointe, un au milieu et un à la base; j'ai evité autant que possible les nervures pour avoir une mesure aussi exacte que possible du tissu.

Pour cette détermination j'ai employé 100 feuilles de chaque espèce et j'ai mesuré les épaisseurs des rondelles, dans l'ordre susdit, en centièmes de millimètre, à l'aide d'un compas d'épaisseur de Zeiss.

Voici quel est le résultat ainsi obtenu:

Détermination d'épaisseur en $\frac{mm}{100}$.

| | | Tabac d'ombre. | | | | Tabac de contrôle. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Pointe. | Milieu. | Base. | Moyenne. | Pointe. | Milieu. | Base. | Moyenne. |
| Feuille de terre | Fauve clair | 18 | 14 | 13 | **15** | 22 | 17 | 15 | **18** |
| | Fauve foncé | 19 | 15 | 14 | **16** | 24 | 19 | 17 | **20** |
| Feuille de base | Fauve clair | 15 | 10 | 8 | **11** | 20 | 14 | 11 | **15** |
| | Fauve foncé | 19 | 13 | 10 | **14** | 24 | 17 | 13 | **18** |
| Feuille du milieu | Fauve clair | 14 | 9 | 7 | **10** | 18 | 12 1/2 | 10 | **13 1/2** |
| | Fauve foncé | 17 | 11 1/2 | 9 | **12 1/2** | 21 | 15 | 12 | **16** |
| Feuille du sommet | Fauve clair | — | — | — | — | — | — | — | — |
| | Fauve foncé | 16 | 11 | 9 | **12** | 17 | 13 1/2 | 11 1/2 | **14** |

Après que le tabac des deux épreuves, entièrement apprêté, eût été examiné au point de vue de toutes les propriétés dont il vient d'être question, j'ai cru qu'il serait utile, en définitive, de le soumettre à l'appréciation d'une personne compétente, pour connaître la valeur commerciale intrinsèque des deux produits. Dans ce but, le tabac d'épreuve fut expédié à Amsterdam, afin d'y être soumis au jugement de courtiers, sans leur dire que parmi les échantillons il y avait du tabac cultivé à l'ombre.

Voici quel est le jugement émis à ce propos.

### D. Appréciation de courtier des deux tabacs d'épreuve.

| **Tabac d'ombre.** | **Tabac de contrôle.** |
|---|---|
| **I. FEUILLE DE TERRE.** | |
| *a.* Fauve clair. | |
| Très mince, feuille douce. Teintes très bonnes, égales, fauve terne. *A la mode.* | Grande feuille, d'espèce lourde. Couleurs ternes, fauve foncé. *Article courant, mais moins à la mode.* |
| *b.* Fauve foncé. | |
| Un peu plus foncé; un peu plus membraneux. | Un peu lourd; type peu mûr à teinte fauve foncé; tabac un peu large, mais bien développé. |

## II. FEUILLE DE BASE.

### *a.* Fauve clair.

Grande et mince feuille, teintes généralement bonnes, égales, claires, brun fauve. *Très bonne feuille préservante.*

Très foliacées, minces et douces; bonnes teintes, égales, brun fauve clair. *Bonne feuille préservante.*

### *b.* Fauve foncé

Un peu plus lourd; couleurs foncées, brun fauve

Un peu plus foncé et plus lourd. Couleurs assez égales, brunes et brun fauve.

## III. FEUILLE DU MILIEU.

### *a.* Fauve clair.

Brun fauve, de teinte égale, mais sans grande valeur.

Feuille un peu plus dure. Brun et brun fauve, un peu panaché.

### *b.* Fauve foncé.

Fauve foncé, un peu verdâtre.

Dur, grossier.

## IV. FEUILLE DU SOMMET.

Petite feuille, un peu lourde et grossière.

*Conclusion finale des courtiers:*

La feuille de terre et de base de cette série fournit une très bonne feuille préservante, mince et douce, avec de bonnes teintes égales, et beaucoup de couleurs fauves, à la mode.

Les feuilles du milieu et du sommet sont assez bonnes.

Et si maintenant, nous basant sur les résultats ainsi obtenus, nous nous permettons d'émettre un avis sur le résultat général de cette épreuve de culture à couvert, au sujet du produit qu'elle a fourni, en comparaison de celui qui a été obtenu par l'épreuve de contrôle à découvert, notre conclusion ne peut être que favorable pour l'expérience à l'ombre.

Dans cette expérience, le tabac cultivé sous une couverture de toile à tentes a donné un produit qui avait presque à tous les points de vue des qualités supérieures à celles de la feuille de tabac obtenue par une culture normale à l'air libre.

## V.

## Détails relatifs à l'unique récolte faite l'après-midi.

J'ai déjà dit à la page 206 que le 14 juin une récolte de feuilles a été faite exceptionnellement l'après-midi, vers le milieu de la journée, au lieu du matin à 6 heures, ainsi que c'était la règle dans cette expérience à l'ombre.

La différence physiologique entre une feuille de tabac qui a été cueillie le matin, et une autre qui a été prise l'après-midi du même jour, consiste e.a. en ceci que, dans le dernier cas, les cellules du tissu foliaire sont remplies du produit d'assimilation de la plante, c.-à-d. de fécule, qui a été formeé pendant les premières heures du jour sous l'influence de la lumière solaire. Par le transport de ce produit d'assimilation pendant la nuit, une feuille de tabac que l'on récolte le matin de bonne heure, avant que le processus d'assimilation ait pu recommencer, doit être complètement privée, dans les circonstances les plus favorables, de la fécule de la journée précédente

Un moyen très commode, permettant de s'assurer instantanément de ces conditions physiologiques variables de la feuille de tabac, est l'application de ce qu'on appelle l'épreuve à l'iode de SACHS.

Puisque la feuille verte peut présenter d'aussi grandes différences quant au contenu, on peut s'attendre à priori à ce que la présence ou l'absence de ce produit d'assimilation ait une influence sur la qualité de la feuille de tabac apprêtée; en d'autres termes, la feuille de tabac récoltée au moment où elle est remplie de fécule doit être qualitativement différente, après séchage et fermentation, de la feuille de tabac qui était exempte de fécule au moment du cueillage.

Des recherches entreprises spécialement dans ce but ont appris qu'il en est réellement ainsi.

En 1902 j'ai examiné de près cette question [1]), et au sujet de

[1]) HUNGER, Physiologische onderzoekingen over Deli-tabak, Dl. I, Eerste stuk. Colorimetrische zetmeel-bepalingen. Mededeelingen uit 's Lands Plantentuin, 1903, n°. LXVI.

l'influence que peut avoir dans la suite, sur les propriétés qualitatives du produit commercial fermenté, la teneur en fécule de la feuille de tabac pendant la récolte, je suis arrivé e.a aux résultats suivants: (l.c. p. 59).

1°. une *récolte matinale* (sans fécule) donne du tabac fauve-clair, tandis qu'une *récolte à une heure avancée* de la journée (avec fécule) donne du tabac fauve-foncé;

2°. les avantages de qualité du tabac sans fécule, cueilli de bonne heure, ne consistent pas seulement dans la couleur, mais aussi dans le poids total, l'épaisseur de la feuille et la combustibilité.

Les chiffres qui confirment ces derniers résultats sont communiqués dans le petit tableau suivant:

| | Sans fécule. | Avec fécule. |
|---|---|---|
| Nombre de feuilles | 250 | 250 |
| Poids total en grammes | 770 | 925 |
| Epaisseur moyenne en $\frac{mm}{100}$ | 21 1/2 | 25 |
| Combustibilité en secondes | 71 1/2 | 41 1/2 |

Bien que la question de l'influence de la récolte à diverses heures de la journée sur les propriétés de la feuille tombe en dehors des limites de notre expérience, je désire cependant en dire un mot, parce que nous avons fait une seule fois un cueillage l'après-midi, tandis que toutes les autres récoltes ont eu lieu le matin; les résultats que ce cueillage ont fourni peuvent donc servir de contrôle à mes expériences de 1902.

Ce cueillage effectué dans l'après-midi du 14 juin a rapporté, pour l'expérience sous tente, 2120 et pour l'expérience de contrôle 1840 feuilles de base.

La détermination colorimétrique préalable de la teneur en fécule (épreuve à l'iode) avait appris que ce produit était rempli de fécule; par contre, la feuille de base cueillie dans la matinée était toujours récoltée après une température nocturne minima de 22° C. à l'extérieur, ce qui est, d'après mes recherches précitées, la température à laquelle „l'enlèvement nocturne de la fécule aux feuilles s'effectue *complètement*" (l.c. p. 58).

Le séchage et la fermentation de cette récolte particulière ont eu lieu en même temps que les mêmes processus des récoltes matinales ordinaires, mais j'ai marqué d'un signe distinctif les bottes de la récolte d'après-midi, afin de pouvoir les retrouver après la fermentation.

Le triage du tabac d'après-midi eut lieu conformément à celui du tabac du matin.

On trouve dans le tableau suivant les résultats de la détermination des propriétés qualitatives de cette double récolte d'après-midi, comparées avec les résultats moyens de la récolte matinale de feuilles de base toute entière, dans les deux expériences.

## FEUILLE DE BASE (récolte d'après-midi).

### Expérience à couvert.

Récolte: 2120 feuilles; poids: 4999 grammes.

Poids moyen d'une feuille: *2,36* gr.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| I. FAUVE CLAIR | : **1640** feuilles; | poids **3735** gr.; | poids moyen d'une feuille: | **2,28** gr. |
| A. *Feuilles intactes*: | *1525* „ ; | „ *3500* „ ; | „ „ „ „ : | *2,29* „ |
| 1ère longueur : | 477 „ ; | „ 1200 „ ; | „ „ „ „ : | 2,52 „ [1] |
| 2e „ : | 698 „ ; | „ 1590 „ ; | „ „ „ „ : | 2,28 „ [1] |
| 3e „ : | 350 „ ; | „ 710 „ ; | „ „ „ „ : | 2,03 „ [1] |
| B. *Feuilles avariées*: | *115* „ ; | „ *235* „ ; | „ „ „ „ : | *2,04* „ |
| II. FAUVE FONCÉ : | **480** „ ; | „ **1264** „ ; | „ „ „ „ : | **2,63** „ |
| A. *Feuilles intactes*: | *447* „ ; | „ *1190* „ ; | „ „ „ „ : | *2,66* „ |
| 1ère longueur : | 139 „ ; | „ 410 „ ; | „ „ „ „ : | 2,95 „ [1] |
| 2e „ : | 205 „ ; | „ 550 „ ; | „ „ „ „ : | 2,68 „ [1] |
| 3e „ : | 103 „ ; | „ 230 „ ; | „ „ „ „ : | 2,23 „ [1] |
| B. *Feuilles avariées*: | *33* „ ; | „ *74* „ ; | „ „ „ „ : | *2,24* „ |

[1]) Envoyé en Hollande pour être apprécié.

## FEUILLE DE BASE (récolte d'après-midi).

**Epreuve de contrôle à découvert.**

Récolte: 1740 feuilles; poids: 5346 grammes.

Poids moyen d'une feuille: *3,07* gr.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| I. FAUVE CLAIR | : non représenté. | | | | | |
| II. FAUVE FONCÉ | : „ „ | | | | | |
| III. BRUN CLAIR | : **1109** feuilles; | poids **3290** gr.; | poids moyen d'une feuille: | | | **2,97** gr. |
| A. *Feuilles intactes* | : *993* „ ; | „ *2990* „ ; | „ „ „ „ | : | *3,01* „ | |
| 1ère longueur | : 345 „ ; | „ 1130 „ ; | „ „ „ „ | : | 3,28 „ | [1]) |
| 3e „ | : 495 „ ; | „ 1480 „ ; | „ „ „ „ | : | 2,99 „ | [1]) |
| 3e „ | : 144 „ ; | „ 360 „ ; | „ „ „ „ | : | 2,50 „ | [1]) |
| 4e „ | : 9 „ ; | „ 20 „ ; | „ „ „ „ | : | 2,22 „ | [1]) |
| B. *Feuilles avariées* | : *116* „ ; | „ *300* „ ; | „ „ „ „ | : | *2,59* „ | |
| IV. BRUN FONCÉ | : **595** „ ; | „ **2045** „ ; | „ „ „ „ | : | **3,44** „ | |
| A. *Feuilles intactes* | : *533* „ ; | „ *1860* „ ; | „ „ „ „ | : | *3,49* „ | |
| 1ère longueur | : 186 „ ; | „ 710 „ ; | „ „ „ „ | : | 3,82 „ | [1]) |
| 2e „ | : 265 „ ; | „ 900 „ ; | „ „ „ „ | : | 3,40 „ | [1]) |
| 3e „ | : 82 „ ; | „ 250 „ ; | „ „ „ „ | : | 3,05 „ | [1]) |
| B. *Feuilles avariées* | : *62* „ ; | „ *185* „ ; | „ „ „ „ | : | *2,98* „ | |
| V. PANACHÉ | : **36** „ ; | „ **110** „ ; | „ „ „ „ | : | **3,04** „ | |

| | Tente. | | Air libre. | |
|---|---|---|---|---|
| | Récolte matinale. | Récolte d'après-midi. | Récolte matinale. | Récolte d'après-midi. |
| Nombre des feuilles | 3840 | 2120 | 6020 | 1840 |
| Poids total en gr. | 7114 | 4999 | 15330 | 5346 |
| Poids moyen d'une feuille | 1,85 | 2,36 | 2,55 | 3,07 |
| Feuilles intactes en °/o | 94 | 93 | 91,8 | 89½ |
| Feuilles avariées en °/o | 6 | 7 | 8,2 | 10½ |
| Fauve clair | 70,9 | 57,4 | 55,9 | — |
| Fauve foncé | 28,4 | 44,6 | 40,6 | — |
| Panaché | 0,7 | — | 3,5 | 2,1 |
| Brun clair | — | — | — | 63,7 |
| Brun foncé | — | — | — | 34,2 |
| 1ère longueur | 47,7 | 31,3 | 55,9 | 34,8 |
| 2e „ | 45,2 | 45,8 | 41,— | 49,8 |
| 3e „ | 7,1 | 22,9 | 3,1 | 14,5 |
| 4e „ | — | — | — | 0,9 |

[1]) Envoyé en Hollande pour être apprécié.

Si l'on compare l'épaisseur des feuilles dans les deux méthodes de récolte, on découvre aussi une différence frappante:

| | | Epaisseur de la feuille en $\frac{mm}{100}$. | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Sommet. | Milieu. | Base. | Moyenne. |
| Expérience à couvert | *Récolte du matin:* | | | | |
| | 1. Fauve clair | 15 | 10 | 8 | **11** |
| | 2. Fauve foncé | 19 | 13 | 10 | **14** |
| | *Récolte d'après-midi:* | | | | |
| | 1. Fauve clair | 20 | 14 1/2 | 10 1/2 | **15** |
| | 2. Fauve foncé | 26 | 18 | 13 | **19** |
| Expérience à découvert | *Récolte du matin:* | | | | |
| | 1. Fauve clair | 20 | 14 | 11 | **15** |
| | 2. Fauve foncé | 24 | 17 | 13 | **18** |
| | *Récolte d'après-midi:* | | | | |
| | 1. Brun clair | 27 | 19 | 14 | **20** |
| | 2. Brun foncé | 34 | 23 | 16 1/2 | **24 1/2** |

Les nombres que j'ai obtenus ainsi sont un peu plus faibles que ceux que j'ai obtenus en 1902, tant au point de vue du poids moyen par feuille qu'au point de vue de l'épaisseur de la feuille; cette différence, je l'explique par le fait que, dans mon expérience de 1902, la feuille de base provenait de plantes dont j'avais préalablement coupé la tête pour leur donner une longueur normale, tandis que dans les deux expériences actuelles j'avais laissé avec intention les têtes aux plantes.

Il est intéressant d'apprendre encore l'appréciation des courtiers sur le tabac provenant de la récolte d'après-midi; la voici:

Appréciation de courtier sur la feuille de base (récolte d'après-midi).

**Expérience à couvert.**

1. Fauve clair.

Feuille très mince. Bonnes teintes ternes, brun clair passant au fauve clair. *Fine feuille préservante.*

**Expérience de contrôle.**

1. Brun clair.

Foliacé. Teintes uniformes brun clair. Bonne espèce *Bonne feuille préservante.*

| 2. Fauve foncé. | 2. Brun foncé. |
| --- | --- |
| Feuille mince; couleurs brunes ou brun clair, fauves, en partie uniformes, pour le reste un peu panachées. | Un peu humide et comprimé. En partie à couleurs panachées. Un peu lourd. |

Cette récolte isolée eût difficilement donné une meilleure confirmation de mes conclusions de 1902. L'appréciation des courtiers, qui ignoraient absolument de quelle espèce était le tabac que je soumettais à leur jugement (les bottes portaient uniquement des numéros), s'accorde aussi parfaitement que possible sur le point capital: la couleur.

*La culture d'après-midi à l'air libre ne donna absolument pas de tabac fauve.*

Voici encore quelques conclusions que l'on peut tirer:

1. *La culture sous tente fournit, même quand la récolte a lieu au milieu de la journée, un produit qui est conforme à celui que l'on n'obtient à l'air libre que par une récolte matinale.*

2. L'opinion de M. Mohr [1]), que la récolte matinale fournit moins de *feuilles endommagées* que la récolte d'après-midi, est confirmée aussi bien par l'expérience à l'ombre que par l'expérience de contrôle (l. c. p. 85).

3. Ces données encore peu nombreuses semblent prouver qu'une récolte faite de bonne heure fournit *plus* de feuilles panachées qu'une récolte faite à une heure avancée de la journée.

---

[1]) Mohr: Over het oogsten van Deli-tabak op verschillende tijden van den dag. Mededeelingen uit 's Lands Plantentuin, 1902, N°. LVI.

## VI.

## Observations météorologiques dans l'expérience de culture à l'ombre et dans l'expérience de contrôle.

---

On sait que chez les plantes vertes le processus de l'assimilation consiste en une décomposition d'anhydride carbonique, et l'énergie nécessaire à cette décomposition est fournie par *la lumière.*

Mais ce n'est pas seulement de la lumière qui est puiseé à l'énergie du rayonnement solaire; la chaleur aussi est utile à la plante, parce qu'elle élève *la température* de l'air et du sol.

L'intensité du processus de la décomposition de l'anhydride carbonique, tout comme la respiration, est soumise à l'influence de *la température* ambiante.

La température régit la tension de la vapeur d'eau dans l'air, et par là *l'humidité relative* de l'atmosphère.

Le processus végétal de la transpiration est complètement régi par *la température* et *l'état hygrométrique de l'air.*

La grandeur de la pression radiculaire dépend de *la température* et *du degré d'humidité du sol.*

L'eau qui est fournie dans la nature par *la pluie* participe dans une large mesure à presque tous les phénomènes vitaux chez les plantes.

Ces vérités physiologiques, universellement reconnues, prouvent que l'état de l'atmosphère ambiante a une influence considérable sur les divers processus qui constituent la vie chez les plantes vertes

Partant de ces résultats physiologiques, il me semblait de première nécessité d'établir quel était l'état de l'atmosphère sous la tente, en comparaison du même état à l'air libre; j'espérais pouvoir déduire de là si les changements dans les conditions atmosphériques, produits par la couverture. doivent être considérés comme des facteurs favorables ou défavorables à la vie des plantes à tabac.

Des recherches antérieures m'ont déjà appris [1]) que, malgré la nécessité absolue de la lumière solaire pour une assimilation intense, la feuille de tabac de Déli est très sensible à la lumière solaire *directe*, qui occasionne aisément un changement dans la situation des grains de chlorophylle dans les feuilles. Un pareil déplacement de la chlorophylle, reconnaissable extérieurement à une couleur vert-pâle des feuilles, n'entraîne pas seulement une *formation* de fécule moins intense dans le tissu foliaire, mais *l'enlèvement* de fécule aux feuilles ne se produit pour ainsi dire pas du tout en plein soleil, parce que dans ces circonstances la diastase devient inactive.

A ce propos j'ai du reste pu déterminer la limite de température à laquelle la fécule est encore *complètement* enlevée, pendant la nuit, aux feuilles de tabac de Déli; il faut notamment que la température minima de la nuit ne descende pas *au-dessous de 22° C.*

J'ai reconnu en outre que l'humidité relative de l'air était de la plus haute importance pour l'assimilation de la plante à tabac. Comme le processus d'assimilation est étroitement lié à la transpiration, et que ce dernier dépend à un haut degré de l'humidité relative de l'air, il est clair que dans l'étude du premier de ces deux processus nous devons sérieusement tenir compte de l'état hygrométrique de l'air.

L'état de saturation de l'air par la vapeur d'eau règle l'évaporation de l'eau dans la plante, ce qu'on nomme *l'eau végétative* Pour les deux processus d'assimilation il est avantageux que la teneur en eau végétative soit forte, puisque l'eau joue un rôle capital dans la formation de la fécule, aussi bien que dans son transport (l. c p. 47)

Un état hygrométrique élevé de l'air empêche que le tabac de Déli ne se fane et assure en même temps à la plante une allure régulière du processus d'assimilation tout entier; alors la formation des substances nutritives et leur transport ont lieu d'une façon aussi normale que possible et il en résulte que la plante croît vigoureusement.

Il résulte de tout ce qui précède qu'au sujet de l'état atmos-

---

[1]) Voir HUNGER: Physiologische Onderzoekingen over Deli-Tabak. Deel I, Eerste Stuk: Colorimetrische zetmeel-bepalingen. Mededeelingen uit 's Lands Plantentuin, 1903, n°. LXVI.

phérique ambiant c'est le rayonnement solaire qui est le facteur prédominant, puisqu'en dehors de l'intensité d'éclairement la température de l'air et celle du sol, ainsi que l'humidité de l'air, en dépendent.

Toute modification dans l'intensité de ce rayonnement sera donc nécessairement accompagnée d'un changement dans les deux derniers facteurs atmosphériques.

Si donc le but principal de la culture du tabac à l'ombre est de tempérer la lumière solaire par l'interposition d'un écran en toile, on peut pourtant s'attendre à priori à ce que cette modification dans la méthode de culture entraîne encore d'autres changements dans les conditions atmosphériques.

Je passe maintenant à la description de l'installation des divers instruments météorologiques.

J'ai effectué en tout six espèces de déterminations, savoir:

Durée de l'insolation;
Températures maxima et minima;
Quantité de pluie;
Température du sol;
Température de l'air;
Humidité relative de l'air.

*Durée de l'insolation.* La durée de l'action de la lumière solaire a été déterminée à l'aide d'un petit appareil [1]), formé de deux boîtes plates en cuivre ou en zinc, dont l'une est tournée vers l'est et est destinée à l'observation depuis le lever du soleil jusqu'à midi, l'autre vers l'ouest pour enregistrer la durée de l'insolation après midi.

Au milieu d'une cloison plate, contenue dans chaque boîte, il y a une petite fente, par laquelle pénètre un faisceau de rayons solaires, qui agissent sur du papier sensible placé à l'intérieur des boîtes et y laissent une impression conforme à l'image de la fente. A mesure que le soleil poursuit sa route sur la voûte céleste, l'impression se propage suivant la paroi cylindrique interne de la boîte, et l'on obtient ainsi sur le papier photographique une bande bleu foncé, qui est interrompue chaque fois que, pour

---

[1]) Voir HUNGER: Een opmerking over zonneschijn-waarnemingen. Teysmannia, 1902, 13e jaargang, Dl. XIII, afl. 8/9, pag. 401—405.

l'une ou l'autre raison, l'intensité des rayons solaires est trop faible pour produire une impression.

Un tel appareil enregistreur du rayonnement solaire a été installé librement à une certaine hauteur au-dessus du sol, aussi bien sous la tente qu'à l'air libre.

Il est évident que le petit appareil que je viens de décrire ne permet de déterminer que la durée de l'éclat du soleil; mais la différence entre les impressions obtenues sous la tente et à l'air libre permettait cependant de se faire une idée au sujet de l'intensité de la lumière solaire, pendant le même temps, dans les deux expériences; en ce sens qu'une moindre longueur de l'impression sous la tente, en comparaison de celle obtenue à l'air libre, devait être attribuée à la couverture de toile.

Dans les tableaux suivants on trouvera la durée quotidienne de l'action de la lumière solaire, telle qu'elle a été enregistrée séparement dans les deux expériences; on y voit que pour la durée entière des épreuves l'appareil placé sous la tente a noté 130½ heures d'insolation de moins que dans l'expérience de contrôle.

Sous la tente la durée totale de l'insolation était de 322 heures 25 minutes, tandis qu'elle était de 452 heures 55 minutes à l'air libre, soit une différence de 16, 8 % entre les durées d'insolation enregistrées dans l'épreuve à découvert et l'épreuve à l'ombre.

Dans l'expérience à couvert le soleil avait lui en moyenne 4 heures 28 minutes par jour, et 6 heures 6 min dans l'expérience de contrôle, ce qui fait une différence d'en moyenne 1 h. 6 min. en faveur de l'expérience de contrôle

Voici comment était distribuée l'insolation pendant les 40 premiers jours (avril—mai) et pendant les 40 derniers (juin—juillet):

Aperçu de la durée moyenne du rayonnement solaire en h. et m.

| | Expérience à couvert. | | | | | | Expérience de contrôle. | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Avant-midi. | | Après-midi. | | Total p. 40 j. | | Avant-midi. | | Après-midi. | | Total p. 40 j. | |
| | h. | m. | h. | m. | h. | m. | h. | m. | h. | m. | h. | m. |
| Avril—mai | 76 | 5 | 79 | 40 | **155** | **45** | 106 | 5 | 113 | — | **219** | **5** |
| Juin—juillet | 75 | 30 | 91 | 10 | **166** | **40** | 107 | 25 | 126 | 25 | **233** | **50** |
| Total | 151 | 35 | 170 | 50 | **322** | **85** | 213 | 30 | 239 | 25 | **452** | **55** |

La différence de durée du rayonnement solaire entre les heures de la matinée et celles de la soirée était d'environ 6 %, pour l'expérience à l'ombre aussi bien que pour celle à l'air libre; c.-à-d. que dans les deux expériences on enregistra environ 6 % d'insolation en plus dans l'après-midi que dans la matinée.

Pour de plus amples détails je renvoie au tableau 1 à la fin de ce travail.

*Chute de pluie* [1]). Sous la tente et à l'air libre j'ai établi une même espèce de pluviomètre, et j'ai déterminé en mm. la quantité de pluie tombée.

En principe la pluie ne saurait être uniformément distribuée sous une tente dont les mailles ont quelques mm. de grandeur: l'eau se rassemble en quelques endroits de la tente, d'où elle découle ensuite en filets. De plus, quand l'averse est accompagnée de vent, le courant d'air glisse sur la tente et par là il tombe dans la tente moins de pluie que sur un champ librement exposé. Enfin une petite partie des eaux pluviales doit être absorbée par la toile à tentes et restituée ensuite à l'air par évaporation

Les tableaux spéciaux se rapportant à la chute de pluie prou-

[1]) En 1902 j'ai donné un aperçu général de la chute de pluies à Déli. Voir HUNGER: Statistiek over den regenval van de tabaks-ondernemingen ter Sumatra's Oostkust; Mededeelingen uit 's Lands Plantentuin, n°. LXIX.

vent que la différence entre les quantités de pluie recueillies sous la tente et au-dehors n'est pas importante Sous la tente on nota en tout 344,5 mm. et à l'extérieur 388,3 mm.; il tomba donc en moyenne par jour de pluie (il y en eut en tout 23)

dans l'expérience à l'ombre : 14,98 mm.,
" " de contrôle : 16,88 " ;

ce qui fait une différence moyenne de 1,90 mm. par jour de pluie.
Pour d'autres détails voir le tableau 2 ci-après.

Pour les deux observations météorologiques précédentes, il était indispensable que les instruments fussent installés en toute liberté, une condition qui fut d'ailleurs satisfaite. Il en était autrement pour les observations de température, car, dans l'installation des thermomètres, on devait faire en sorte d'éviter autant que possible toute source de rayonnement.

Pour les garantir contre l'ardeur directe du soleil, on a construit une petite toiture d'atap fort légère, et c'est à l'ombre de cette couverture que les thermomètres furent placés. Au centre de l'espace couvert par cette toiture étaient placés deux pieux; à l'un d'eux étaient suspendus un thermomètre sec et un thermomètre humide (psychromètre d'August), à l'autre un thermomètre à maxima et minima.

Ces deux instruments étaient librement suspendus dans l'air, chacun à une distance de 5 cm. de son support et à six pieds du sol, pour ne pas recevoir de radiations indirectes.

Le thermomètre pour l'observation de la température du terrain était enfoncé de 30 cm. dans le sol et protégé contre les rayons directs du soleil par un couverture en bois speciale.

Comme la dernière observation avait lieu l'après-midi à 5 h. au lieu de 6 h., le calcul des moyennes quotidiennes devait subir une légère modification.

Nommons *a* l'observation faite à 6 h.,
*b* " " " 9 ",
*c* " " " 11 ",
*d* " " " 1 ",
*e* " " " 3 ",
et *f* " " " 5 ".

Admettant que l'abaissement de température de 5 à 6 h. con-

tinue suivant la même ligne que de 3 à 5, ce qui fut pour ainsi dire toujours le cas, je représente par $g$ une observation fictive à 6 h Je trouve alors pour $g$ la valeur $f - \frac{1}{2}(e - f) = \frac{3}{2}f - \frac{1}{2}e$.

Dans ces conditions on a, avec grande approximation, comme

température moyenne de 6 à 9 : $^1/_2\,(a + b)$
" " " 9 " 11 : $^1/_2\,(b + c)$
" " " 11 " 1 : $^1/_2\,(c + d)$
" " " 1 " 3 : $^1/_2\,(d + e)$
" " " 3 " 6 : $^1/_2\,(e + {}^3/_2 f - {}^1/_2 e)$.

La moyenne des observations de la journeé (6 h. a. m. — 6 h. p. m.) est donc:

$$^1/_{12}\{{}^3/_2(a + b) + (b + c) + (c + d) + (d + e) + {}^3/_2(e + {}^3/_2 f - {}^1/_2 e)\}$$
$$= {}^1/_{24}\{3a + 3b + 2b + 2c + 2c + 2d + 2d + 2e + {}^3/_2 e + {}^9/_2 f\}$$
$$= {}^1/_{48}\{6a + 10b + 8c + 8d + 7e + 9f\}.$$

C'est de cette manière que j'ai calculé dans les tableaux suivants la température de l'air, la température du sol et l'humidité relative de l'air.

*Température de l'air.* La température de l'air a été lue sur le thermomètre sec. A l'exception de l'observation à 1 h, la température moyenne aux diverses heures de la journée était *toujours*, dans l'après-midi, *plus éleveé* sous la tente qu'à l'extérieur, ainsi qu'on le reconnaît au tableau suivant:

Aperçu de la température moyenne de l'air en ° C.

| Instant de l'observation. | Expérience à couvert. | | Expérience de contrôle. | |
|---|---|---|---|---|
| | Avril—mai. | Juin—juillet. | Avril—mai. | Juin—juillet. |
| 6h | 22,69 | 22,74 | 21,80 | 21,70 |
| 9 | 28,94 | 28,14 | 28,18 | 27,22 |
| 11 | 31,48 | 30,73 | 31,21 | 30,51 |
| 1 | **32,60** | **31,82** | **32,75** | **32,14** |
| 3 | 31,81 | 31,60 | 31,30 | 31,12 |
| 5h | 29,82 | 29,70 | 28,64 | 28,19 |
| Moyenne totale | 29,77 | 29,33 | 29,19 | 28,65 |

Il résulte de là que la température moyenne aux diverses heures de la journée était, — pour l'épreuve à l'ombre aussi bien

que pour l'épreuve de contrôle —, *plus élevée* pendant les 40 premiers jours (avril—mai) que pendant les 40 derniers (juin—juillet), à l'exception toutefois de l'observation à 6 h. à l'ombre, qui était *plus basse* en moyenne dans la période avril-mai que dans la période juin—juillet.

Durant toute l'expérience la température moyenne de la journée était *toujours plus élevée* dans l'épreuve à couvert que dans l'épreuve de contrôle (voir tableau 3).

Dans l'expérience à couvert la température de l'air était généralement plus uniforme, parce qu'on n'y observait pas, comme à l'air libre, une chaleur aussi excessive ni un refroidissement aussi subit et rapide.

*Etat hygrométrique de l'air.* L'humidité relative de l'air à diverses heures du jour a été déterminée par la différence entre les thermomètres sec et humide à l'instant de l'observation. Les valeurs ont été calculées d'après une table, appropriée spécialement à tous les cas qui peuvent se présenter dans un climat tropical maritime, comme celui de Déli [1]).

Ainsi qu'on pouvait s'y attendre a priori, on constata que l'état de saturation de l'air par la vapeur d'eau était toujours *plus élevé* sous la tente qu'à l'air libre; c'est ce qui est rendu clair par le tableau suivant:

Aperçu de l'humidite relative moyenne de l'air en %.

| Instant de l'observation | Expérience à couvert. | | Expérience de contrôle. | |
|---|---|---|---|---|
| | Avril—mai. | Juin—juillet. | Avril—mai. | Juin—juillet. |
| 6h | 99,00 | 99,00 | 97,85 | 98,00 |
| 9 | 82,93 | 86,48 | 76,38 | 82,18 |
| 11 | 69,30 | 75,40 | 63,70 | 71,05 |
| 1 | 62,20 | 68,88 | 57,48 | 64,50 |
| 3 | 67,00 | 72,05 | 61,45 | 67,68 |
| 5 | 77,28 | 82,88 | 72,68 | 78,55 |
| Moyenne totale | 75,76 | 80,49 | 70,92 | 76,55 |

[1]) Cette table fut dressée par M. le Dr. MOHR; elle appartient à son article: „Over de relatieve vochtigheid der lucht en hare beteekenis voor de tabaksculturr", publié dans les Korte berichten uit 's Lands Plantentuin, Teysmannia 1900, Dl. XI, afl. 10.

La différence des moyennes totales est de 5 % au moins pour les 40 premiers jours (avril-mai) et presque de 4 % pour les 40 derniers; elle est en faveur de l'humidité relative de l'air sous la tente.

Dans l'expérience à couvert les moyennes de chaque jour étaient toujours *plus élevées* que dans l'expérience de contrôle (voir à ce sujet le tableau 4).

*Températures max. et min.* Le petit tableau suivant donne un aperçu des moyennes des températures les plus élevées atteintes pendant la journée et des plus basses atteintes pendant la nuit, pour les deux expériences de culture.

Aperçu des moyennes des temp. max. et min. en ° C.

| | Température maxima. | | Température minima. | |
|---|---|---|---|---|
| | Avril—mai. | Juin—juillet. | Avril—mai. | Juin—juillet. |
| Epreuve à l'ombre | 33,30 | 32,48 | 22,23 | 22,29 |
| Epreuve de contrôle | 34,68 | 33,75 | 20,89 | 21,19 |

De ce tableau aussi ressort l'uniformité plus grande de la température dans l'expérience à l'ombre, puisque les températures extrêmes, aussi bien les plus élevées que les plus basses, ont été observées dans l'expérience de contrôle.

Nous voyons en outre que, durant les 40 premiers jours (juin-juillet), la température maxima s'est abaissée en moyenne, dans les deux expériences, de presque 1° C., tandis que dans la même période la température minima a subi en moyenne une faible augmentation.

Si nous comptons le nombre des jours pendant lesquels, durant toute la durée des épreuves (avril-juillet), la température minima était comprise entre 19°,5 et 23°,5 C., nous trouvons ce qui suit:

| ° C. | Nombre de jours. | |
|---|---|---|
| | Expérience à couvert. | Expérience de contrôle. |
| 19,5 | — | 2 |
| 20,0 | — | 12 |
| 20,5 | — | 13 |
| 21,0 | 3 | 21 |
| 21,5 | 13 | 16 |
| 22,0 | 28 | 14 |
| 22,5 | 16 | 2 |
| 23,0 | 16 | — |
| 23,5 | 4 | — |
| Nombre total des jours | 80 | 80 |

On voit par là que dans l'expérience à l'ombre il n'y eut que 16 jours où la température minima de la nuit s'abaissa au-dessous de 22° C., tandis que dans l'expérience de contrôle il n'y en eut que 16 où tel ne fut pas le cas.

Or, pour que durant la nuit la fécule soit *complètement* enlevée aux feuilles, la température nocturne minima ne peut pas être inférieure à 22° C. (voir HUNGER: Physiologische onderzoekingen over Deli-Tabak, pp. 58 et 59).

Pour les températures maxima comprises entre 30° et 36,5° C., le nombre des jours, dans les deux expériences, était comme suit:

| ° C. | Nombre de jours. | |
|---|---|---|
| | Expérience à couvert. | Expérience de contrôle. |
| 30,0 | 1 | — |
| 30,5 | 4 | — |
| 31,0 | 4 | 2 |
| 31,5 | 3 | 2 |
| 32,0 | 15 | 4 |
| 32,5 | 13 | 3 |
| 33,0 | 12 | 9 |
| 33,5 | 8 | 11 |
| 34,0 | 5 | 13 |
| 34,5 | 4 | 5 |
| 35,0 | 9 | 12 |
| 35,5 | 2 | 5 |
| 36,0 | — | 4 |
| 36,5 | — | 10 |
| Nombre total des jours | 80 | 80 |

Dans mes recherches antérieures, déjà citées, j'ai établi qu'à Déli une température maxima de 35° C. faisait presque toujours que les feuilles de tabac se fanaient (l. c. p. 44). Or, cette température maxima fut atteinte 12 fois dans l'expérience de contrôle et dépassée même 19 fois; par contre, elle ne fut observée que 9 fois dans l'expérience à l'ombre et deux fois seulement elle fut dépassée d'un demi-degré. Mais même alors les plantes cultivées sous tente *ne se fanaient pas*, ce qui doit probablement être attribué à la plus forte humidité relative de l'air sous la tente.

Pour les températures maxima et minima aux diverses journées dans les deux expériences, on consultera le tableau 5.

*Température du sol.* La constitution physique du sol des deux terrains d'expérience, — il consistait en un terreau noir — était favorable à une égalisation aisée de la température. Ainsi qu'il résulte des observations séparées, effectuées simultanément (voir tableau 6), la température du sol se mettait facilement d'accord avec les oscillations de la température de l'air.

Une température élevée du sol est favorable e. a. au transport d'eau dans la plante, et à ce point de vue elle a une bonne influence sur l'assimilation de la plante.

A l'air libre la température du sol était toujours *plus élevée* que dans l'expérience à couvert, ce qui s'explique en partie par l'exposition du terrain découvert aux rayons directs du soleil, et tient pour une autre partie à l'humidité relative plus élevée de l'air sous la tente, qui empêchait le sol de se dessécher.

Aperçu de la température moyenne du sol en ° C.

| Instant de l'observation. | Expérience à couvert. | | Expérience de contrôle. | |
|---|---|---|---|---|
| | Avril—mai. | Juin—juillet. | Avril—mai. | Juin—juillet. |
| 6h | 28,08 | 27,55 | 28,72 | 28,22 |
| 9 | 28,04 | 27,50 | 28,64 | 28,06 |
| 12 | 28,09 | 27,53 | 28,66 | 28,10 |
| 1 | 28,24 | 27,62 | 28,82 | 28,28 |
| 3 | 28,37 | 27,74 | 29,11 | 28,54 |
| 5h | 28,53 | 27,89 | 29,33 | 28,85 |
| Moyenne totale | 28,20 | 27,65 | 28,91 | 28,34 |

Dans l'expérience à couvert aussi bien que dans l'expérience de contrôle, la moyenne des températures du sol à diverses heures de la journée était *plus basse* dans les 40 derniers jours (juin-juillet) que dans les 40 premiers (avril-mai).

En résumé, voici ce qu'ont fourni les observations météorologiques dans les deux expériences:

1. La durée du *rayonnement solaire* était *moindre* dans l'expérience à l'ombre que dans l'expérience de contrôle.
2. La *température moyenne de l'air* pendant le journée était *plus élevée* dans l'expérience à l'ombre que dans l'expérience de contrôle.
3. La *température maxima* de la journée était *plus basse* dans l'expérience à l'ombre que dans l'expérience de contrôle.
4. La *température minima* de la nuit était *plus élevée* dans l'expérience à l'ombre que dans l'expérience de contrôle.
5. La *température du sol* était toujours *plus basse* dans l'expérience à l'ombre que dans l'expérience de contrôle.
6. Le *degré d'humidité relatif* de l'air était *plus élevé* dans l'expérience à l'ombre que dans l'expérience de contrôle.
7. La *quantité de pluie* tombée sur le terrain à l'ombre n'était pas considérablement *moindre* que sur le terrain de contrôle.

Conclusion. La couverture de toile à tente constitue sans contredit un avantage physiologique pour la plante cultivée sous elle, parce que dans ces circonstances les conditions extérieures sont plus favorables aux divers processus vitaux de la plante à tabac que dans la culture normale sur terrain découvert.

---

## VII.

## La culture à l'ombre comme mesure prophylactique contre la maladie de la nielle (panachure en mosaïque) chez le tabac.

C'est à M. Sturgis que revient l'honneur d'avoir fait les premières expériences à ce sujet.

Dans son beau mémoire sur: „Calico of tobacco", dans le 22th Annual Report of the Connecticut Agricultural Experiment Station

for 1898 [1]), il écrit, à la page 252: „There is a vague impression, „hardly amounting to a theory, on the part of many growers of „tobacco, that the attacks of calico are not so severe in places „where the plants are in a measure shaded by trees, as where they are fully exposed"

Il me semble qu'il n'est pas sans intérêt de reproduire ici textuellement quelle idée M. STURGIS se fait de la panachure en mosaïque: „It seems probable that the (calico [2])) - disease is „purely a physiological one, caused primarily by sudden changes „of atmospheric conditions which disturb the normal balance „between evaporation of water from the leaves and its absorption „by its roots, and secondarily by soilconditions which prevent „the speedy restoration of that balance" (l. c. pag. 253.

Se basant sur l'expérience acquise (première citation) et sur sa manière de voir personnelle (deuxième citation), M. STURGIS propose, comme moyen préventif contre la maladie de la nielle, „the „protection of the plants, at critical seasons, from a sudden access „of sunshine", (l.c. p. 253).

Pour atteindre ce but, M. STURGIS propose une méthode opératoire comme celle qu'appliquent les planteurs de la Floride, pour obtenir de fines feuilles préservantes, et qui consiste à couvrir le terrain d'une couverture en „cheese-cloth."

Au commencement ce n'était qu'une solution théorique donnée à la question, car à cette époque M. STURGIS n'avait fait encore aucune expérience dans cette direction.

L'année suivante, c. à. d. en 1899, M. STURGIS fit la première expérience de culture à l'ombre comme méthode prophylactique contre la maladie de la nielle; elle fut combinée avec une autre expérience, faite en même temps, sur l'amendement des terres par la chaux, „which will render the soil more porous and more permeable for heat" (l.c. p. 253).

L'expérience eut lieu sur deux champs de même étendue, dont l'un fut recouvert de toile à tentes, tandis que l'autre resta découvert. Chacun de ces champs d'expérimentation fut subdivisé en quatre champs égaux, qui reçurent respectivement: I. 300 livres,

---

[1]) Voir Part III, pp. 242 à 260.

[2]) En Amérique la panachure en mosaïque s'appelle „calico-" ou „frenching-disease" dans les états du Nord et „brindle" ou „mongrel disease" dans les états du Sud.

II. 500 livres, III. 1000 livres, IV. 2000 livres de chaux par acre.

Voici les résultats:

| | Quantité de chaux p. acre en livres. | Nombre de plantes atteintes de nielle en °/₀. | |
|---|---|---|---|
| | | Terrain couvert. | Terrain découvert. |
| Champ I | 300 | 5 | 10 |
| „ II | 500 | 2½ | 17½ |
| „ III | 1000 | 2½ | 0 |
| „ IV | 2000 | 0 | 0 |
| Total | | 10 | 27½ |

Dans les cinq années (juillet 1899—juin 1904) que j'ai rempli les fonctions de botaniste à l'établissement pour l'examen du tabac de Déli (8e section du département d'agriculture des Indes Néerlandaises), je me suis occupé surtout de la maladie de la nielle; il est donc tout naturel que, dans mon expériences de culture à l'ombre, je n'ai pas manqué d'examiner quels résultats cette méthode de culture a fourni au point de vue de la prophylaxie de la nielle chez le tabac de Déli. Comme les opérations de la récolte et de l'enlèvement des têtes des plantes semblent favoriser l'apparition de la maladie, l'influence de la couverture devait être étudiée avant le commencement de la récolte.

Le 1er juin, deux jours avant que l'on cueillit les premières feuilles de terre, on compta les plantes malades, aussi bien dans l'expérience à l'ombre que dans l'expérience de contrôle, et on constata que dans la première des deux expériences 8 % des plantes étaient atteintes de la maladie, tandis que dans l'autre 44 % des exemplaires présentaient déjà la panachure.

La différence de pourcentage de 36 %, en faveur de la culture sous tente, doit être attribuée, dans ces expériences d'ailleurs identiques, à la seule influence de la couverture de toile. Dans la suite la maladie de la nielle fit des progrès rapides à l'air libre, au point que, quand la récolte des feuilles de terre avait pris fin, il ne resta pour ainsi dire aucune plante de l'expérience de contrôle qui n'en fût atteinte. Par contre, sous la tente le mal ne s'aggrava que lentement, et resta un facteur secondaire jusqu'à la fin de l'épreuve.

Ce résultat est donc une preuve éclatante de l'exactitude de la manière de voir de M. STURGIS; il la confirme avec plus de force encore que ses propres expériences; je tiens donc pour péremptoirement démontré que de pareilles cultures à l'ombre, sous une couverture de toile à tentes, constituent un moyen préventif contre l'apparition de la panachure en mosaïque chez le tabac.

On pouvait d'ailleurs s'y attendre *a priori*; il suffit de se placer au bon point de vue pour juger de l'étiologie de la panachure en mosaïque [1]).

J'ai décrit dans une publication récente [2]) les objections que l'on peut faire, à mon avis, contre les diverses théories que l'on a proposées pour expliquer cette maladie:

„An erster Stelle herrscht die Ansicht, dass die Mosaikkrankheit „durch eine belebte Substanz, z. B. durch Mikro-organismen her-„vorgerufen werde. Hinsichtlich der Bakteriellen Deutung sind „die Angaben meistenteils höchst unvollständig, mit Ausnahme „der letzten Abhandlung von *Iwanowski* [1]), in der eine spezifische „Bakterie mit der Mosaikkrankheit in Zusammenhang gebracht „wird und zugleich Anweisungen für die Züchtung dieser Mikrobe „gegeben werden.

„Durch meinen Kontroll-Versuch konnte ich aber nachweisen „(l.c pag. 264), dass die vermeintliche Mosaikkrankheitbakterie „von *Iwanowski* ebenso wie deren Zoogloën durch Behandlung „mit Phenolchlorathydrat aus den Zellen verschwand, während „die übrige Zellstruktur unverändert blieb. Diese Eigenschaft der „Löslichkeit ist ein wichtiges Argument gegen die bakterielle „Natur dieser Körperchen.

„Die Forscher, welche die Mosaikkrankheit einer bis jetzt mor-„phologisch unbekannten und nicht kultivierbaren Mikrobe zuschrei-„ben, vertreten eine blosse Hypothese, welche erst einer näheren „Bestätigung bedarf. Hieraus folgere ich: es ist noch unerwiesen, „dass die Mosaikkrankheit durch einen Mikroorganismus verur-„sacht wird.

„Gegen *Beyerinck's* Theorie ist einzuwenden, dass von den cha-„rakterisierenden Eigenschaften seines Contagiums das: „principi-

---

[1]) HUNGER. Neue Theorie zur Aetiologie der Mosaikkrankheit des Tabaks. Berichte der Deutschen Botanischen Gesellschaft, 1905, Bd. XXIII, Heft 8, pag. 415–418.

[2]) HUNGER. Untersuchungen und Betrachtungen über die Mosaikkrankheit der Tabakspflanze. Zeitschrift für Pflanzenkrankheiten, 1905, Bd. XV, Heft 5, pag. 257–312. (On y trouve la bibliographie complète relative à se sujet).

„um *vivum*" nicht genügend nachgewiesen ist, während das: „prin-„cipium *fluidum* von *Iwanowski* widerlegt wurde. Solange also der „Beweis nicht geliefert ist, dass die Mosaikkrankheit, sei es durch „einen Mikroorganismus oder durch ein Contagium vivum fluidum „verursacht wird, besteht kein Grund, das Virus der Mosaikkrank-„heit von vornherein als eine belebte Substanz zu betrachten.

„Zweitens herrscht die Ansicht, dass die Mosaikkrankheit ver-„ursacht werde durch eine unbelebte Substanz, u. a durch oxy-„dierende Enzyme, laut der WOODS-HEINTZEL'schen Theorie. Die „Uebertragbarkeit ad infinitum der Mosaikkrankheit ist aber nicht „mit der Wirkung oxydierender Enzyme in Einklang zu bringen. „Auch meiner Ansicht nach besteht das Virus der Mosaikkrank-„heit aus einer unbelebten Substanz; wie ich mir aber ihre Wir-„kung vorstelle, gehört sie nicht in die Zymophoren-, sondern „in die Toxophoren-Gruppe (nach OPPENHEIMER)."

D'après mes recherches sur la côte orientale de Sumatra, la maladie de la nielle est un trouble de l'assimilation, qui peut se présenter d'une façon autonome, mais qui peut aussi être transmis artificiellement.

Je considère le virus de la panachure en mosaïque comme une phyto-toxine, que les processus vitaux produisent continuellement dans les cellules de la plante à tabac, mais qui normalement est sans effet; par contre, quand les phénomènes assimilatoires sont trop intenses, elle s'accumule et produit alors des troubles comme la panachure en mosaïque.

Cette maladie serait donc, d'après cette manière de voir, un écart négatif dans les phénomènes vitaux de la plante normale.

L'apparition spontanée de la maladie chez le tabac de Déli est une question de prédisposition individuelle pour ce panachage normal des feuilles, une prédisposition que cette race particulière de tabac a acquise, dans le cours des années, à un degré aussi fort, par la sélection continuelle d'individus dont les organes foliaires possédaient la plus grande valeur commerciale.

Mais l'amélioration continuelle du degré de finesse de la feuille a été obtenue ici aux dépens du pouvoir général de résistance, au point que le tabac de Déli actuel n'est trop souvent plus en état de suivre le cours normal de sa vie, parce que les propriétés individuelles de la plante sont tellement affaiblies, que très souvent les circonstances extérieures agissent comme des excitants trop forts.

Un pareil état de surexcitation, où l'intensité des processus vitaux est poussée au paroxysme, constitue le moment étiologique de la maladie de la nielle.

Divers facteurs peuvent avoir une influence secondaire sur l'apparition de la maladie; ainsi par exemple, dans le traitement de la plante à tabac on a constaté que l'opération du repiquage [1]) favorise incontestablement l'apparition de la maladie de la panachure. Des expériences spéciales ont également prouvé, que la recherche des chenilles e. a. est une opération qui, quand elle est pratiquée par des personnes peu exercées ou myopes, peut avoir une grande influence sur la propagation de la maladie. [2])

La nature du sol peut aussi jouer un rôle important dans l'apparition de la maladie de la panachure à Déli, et les expériences que j'ai faites à ce sujet m'ont appris, qu'à la côte orientale de Sumatra ce sont les terrains qui fournissent la feuille de tabac la plus précieuse qui portent le plus grand nombre de plantes malades.

A mesure que diminue la qualité du produit, liée à un terrain déterminé, la maladie de la nielle diminue d'importance; chez la feuille de Déli de moindre qualité, cultivée sur paja [3]), cette maladie redoutée est pour ainsi dire inconnue.

En troisième lieu, — et ce n'est pas là le facteur le moins important —, les conditions météorologiques pendant la récolte du tabac ont sur la proportion des plantes malades une influence qui ne saurait être méconnue. L'influence n'est pas la conséquence directe d'un de ces états atmosphériques, mais l'effet indirect de ces états sur l'allure des divers processus vitaux de la plante.

Un entourage qui est favorable à la vie de la plante à tabac, parce que l'uniformité des conditions atmosphériques permet que

---

[1]) HUNGER. Invloed van het verspenen van tabaksbibit. Korte berichten uit 's Lands Plantentuin, Teysmannia, 1904, Dl. XV, afl. 1, pag. 58–64.

[2]) HUNGER: On the spreading of the Mosaic-disease (Calico) on a tobaccofield. Bulletin de l'Institut Botanique de Buitenzorg, 1903, N°. XVII, pp. 10–16.

[2]) du même: Het rupsen zoeken bij de tabak in verband met het later optreden der mozaiekziekte. Korte berichten uit 's Lands Plantentuin, Teysmannia, 1903, Dl. XIV, afl. 12, pag. 632–638.

[3]) du même: Die Verbreitung der Mosaikkrankheit infolge der Behandlung des Tabaks. Centralbl. f. Bakt. u. s. w., IIe Abth., 1904, Bd. XI, n°. 12/13, pp. 405 à 408.

[3]) *Paja* est une espèce de terre tourbeuse à Déli; elle est très poreuse et a une très grande capacité pour l'eau.

le processus de l'assimilation s'effectue sans trouble, tant au point de vue de la formation de fécule qu'au point de vue de son transport; où la transpiration a lieu d'une manière si avantageuse, que les parties aériennes de la plante ne se fanent jamais, ce qui causerait un arrêt dans les phénomènes vitaux; un pareil entourage est évidemment l'idéal pour prévenir une surexcitation de l'intensité de la vie.

Or une tente à ombre, couverte de „cheese-cloth", où, d'après les observations physiologiques que j'ai communiquées au chapitre précédent, l'atmosphère est telle qu'elle permet à tous les processus vitaux de s'effectuer sans trouble, une telle tente réalise une pareille couveuse physiologique

Dans une pareille enceinte les troubles vitaux par suite d'*„übermaximale Reizung"* sont exclus; de cette façon la métastabilité latente de la plante à tabac de Déli, saine en apparence, ne sera pas troublée, et par suite la substance stimulante ne se formera pas.

De cette manière s'explique clairement l'effet prophylactique de la culture à l'ombre pour la maladie de la nielle.

---

## VIII.

## Considérations finales.

A la fin de ce travail sur la culture à l'ombre du tabac de Déli, où j'ai décrit dans tous ses détails une expérience de culture qui a été faite suivant la nouvelle méthode à la côte orientale de Sumatra, une étude plus générale de cette question, en rapport avec la culture toute entière du tabac à Sumatra, ne serait pas déplacée.

Et d'abord se pose la question de savoir quel avenir est réservé à la culture à l'ombre du tabac à Déli.

Mais je n'oserais pas trancher définitivement cette question, sur la foi des résultats fournis par une seule expérience, et je me contenterai pour le moment de relever le pour et le contre.

Dans l'Indische Mercuur du 17 février 1903 [1]) on peut lire un article portant le titre: „Zou aan inferieur Deli-dekblad door cul-

[1]) 26e année, n°. 7, p. 111.

tuur onder schaduw iets te verbeteren zijn?" (Une feuille préservante de Déli de qualité inférieure peut-elle être améliorée par une culture à l'ombre), ce qui inclut donc l'examen d'une pareille question

Après une longue dissertation, pour laquelle je renvoie à l'original, l'auteur arrive à la conclusion suivante, que je traduis textuellement:

„Revenant en somme à mon point de départ, je crois avoir suf-„fisamment prouvé dans ce qui précède, qu'à la question posée „comme titre on peut répondre formellement par l'affirmative."

Ainsi que je viens de le dire, je désire m'abstenir d'émettre définitivement un avis, mais je crois devoir mettre mes lecteurs en garde contre un encouragement aussi catégorique de la culture à l'ombre à la côte orientale de Sumatra.

L'article que je viens de citer n'est autre chose qu'un examen théorique de la question, qui n'est fondé sur aucune expérience pratique

Dans la formation de son jugement sur cette méthode modifiée de culture, l'auteur n'avait donc pas pu tenir compte de deux facteurs fondamentaux, savoir:

1. La connaissance des frais éventuels qu'exigerait une pareille culture à l'ombre à Déli.

2. La connaissance des résultats fournis par le tabac de Déli, comme produit de culture à l'ombre, au point de vue de sa qualité.

Par l'expérience que j'ai faite à Déli même en 1903 je suis en mesure, en tout premier lieu, de donner une réponse sur ces deux points; mais en même temps de mieux juger, en son ensemble, de la question du rendement d'une culture à l'ombre du tabac de Sumatra.

Au sujet du dernier point, notamment des résultats que l'on peut attendre au point de vue de la qualité du tabac de Déli, on a vu que la plante à tabac de Déli se laisse parfaitement cultiver sous tente.

Si plus d'un planteur à Déli se montrait sceptique à ce sujet, avant mon expérience, parce qu'il craignait que la feuille de Déli, déjà d'une grande finesse, ne devînt membraneuse („vliezig") par la culture à couvert, et ne perdît en même temps l'élasticité qui lui est propre, les résultats de mon expérience ont suffisamment prouvé le contraire; l'avis très favorable émis par les courtiers donne là-dessus la meilleure garantie.

On a vu en outre que la culture à couvert s'est montrée excellente pour abaisser le pourcentage des feuilles endommagées, parce que les insectes nuisibles sont arrêtés par la tente. Les sauterelles, pas plus que les papillons nocturnes, n'y peuvent pénétrer; ils n'ont donc pas l'occasion de déposer leurs oeufs sur les plantes, qui par là ont, dans la suite, peu à souffrir des chenilles.

En outre il est prouvé, de la façon la plus convaincante, que l'apparition de la maladie de la nielle est notablement réduite par l'ombrage.

Et maintenant l'autre point, savoir les dépenses qu'entraîne une pareille culture à couvert.

C'est là un point qui présentera de grandes difficultés, insurmontables même à mon avis dans le cas pour lequel l'auteur de l'article précité recommande particulièrement la culture à couvert, notamment „pour les terrains où la culture du tabac a été jusqu'à présent peu ou point lucrative."

Avec une installation moins coûteuse que dans mon expérience à couvert de 1903, notamment en employant d'abord de la toile à tentes en coton [1]) (fig. 8, p. 202), d'un prix beaucoup plus bas que le „cheese-cloth" en toile de lin, et en rendant en second lieu la carcasse en bois beaucoup moins solide, pour un rendement de 9 à 10 picols [2]) de tabac par champ [3]), l'augmentation des frais par la culture à l'ombre aurait encore été de 60 à 70 cents par livre de tabac pesé.

*Un pareil surplus représenterait pour la plupart des plantations de tabac sur la côte orientale de Sumatra une augmentation des frais de production de 100 %.*

S'il était à prévoir que le tabac cultivé sur des terres assez mauvaises *augmenterait* en valeur de *f* 1.— par livre par l'application de la culture à couvert, il y aurait évidemment lieu de tâcher d'introduire à Déli cette nouvelle méthode de culture.

Mais tel sera-t-il jamais le cas? Car, admettant qu'un pareil tabac, de qualité inférieure, prît une meilleure couleur et que sa feuille devînt plus fine par la protection d'une couverture, on n'aurait pas encore atteint par là tous les désiderata. En effet, les propriétés

---

[1]) Pour les contrées tropicales une pareille étoffe serait même préférable par sa plus grande solidité.

[2]) 1 picol = 62½ kg.

[3]) Un champ porte 15000 plantes de tabac.

qualitatives les plus caractéristiques sont celles de l'élasticité et de la combustibilité. Or, il me semble peu admissible pour le moment que ces deux dernières propriétés, qui sont surtout régies par la constitution chimique du sol, soient modifiées d'une manière avantageuse en recouvrant le terrain d'une tente en „cheese-cloth."

L'auteur de l'article de l'Indische Mercuur, que j'ai cité tantôt, écrit e. a.: „Par là (c. à d. par la couverture) ces terrains deviendront appropriés, sans aucun doute, à toute espèce de culture"; c'est là précisément un point dont je doute fort.

La seule influence directe et favorable de la couverture sur le sol, que l'on puisse prévoir, doit être exclusivement cherchée, à mon avis, en ceci que sous la tente le sol est mieux protégé contre le dessèchement, et voilà tout!

Aussi trouvera-t-on que les frais excessivement élevés seront une entrave à l'introduction d'une culture du tabac à l'ombre sur la côte orientale de Sumatra; les terrains qui fournissent déjà une excellente feuille préservante n'ont pas besoin du nouveau mode opératoire, puisque la feuille de tabac normale de ces terrains donne déjà de gros bénéfices avec des frais de production ordinaires. Et pour les terrains peu convenables la culture à l'ombre reste une méthode fort risquée, dont il est impossible de garantir a priori des résultats favorables, vu la grandeur des frais d'exploitation.

Aussi serait-ce une grande sottise que d'introduire un pareil changement à Déli, aussi longtemps que des expériences très nombreuses et très précises, dans cette contrée même, n'ont pas été effectuées. Et à ce propos ce que les planteurs américains ont appris à leurs dépens, par une trop grande hâte de réussir, engagera le planteur de Déli à être plus prudent, et lui fera songer au vieil adage:

„Belle doctrine prend en luy, qui se chastie par autruy."

---

TABLEAU I.

# INSOLATION.

# INSOLATION

en $\frac{\text{heures}}{\text{minutes}}$

# TERRAIN COUVERT.

| Mois. | Date. | Avant-midi. | | Après-midi. | | Total en 24 heur | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | heures. | min. | heures. | min. | heures. | mi |
| Avril. | 22 | 1 | 55 | 1 | 25 | 3 | 2 |
| " | 23 | — | 55 | — | — | — | 5 |
| " | 24 | — | 30 | 2 | 20 | 2 | 5 |
| " | 25 | 2 | 55 | 3 | 45 | 6 | 4 |
| " | 26 | — | — | — | 15 | — | 1 |
| " | 27 | 2 | 50 | 3 | 45 | 6 | 3 |
| " | 28 | 3 | 35 | 1 | 5 | 4 | 4 |
| " | 29 | — | — | 2 | 30 | 2 | 3 |
| " | 30 | 2 | 45 | 1 | 50 | 4 | 3 |
| Mai. | 1 | 2 | 55 | 1 | 30 | 4 | 2 |
| " | 2 | 1 | — | — | 10 | 1 | 1 |
| " | 3 | — | 30 | — | 15 | — | 4 |
| " | 4 | 3 | — | 3 | 35 | 6 | 3 |
| " | 5 | 2 | 40 | 3 | 10 | 5 | 5 |
| " | 6 | — | 15 | — | 45 | 1 | - |
| " | 7 | 4 | 20 | 4 | — | 8 | 2 |
| " | 8 | — | 55 | — | 35 | 1 | 3 |
| " | 9 | 1 | 15 | — | 25 | 1 | 4 |
| " | 10 | 2 | 10 | 2 | 25 | 4 | 3 |
| " | 11 | — | — | — | 40 | — | 4 |
| " | 12 | 1 | 25 | 2 | 45 | 4 | 1 |
| " | 13 | 3 | 5 | — | 50 | 3 | 5 |
| " | 14 | 3 | 35 | 2 | — | 5 | 3 |
| " | 15 | 2 | 55 | 2 | 10 | 5 | |
| " | 16 | — | 15 | 1 | — | 1 | 1 |
| " | 17 | — | — | 2 | 30 | 2 | 3 |
| " | 18 | 2 | 50 | 3 | 25 | 6 | 1 |
| " | 19 | 2 | — | 3 | 10 | 5 | 1 |
| " | 20 | 3 | 55 | 3 | 5 | 7 | - |
| " | 21 | — | — | — | 10 | — | 1 |
| " | 22 | — | 25 | — | 40 | 1 | |
| " | 23 | 2 | 40 | 3 | 20 | 6 | - |
| " | 24 | 1 | — | 1 | 45 | 2 | 4 |
| " | 25 | 3 | 15 | 3 | — | 6 | 1 |
| " | 26 | 2 | 45 | 3 | 45 | 6 | 3 |
| " | 27 | 3 | 5 | 3 | 35 | 6 | 4 |
| " | 28 | 3 | 25 | 2 | 20 | 5 | 4 |
| " | 29 | 1 | 35 | 2 | 30 | 4 | |
| " | 30 | 3 | 30 | 3 | 15 | 6 | 4 |
| " | 31 | — | — | — | — | — | - |
| Total. | 40 | 76 | 5 | 79 | 40 | 155 | 4 |

# INSOLATION

en $\frac{\text{heures}}{\text{minutes}}$

# TERRAIN DÉCOUVERT.

| is. | Date. | Avant-midi. | | Après-midi. | | Total en 24 heures. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | heures. | min. | heures. | min. | heures. | min |
| ril. | 22 | 2 | 30 | 2 | — | 4 | 30 |
| | 23 | 1 | 30 | — | — | 1 | 30 |
| | 24 | — | 45 | 3 | — | 3 | 45 |
| | 25 | 3 | 40 | 4 | 15 | 7 | 55 |
| | 26 | — | — | — | 30 | — | 30 |
| | 27 | 3 | 30 | 4 | 15 | 7 | 45 |
| | 28 | 4 | — | 1 | 40 | 5 | 40 |
| | 29 | — | — | 3 | 5 | 3 | 5 |
| | 30 | 3 | 15 | 2 | 40 | 5 | 55 |
| i. | 1 | 4 | 30 | 2 | 10 | 6 | 40 |
| | 2 | 1 | 15 | — | 40 | 1 | 55 |
| | 3 | — | 50 | — | 30 | 1 | 20 |
| | 4 | 4 | 25 | 5 | — | 9 | 25 |
| | 5 | 3 | 40 | 4 | 15 | 7 | 55 |
| | 6 | — | 40 | 1 | 30 | 2 | 10 |
| | 7 | 5 | 5 | 4 | 45 | 9 | 50 |
| | 8 | 1 | 40 | — | 55 | 2 | 35 |
| | 9 | 2 | 10 | — | 50 | 3 | — |
| | 10 | 3 | — | 3 | 15 | 6 | 15 |
| | 11 | — | — | 1 | 25 | 1 | 25 |
| | 12 | 2 | 15 | 3 | 35 | 5 | 50 |
| | 13 | 5 | — | 1 | 30 | 6 | 30 |
| | 14 | 4 | 15 | 3 | 5 | 7 | 20 |
| | 15 | 4 | — | 3 | 45 | 7 | 45 |
| | 16 | — | 50 | 2 | 10 | 3 | — |
| | 17 | — | — | 4 | 5 | 4 | 5 |
| | 18 | 4 | 25 | 4 | 45 | 9 | 10 |
| | 19 | 3 | 15 | 4 | 25 | 7 | 40 |
| | 20 | 5 | — | 4 | 15 | 9 | 15 |
| | 21 | — | — | — | 45 | — | 45 |
| | 22 | 1 | 10 | 2 | 5 | 3 | 15 |
| | 23 | 3 | 55 | 4 | 15 | 8 | 10 |
| | 24 | 2 | 5 | 2 | 25 | 4 | 30 |
| | 25 | 4 | 30 | 4 | 15 | 8 | 45 |
| | 26 | 3 | 15 | 4 | 40 | 7 | 55 |
| | 27 | 4 | — | 4 | 30 | 8 | 30 |
| | 28 | 4 | 40 | 3 | 30 | 8 | 10 |
| | 29 | 2 | 20 | 4 | 15 | 6 | 35 |
| | 30 | 4 | 45 | 4 | 5 | 8 | 50 |
| | 31 | — | — | — | — | — | — |
| tal. | 40 | 106 | 5 | 113 | — | *219* | *5* |

# INSOLATION

en $\frac{\text{heures}}{\text{minutes}}$

# TERRAIN COUVERT.

| Mois. | Date. | Avant-midi. | | Après-midi. | | Total en 24 heure | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | heures. | min. | heures. | min. | heures. | min |
| Juin. | 1 | 2 | 20 | 3 | — | 5 | 20 |
| " | 2 | — | — | 2 | 10 | 2 | 10 |
| " | 3 | 3 | — | — | — | 3 | — |
| " | 4 | — | — | 1 | 15 | 1 | 15 |
| " | 5 | 1 | 30 | 2 | 15 | 3 | 45 |
| " | 6 | 2 | 10 | 3 | — | 5 | 10 |
| " | 7 | 1 | 40 | 1 | 30 | 3 | 10 |
| " | 8 | — | — | 1 | 45 | 1 | 45 |
| " | 9 | — | 40 | 1 | 20 | 2 | |
| " | 10 | 1 | 40 | 1 | 45 | 3 | 25 |
| " | 11 | 1 | 15 | 1 | 55 | 3 | 10 |
| " | 12 | 1 | 50 | 2 | 30 | 4 | 20 |
| " | 13 | 1 | — | 2 | 5 | 3 | 1 |
| " | 14 | 1 | 50 | 4 | — | 5 | 50 |
| " | 15 | 4 | — | 3 | 55 | 7 | 55 |
| " | 16 | 3 | 50 | 1 | 10 | 5 | — |
| " | 17 | 2 | 20 | 2 | — | 4 | 20 |
| " | 18 | 1 | 55 | — | 50 | 2 | 45 |
| " | 19 | 4 | 15 | 3 | 45 | 8 | — |
| " | 20 | 4 | — | 3 | 50 | 7 | 50 |
| " | 21 | 1 | 55 | 3 | 40 | 5 | 35 |
| " | 22 | 3 | — | — | 30 | 3 | 30 |
| " | 23 | 1 | 25 | 2 | 15 | 3 | 40 |
| " | 24 | — | 10 | 2 | 45 | 2 | 55 |
| " | 25 | — | — | 1 | 15 | 1 | 15 |
| " | 26 | 3 | — | 2 | 25 | 5 | 25 |
| " | 27 | 1 | 20 | 3 | 45 | 5 | 5 |
| " | 28 | 1 | 5 | 3 | 25 | 4 | 30 |
| " | 29 | 1 | 45 | 3 | 30 | 5 | 15 |
| " | 30 | 2 | 40 | 1 | 30 | 4 | 10 |
| Juillet | 1 | 3 | 55 | 4 | — | 7 | 55 |
| " | 2 | 1 | 40 | 1 | — | 2 | 40 |
| " | 3 | — | 45 | 1 | 5 | 1 | 50 |
| " | 4 | 2 | — | 2 | 10 | 4 | 10 |
| " | 5 | 1 | 55 | 3 | 45 | 5 | 40 |
| " | 6 | 2 | 20 | 2 | 55 | 5 | 15 |
| " | 7 | 3 | 35 | 3 | — | 6 | 35 |
| " | 8 | 2 | 10 | 2 | 55 | 5 | 5 |
| " | 9 | — | 55 | 1 | 5 | 2 | — |
| " | 10 | — | 40 | — | 15 | — | 55 |
| Total. | **40** | **75** | **30** | **91** | **10** | ***166*** | **40** |

# INSOLATION

en $\frac{\text{heures}}{\text{minutes}}$

# TERRAIN DÉCOUVERT.

| s. | Date. | Avant-midi. | | Après-midi. | | Total en 24 heures. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | heures. | min. | heures. | min. | heures. | min. |
| n. | 1 | 3 | 15 | 4 | — | 7 | 15 |
| | 2 | — | — | 3 | 55 | 3 | 55 |
| | 3 | 4 | 45 | — | — | 4 | 45 |
| | 4 | — | — | 3 | — | 3 | — |
| | 5 | 2 | 25 | 3 | 5 | 5 | 30 |
| | 6 | 3 | 5 | 3 | 45 | 6 | 50 |
| | 7 | 2 | 20 | 2 | 40 | 5 | — |
| | 8 | — | — | 3 | 15 | 3 | 15 |
| | 9 | 1 | 30 | 2 | 45 | 4 | 15 |
| | 10 | 2 | 25 | 2 | 45 | 5 | 10 |
| | 11 | 2 | — | 2 | 45 | 4 | 45 |
| | 12 | 2 | 35 | 3 | 20 | 5 | 55 |
| | 13 | 1 | 45 | 3 | 15 | 5 | — |
| | 14 | 2 | 35 | 5 | 5 | 7 | 40 |
| | 15 | 5 | 10 | 4 | 20 | 9 | 30 |
| | 16 | 5 | 15 | 2 | 10 | 7 | 25 |
| | 17 | 3 | 15 | 2 | 55 | 6 | 10 |
| | 18 | 2 | 40 | 1 | 15 | 3 | 55 |
| | 19 | 5 | 5 | 4 | 40 | 9 | 45 |
| | 20 | 5 | 10 | 4 | 20 | 9 | 30 |
| | 21 | 2 | 45 | 4 | 30 | 7 | 15 |
| | 22 | 4 | 5 | — | 50 | 4 | 55 |
| | 23 | 2 | 5 | 3 | 25 | 5 | 30 |
| | 24 | — | 30 | 3 | 50 | 4 | 20 |
| | 25 | — | — | 2 | 5 | 2 | 5 |
| | 26 | 4 | 10 | 3 | 5 | 7 | 15 |
| | 27 | 2 | 10 | 5 | — | 7 | 10 |
| | 28 | 2 | — | 4 | 5 | 6 | 5 |
| | 29 | 2 | 35 | 4 | 20 | 6 | 55 |
| | 30 | 4 | 5 | 2 | 10 | 6 | 15 |
| illet. | 1 | 4 | 50 | 4 | 55 | 9 | 45 |
| | 2 | 2 | — | 1 | 30 | 3 | 30 |
| | 3 | 1 | 20 | 1 | 45 | 3 | 5 |
| | 4 | 2 | 55 | 3 | — | 5 | 55 |
| | 5 | 3 | — | 4 | 35 | 7 | 35 |
| | 6 | 3 | 10 | 4 | 5 | 7 | 15 |
| | 7 | 4 | 30 | 3 | 45 | 8 | 15 |
| | 8 | 3 | 20 | 3 | 40 | 7 | — |
| | 9 | 1 | 40 | 1 | 55 | 3 | 35 |
| | 10 | 1 | — | — | 40 | 1 | 40 |
| tal. | 40 | 107 | 25 | 126 | 25 | *233* | *50* |

TABLEAU II.

# QUANTITÉ DE PLUIE.

# QUANTITÉ DE PLUIE

en mM.

# TERRAIN COUVERT.

| Mois. | Date. | Avant-midi. | | | Après-midi. | | | Total en 9 heures. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 6 h. | 9 h. | 11 h. | 1 h. | 3 h. | 5 h. | |
| Avril. | 22 | | | | | | | |
| " | 23 | | | | | | | |
| " | 24 | | | | | | | |
| " | 25 | | | | | | | |
| " | 26 | 2,4 | | | | | | 2,4 |
| " | 27 | | | | | | | |
| " | 28 | 1,0 | | | | | 11,0 | 12,0 |
| " | 29 | | | | | | | |
| " | 30 | | | | | | | |
| Mai. | 1 | 6,3 | | | | | | 6,3 |
| " | 2 | 6,6 | | | | | | 6,6 |
| " | 3 | | | | | | | |
| " | 4 | | | | | | | |
| " | 5 | | | | | | | |
| " | 6 | | | | | | | |
| " | 7 | | | | | | | |
| " | 8 | | | | | | | |
| " | 9 | | | | | | 1,6 | 1,6 |
| " | 10 | | | | | | | |
| " | 11 | | | | | | | |
| " | 12 | | | | | | | |
| " | 13 | | | | | 2,8 | | 2,8 |
| " | 14 | 23,4 | | | | | 9,6 | 33,0 |
| " | 15 | | | | | | | |
| " | 16 | 10,4 | | | | | | 10,4 |
| " | 17 | 8,0 | | | | | | 8,0 |
| " | 18 | | | | | | | |
| " | 19 | | | | | | | |
| " | 20 | | | | | | | |
| " | 21 | | | | | | | |
| " | 22 | | | | | | | |
| " | 23 | | | | | | | |
| " | 24 | 21,2 | | | | | | 21,2 |
| " | 25 | | | | | | | |
| " | 26 | | | | | | | |
| " | 27 | 17,1 | | | | | | 17,1 |
| " | 28 | | | | | | | |
| " | 29 | 21,0 | | | | | | 21,0 |
| " | 30 | | | | | | | |
| " | 31 | 76,4 | | | | | | 76,4 |
| Total. | 40 | 193,8 | | | | 2,8 | 22,2 | *218,8* |

# QUANTITÉ DE PLUIE

en mM.

# TERRAIN DÉCOUVERT.

| Mois. | Date. | Avant-midi. | | | Après-midi. | | | Total en 24 heures. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 6 h. | 9 h. | 11 h. | 1 h. | 3 h. | 5 h. | |
| Avril. | 22 | | | | | | | |
| » | 23 | | | | | | | |
| » | 24 | | | | | | | |
| » | 25 | | | | | | | |
| » | 26 | 3,2 | | | | | | **3,2** |
| » | 27 | | | | | | | |
| » | 28 | 1,4 | | | | | 12,5 | **13,9** |
| » | 29 | | | | | | | |
| » | 30 | | | | | | | |
| Mai. | 1 | 6,8 | | | | | | **6,8** |
| » | 2 | 7,4 | | | | | | **7,4** |
| » | 3 | | | | | | | |
| » | 4 | | | | | | | |
| » | 5 | | | | | | | |
| » | 6 | | | | | | | |
| » | 7 | | | | | | | |
| » | 8 | | | | | | | |
| » | 9 | | | | | | 1,8 | **1,8** |
| » | 10 | | | | | | | |
| » | 11 | | | | | | | |
| » | 12 | | | | | | | |
| » | 13 | | | | | 3,2 | | **3,2** |
| » | 14 | 25,8 | | | | | 10,8 | **36,6** |
| » | 15 | | | | | | | |
| » | 16 | 11,6 | | | | | | **11,6** |
| » | 17 | 8,8 | | | | | | **8,8** |
| » | 18 | | | | | | | |
| » | 19 | | | | | | | |
| » | 20 | | | | | | | |
| » | 21 | | | | | | | |
| » | 22 | | | | | | | |
| » | 23 | | | | | | | |
| » | 24 | 22,6 | | | | | | **22,6** |
| » | 25 | | | | | | | |
| » | 26 | | | | | | | |
| » | 27 | 18,0 | | | | | | **18,0** |
| » | 28 | | | | | | | |
| » | 29 | 23,2 | | | | | | **23,2** |
| » | 30 | | | | | | | |
| » | 31 | 84,0 | | | | | | **84,0** |
| Total. | **40** | **212,8** | | | | **3,2** | **25,1** | ***241,1*** |

# QUANTITÉ DE PLUIE

en mM.

# TERRAIN COUVERT.

| Mois. | Date. | Avant-midi. | | | Après-midi. | | | Total en heures |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 6 h. | 9 h. | 11 h. | 1 h. | 3 h. | 5 h. | |
| Juin. | 1 | | | | | | | |
| " | 2 | 2,2 | | | | | | 2,2 |
| " | 3 | 2,0 | | | | | | 2,0 |
| " | 4 | | | | | | | |
| " | 5 | | | | | | | |
| " | 6 | 11,3 | | | | | | 11,3 |
| " | 7 | | | | | | | |
| " | 8 | | | | | | | |
| " | 9 | | | | | | | |
| " | 10 | 0,5 | | | | | 12.3 | 12,8 |
| " | 11 | | | | | | 4,1 | 4,1 |
| " | 12 | 4,2 | | | | | | 4,2 |
| " | 13 | | | | | | | |
| " | 14 | | | | | | | |
| " | 15 | 21,3 | | | | | | 21,3 |
| " | 16 | 12,1 | | | | | | 12,1 |
| " | 17 | | | | | | | |
| " | 18 | | | | | | | |
| " | 19 | | | | | | | |
| " | 20 | 2,3 | | | | | | 2,3 |
| " | 21 | | | | | | | |
| " | 22 | | | | | | | |
| " | 23 | 5,2 | | | | | | 5,2 |
| " | 24 | | | | | | | |
| " | 25 | 8,0 | | 4,0 | | | | 12,0 |
| " | 26 | | | | | | | |
| " | 27 | | | | | | | |
| " | 28 | | | | | | | |
| " | 29 | | | | | | | |
| " | 30 | 0,6 | | | | | | 0,6 |
| Juillet. | 1 | | | | | | | |
| " | 2 | | | | | | | |
| " | 3 | | | | | | | |
| " | 4 | | | | | | | |
| " | 5 | | | | | | | |
| " | 6 | | | | | | | |
| " | 7 | | | | | | | |
| " | 8 | | | | | | | |
| " | 9 | 35,6 | | | | | | 35,6 |
| " | 10 | | | | | | | |
| Total. | **40** | **105,3** | | **4,0** | | | **16,4** | *125,7* |

# QUANTITÉ DE PLUIE

en mM.

# TERRAIN DÉCOUVERT.

| ois. | Date. | Avant-midi. | | | Après-midi. | | | Total en 24 heures. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 6 h. | 9 h. | 11 h. | 1 h. | 3 h. | 5 h. | |
| in. | 1 | | | | | | | |
| . | 2 | 2,8 | | | | | | **2,8** |
| . | 3 | 2,5 | | | | | | **2,5** |
| . | 4 | | | | | | | |
| . | 5 | | | | | | | |
| . | 6 | 13,0 | | | | | | **13,0** |
| . | 7 | | | | | | | |
| . | 8 | | | | | | | |
| . | 9 | | | | | | | |
| . | 10 | 1,0 | | | | | 14,1 | **15,1** |
| . | 11 | | | | | | 5,2 | **5,2** |
| . | 12 | 5,4 | | | | | | **5,4** |
| . | 13 | | | | | | | |
| . | 14 | | | | | | | |
| . | 15 | 24,3 | | | | | | **24,3** |
| . | 16 | 13,8 | | | | | | **13,8** |
| . | 17 | | | | | | | |
| . | 18 | | | | | | | |
| . | 19 | | | | | | | |
| . | 20 | 3,3 | | | | | | **3,3** |
| . | 21 | | | | | | | |
| . | 22 | | | | | | | |
| . | 23 | 6,1 | | | | | | **6,1** |
| . | 24 | | | | | | | |
| . | 25 | 9,2 | | 4,5 | | | | **13,7** |
| . | 26 | | | | | | | |
| . | 27 | | | | | | | |
| . | 28 | | | | | | | |
| . | 29 | | | | | | | |
| . | 30 | 1,0 | | | | | | **1,0** |
| llet. | 1 | | | | | | | |
| . | 2 | | | | | | | |
| . | 3 | | | | | | | |
| . | 4 | | | | | | | |
| . | 5 | | | | | | | |
| . | 6 | | | | | | | |
| . | 7 | | | | | | | |
| . | 8 | | | | | | | |
| . | 9 | 41,0 | | | | | | **41,0** |
| . | 10 | | | | | | | |
| tal. | **40** | **123,4** | | **4,5** | | | **19,3** | *147,2* |

# INSOLATION

en $\frac{\text{heures}}{\text{minutes}}$

# TERRAIN COUVERT.

| Mois. | Date. | Avant-midi. | | Après-midi. | | Total en 24 heure | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | heures. | min. | heures. | min. | heures. | min. |
| Avril. | 22 | 1 | 55 | 1 | 25 | 3 | 20 |
| " | 23 | — | 55 | — | — | — | 55 |
| " | 24 | — | 30 | 2 | 20 | 2 | 50 |
| " | 25 | 2 | 55 | 3 | 45 | 6 | 40 |
| " | 26 | — | — | — | 15 | — | 15 |
| " | 27 | 2 | 50 | 3 | 45 | 6 | 35 |
| " | 28 | 3 | 35 | 1 | 5 | 4 | 40 |
| " | 29 | — | — | 2 | 30 | 2 | 30 |
| " | 30 | 2 | 45 | 1 | 50 | 4 | 35 |
| Mai. | 1 | 2 | 55 | 1 | 30 | 4 | 25 |
| " | 2 | 1 | — | — | 10 | 1 | 10 |
| " | 3 | — | 30 | — | 15 | — | 45 |
| " | 4 | 3 | — | 3 | 35 | 6 | 35 |
| " | 5 | 2 | 40 | 3 | 10 | 5 | 50 |
| " | 6 | — | 15 | — | 45 | 1 | — |
| " | 7 | 4 | 20 | 4 | — | 8 | 20 |
| " | 8 | — | 55 | — | 35 | 1 | 30 |
| " | 9 | 1 | 15 | — | 25 | 1 | 40 |
| " | 10 | 2 | 10 | 2 | 25 | 4 | 35 |
| " | 11 | — | — | — | 40 | — | 40 |
| " | 12 | 1 | 25 | 2 | 45 | 4 | 10 |
| " | 13 | 3 | 5 | — | 50 | 3 | 55 |
| " | 14 | 3 | 35 | 2 | — | 5 | 35 |
| " | 15 | 2 | 55 | 2 | 10 | 5 | 5 |
| " | 16 | — | 15 | 1 | — | 1 | 15 |
| " | 17 | — | — | 2 | 30 | 2 | 30 |
| " | 18 | 2 | 50 | 3 | 25 | 6 | 15 |
| " | 19 | 2 | — | 3 | 10 | 5 | 10 |
| " | 20 | 3 | 55 | 3 | 5 | 7 | — |
| " | 21 | — | — | — | 10 | — | 10 |
| " | 22 | — | 25 | — | 40 | 1 | 5 |
| " | 23 | 2 | 40 | 3 | 20 | 6 | — |
| " | 24 | 1 | — | 1 | 45 | 2 | 45 |
| " | 25 | 3 | 15 | 3 | — | 6 | 15 |
| " | 26 | 2 | 45 | 3 | 45 | 6 | 30 |
| " | 27 | 3 | 5 | 3 | 35 | 6 | 40 |
| " | 28 | 3 | 25 | 2 | 20 | 5 | 45 |
| " | 29 | 1 | 35 | 2 | 30 | 4 | 5 |
| " | 30 | 3 | 30 | 3 | 15 | 6 | 45 |
| " | 31 | — | — | — | — | — | — |
| Total. | 40 | 76 | 5 | 79 | 40 | *155* | 45 |

TABLEAU III.

# TEMPÉRATURE DE L'AIR.

# INSOLATION

en $\frac{\text{heures}}{\text{minutes}}$

# TERRAIN COUVERT.

| Mois. | Date. | Avant-midi. | | Après-midi. | | Total en 24 heu | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | heures. | min. | heures. | min. | heures. | mi |
| Juin. | 1 | 2 | 20 | 3 | — | 5 | 2 |
| " | 2 | — | — | 2 | 10 | 2 | 1 |
| " | 3 | 3 | — | — | — | 3 | - |
| " | 4 | — | — | 1 | 15 | 1 | 1 |
| " | 5 | 1 | 30 | 2 | 15 | 3 | 4 |
| " | 6 | 2 | 10 | 3 | — | 5 | 1 |
| " | 7 | 1 | 40 | 1 | 30 | 3 | 1 |
| " | 8 | — | — | 1 | 45 | 1 | 4 |
| " | 9 | — | 40 | 1 | 20 | 2 | - |
| " | 10 | 1 | 40 | 1 | 45 | 3 | 2 |
| " | 11 | 1 | 15 | 1 | 55 | 3 | 1 |
| " | 12 | 1 | 50 | 2 | 30 | 4 | 2 |
| " | 13 | 1 | — | 2 | 5 | 3 | |
| " | 14 | 1 | 50 | 4 | — | 5 | 5 |
| " | 15 | 4 | — | 3 | 55 | 7 | 5 |
| " | 16 | 3 | 50 | 1 | 10 | 5 | - |
| " | 17 | 2 | 20 | 2 | — | 4 | 2 |
| " | 18 | 1 | 55 | — | 50 | 2 | 4 |
| " | 19 | 4 | 15 | 3 | 45 | 8 | - |
| " | 20 | 4 | — | 3 | 50 | 7 | 5 |
| " | 21 | 1 | 55 | 3 | 40 | 5 | 3 |
| " | 22 | 3 | — | — | 30 | 3 | 3 |
| " | 23 | 1 | 25 | 2 | 15 | 3 | 4 |
| " | 24 | — | 10 | 2 | 45 | 2 | 5 |
| " | 25 | — | — | 1 | 15 | 1 | 1 |
| " | 26 | 3 | — | 2 | 25 | 5 | 2 |
| " | 27 | 1 | 20 | 3 | 45 | 5 | |
| " | 28 | 1 | 5 | 3 | 25 | 4 | 3 |
| " | 29 | 1 | 45 | 3 | 30 | 5 | 1 |
| " | 30 | 2 | 40 | 1 | 30 | 4 | 1 |
| Juillet | 1 | 3 | 55 | 4 | — | 7 | 5 |
| " | 2 | 1 | 40 | 1 | — | 2 | 4 |
| " | 3 | — | 45 | 1 | 5 | 1 | 5 |
| " | 4 | 2 | — | 2 | 10 | 4 | 1 |
| " | 5 | 1 | 55 | 3 | 45 | 5 | 4 |
| " | 6 | 2 | 20 | 2 | 55 | 5 | 1 |
| " | 7 | 3 | 35 | 3 | – | 6 | 3 |
| " | 8 | 2 | 10 | 2 | 55 | 5 | |
| " | 9 | — | 55 | 1 | 5 | 2 | - |
| " | 10 | — | 40 | — | 15 | — | 5 |
| Total. | **40** | **75** | **30** | **91** | **10** | ***166*** | 4 |

# INSOLATION

en $\frac{\text{heures}}{\text{minutes}}$

# TERRAIN DÉCOUVERT.

| is. | Date. | Avant-midi. | | Après-midi. | | Total en 24 heures. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | heures. | min. | heures. | min. | heures. | min. |
| in. | 1 | 3 | 15 | 4 | — | 7 | 15 |
| » | 2 | — | — | 3 | 55 | 3 | 55 |
| » | 3 | 4 | 45 | — | — | 4 | 45 |
| » | 4 | — | — | 3 | — | 3 | — |
| » | 5 | 2 | 25 | 3 | 5 | 5 | 30 |
| » | 6 | 3 | 5 | 3 | 45 | 6 | 50 |
| » | 7 | 2 | 20 | 2 | 40 | 5 | — |
| » | 8 | — | — | 3 | 15 | 3 | 15 |
| » | 9 | 1 | 30 | 2 | 45 | 4 | 15 |
| » | 10 | 2 | 25 | 2 | 45 | 5 | 10 |
| » | 11 | 2 | — | 2 | 45 | 4 | 45 |
| » | 12 | 2 | 35 | 3 | 20 | 5 | 55 |
| » | 13 | 1 | 45 | 3 | 15 | 5 | — |
| » | 14 | 2 | 35 | 5 | 5 | 7 | 40 |
| » | 15 | 5 | 10 | 4 | 20 | 9 | 30 |
| » | 16 | 5 | 15 | 2 | 10 | 7 | 25 |
| » | 17 | 3 | 15 | 2 | 55 | 6 | 10 |
| » | 18 | 2 | 40 | 1 | 15 | 3 | 55 |
| » | 19 | 5 | 5 | 4 | 40 | 9 | 45 |
| » | 20 | 5 | 10 | 4 | 20 | 9 | 30 |
| » | 21 | 2 | 45 | 4 | 30 | 7 | 15 |
| » | 22 | 4 | 5 | — | 50 | 4 | 55 |
| » | 23 | 2 | 5 | 3 | 25 | 5 | 30 |
| » | 24 | — | 30 | 3 | 50 | 4 | 20 |
| » | 25 | — | — | 2 | 5 | 2 | 5 |
| » | 26 | 4 | 10 | 3 | 5 | 7 | 15 |
| » | 27 | 2 | 10 | 5 | — | 7 | 10 |
| » | 28 | 2 | — | 4 | 5 | 6 | 5 |
| » | 29 | 2 | 35 | 4 | 20 | 6 | 55 |
| » | 30 | 4 | 5 | 2 | 10 | 6 | 15 |
| llet. | 1 | 4 | 50 | 4 | 55 | 9 | 45 |
| » | 2 | 2 | — | 1 | 30 | 3 | 30 |
| » | 3 | 1 | 20 | 1 | 45 | 3 | 5 |
| » | 4 | 2 | 55 | 3 | — | 5 | 55 |
| » | 5 | 3 | — | 4 | 35 | 7 | 35 |
| » | 6 | 3 | 10 | 4 | 5 | 7 | 15 |
| » | 7 | 4 | 30 | 3 | 45 | 8 | 15 |
| » | 8 | 3 | 20 | 3 | 40 | 7 | — |
| » | 9 | 1 | 40 | 1 | 55 | 3 | 35 |
| » | 10 | 1 | — | — | 40 | 1 | 40 |
| tal. | 40 | 107 | 25 | 126 | 25 | *233* | *50* |

# INSOLATION

en $\frac{\text{heures}}{\text{minutes}}$

# TERRAIN COUVERT.

| Mois. | Date. | Avant-midi. | | Après-midi. | | Total en 24 heur | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | heures. | min. | heures. | min. | heures. | mi |
| Juin. | 1 | 2 | 20 | 3 | — | 5 | 2 |
| " | 2 | — | — | 2 | 10 | 2 | 1 |
| " | 3 | 3 | — | — | — | 3 | – |
| " | 4 | — | — | 1 | 15 | 1 | 1 |
| " | 5 | 1 | 30 | 2 | 15 | 3 | 4 |
| " | 6 | 2 | 10 | 3 | — | 5 | 1 |
| " | 7 | 1 | 40 | 1 | 30 | 3 | 1 |
| " | 8 | — | — | 1 | 45 | 1 | 4 |
| " | 9 | — | 40 | 1 | 20 | 2 | – |
| " | 10 | 1 | 40 | 1 | 45 | 3 | 2 |
| " | 11 | 1 | 15 | 1 | 55 | 3 | 1 |
| " | 12 | 1 | 50 | 2 | 30 | 4 | 2 |
| " | 13 | 1 | — | 2 | 5 | 3 | 1 |
| " | 14 | 1 | 50 | 4 | — | 5 | 5 |
| " | 15 | 4 | — | 3 | 55 | 7 | 5 |
| " | 16 | 3 | 50 | 1 | 10 | 5 | – |
| " | 17 | 2 | 20 | 2 | — | 4 | 2 |
| " | 18 | 1 | 55 | — | 50 | 2 | 4 |
| " | 19 | 4 | 15 | 3 | 45 | 8 | – |
| " | 20 | 4 | — | 3 | 50 | 7 | 5 |
| " | 21 | 1 | 55 | 3 | 40 | 5 | 3 |
| " | 22 | 3 | — | — | 30 | 3 | 3 |
| " | 23 | 1 | 25 | 2 | 15 | 3 | 4 |
| " | 24 | — | 10 | 2 | 45 | 2 | 5 |
| " | 25 | — | — | 1 | 15 | 1 | 1 |
| " | 26 | 3 | — | 2 | 25 | 5 | 2 |
| " | 27 | 1 | 20 | 3 | 45 | 5 | 1 |
| " | 28 | 1 | 5 | 3 | 25 | 4 | 3 |
| " | 29 | 1 | 45 | 3 | 30 | 5 | 1 |
| " | 30 | 2 | 40 | 1 | 30 | 4 | 1 |
| Juillet | 1 | 3 | 55 | 4 | — | 7 | 5 |
| " | 2 | 1 | 40 | 1 | — | 2 | 4 |
| " | 3 | — | 45 | 1 | 5 | 1 | 5 |
| " | 4 | 2 | — | 2 | 10 | 4 | 1 |
| " | 5 | 1 | 55 | 3 | 45 | 5 | 4 |
| " | 6 | 2 | 20 | 2 | 55 | 5 | 1 |
| " | 7 | 3 | 35 | 3 | – | 6 | 3 |
| " | 8 | 2 | 10 | 2 | 55 | 5 | 1 |
| " | 9 | — | 55 | 1 | 5 | 2 | – |
| " | 10 | — | 40 | — | 15 | — | 5 |
| Total. | **40** | **75** | **30** | **91** | **10** | ***166*** | 4 |

# INSOLATION

en $\frac{\text{heures}}{\text{minutes}}$

# TERRAIN DÉCOUVERT.

| | Date. | Avant-midi. | | Après-midi. | | Total en 24 heures. | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | heures. | min. | heures. | min. | heures. | min. |
| | 1 | 3 | 15 | 4 | — | 7 | 15 |
| | 2 | — | — | 3 | 55 | 3 | 55 |
| | 3 | 4 | 45 | — | — | 4 | 45 |
| | 4 | — | — | 3 | — | 3 | — |
| | 5 | 2 | 25 | 3 | 5 | 5 | 30 |
| | 6 | 3 | 5 | 3 | 45 | 6 | 50 |
| | 7 | 2 | 20 | 2 | 40 | 5 | — |
| | 8 | — | — | 3 | 15 | 3 | 15 |
| | 9 | 1 | 30 | 2 | 45 | 4 | 15 |
| | 10 | 2 | 25 | 2 | 45 | 5 | 10 |
| | 11 | 2 | — | 2 | 45 | 4 | 45 |
| | 12 | 2 | 35 | 3 | 20 | 5 | 55 |
| | 13 | 1 | 45 | 3 | 15 | 5 | — |
| | 14 | 2 | 35 | 5 | 5 | 7 | 40 |
| | 15 | 5 | 10 | 4 | 20 | 9 | 30 |
| | 16 | 5 | 15 | 2 | 10 | 7 | 25 |
| | 17 | 3 | 15 | 2 | 55 | 6 | 10 |
| | 18 | 2 | 40 | 1 | 15 | 3 | 55 |
| | 19 | 5 | 5 | 4 | 40 | 9 | 45 |
| | 20 | 5 | 10 | 4 | 20 | 9 | 30 |
| | 21 | 2 | 45 | 4 | 30 | 7 | 15 |
| | 22 | 4 | 5 | — | 50 | 4 | 55 |
| | 23 | 2 | 5 | 3 | 25 | 5 | 30 |
| | 24 | — | 30 | 3 | 50 | 4 | 20 |
| | 25 | — | — | 2 | 5 | 2 | 5 |
| | 26 | 4 | 10 | 3 | 5 | 7 | 15 |
| | 27 | 2 | 10 | 5 | — | 7 | 10 |
| | 28 | 2 | — | 4 | 5 | 6 | 5 |
| | 29 | 2 | 35 | 4 | 20 | 6 | 55 |
| | 30 | 4 | 5 | 2 | 10 | 6 | 15 |
| llet. | 1 | 4 | 50 | 4 | 55 | 9 | 45 |
| | 2 | 2 | — | 1 | 30 | 3 | 30 |
| | 3 | 1 | 20 | 1 | 45 | 3 | 5 |
| | 4 | 2 | 55 | 3 | — | 5 | 55 |
| | 5 | 3 | — | 4 | 35 | 7 | 35 |
| | 6 | 3 | 10 | 4 | 5 | 7 | 15 |
| | 7 | 4 | 30 | 3 | 45 | 8 | 15 |
| | 8 | 3 | 20 | 3 | 40 | 7 | — |
| | 9 | 1 | 40 | 1 | 55 | 3 | 35 |
| | 10 | 1 | — | — | 40 | 1 | 40 |
| Total. | 40 | 107 | 25 | 126 | 25 | 233 | 50 |

TABLEAU II.

# QUANTITÉ DE PLUIE.

# QUANTITÉ DE PLUIE

en mM.

# TERRAIN COUVERT.

| Mois. | Date. | Avant-midi. | | | Après-midi. | | | Total d heur |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 6 h. | 9 h. | 11 h. | 1 h. | 3 h. | 5 h. | |
| Avril. | 22 | | | | | | | |
| " | 23 | | | | | | | |
| " | 24 | | | | | | | |
| " | 25 | | | | | | | |
| " | 26 | 2,4 | | | | | | 2, |
| " | 27 | | | | | | | |
| " | 28 | 1,0 | | | | | 11,0 | 12, |
| " | 29 | | | | | | | |
| " | 30 | | | | | | | |
| Mai. | 1 | 6,3 | | | | | | 6, |
| " | 2 | 6,6 | | | | | | 6, |
| " | 3 | | | | | | | |
| " | 4 | | | | | | | |
| " | 5 | | | | | | | |
| " | 6 | | | | | | | |
| " | 7 | | | | | | | |
| " | 8 | | | | | | | |
| " | 9 | | | | | | 1,6 | 1, |
| " | 10 | | | | | | | |
| " | 11 | | | | | | | |
| " | 12 | | | | | | | |
| " | 13 | | | | | 2,8 | | 2, |
| " | 14 | 23,4 | | | | | 9,6 | 33, |
| " | 15 | | | | | | | |
| " | 16 | 10,4 | | | | | | 10, |
| " | 17 | 8,0 | | | | | | 8, |
| " | 18 | | | | | | | |
| " | 19 | | | | | | | |
| " | 20 | | | | | | | |
| " | 21 | | | | | | | |
| " | 22 | | | | | | | |
| " | 23 | | | | | | | |
| " | 24 | 21,2 | | | | | | 21, |
| " | 25 | | | | | | | |
| " | 26 | | | | | | | |
| " | 27 | 17,1 | | | | | | 17,1 |
| " | 28 | | | | | | | |
| " | 29 | 21,0 | | | | | | 21,0 |
| " | 30 | | | | | | | |
| " | 31 | 76,4 | | | | | | 76,4 |
| Total. | 40 | 193,8 | | | | 2,8 | 22,2 | 218,8 |

# QUANTITÉ DE PLUIE

en mM.

# TERRAIN DÉCOUVERT.

| is. | Date. | Avant-midi. | | | Après-midi. | | | Total en 24 heures. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 6 h. | 9 h. | 11 h. | 1 h. | 3 h. | 5 h. | |
| ril. | 22 | | | | | | | |
| » | 23 | | | | | | | |
| » | 24 | | | | | | | |
| » | 25 | | | | | | | |
| » | 26 | 3,2 | | | | | | **3,2** |
| » | 27 | | | | | | | |
| » | 28 | 1,4 | | | | | 12,5 | **13,9** |
| » | 29 | | | | | | | |
| » | 30 | | | | | | | |
| ai. | 1 | 6,8 | | | | | | **6,8** |
| » | 2 | 7,4 | | | | | | **7,4** |
| » | 3 | | | | | | | |
| » | 4 | | | | | | | |
| » | 5 | | | | | | | |
| » | 6 | | | | | | | |
| » | 7 | | | | | | | |
| » | 8 | | | | | | | |
| » | 9 | | | | | | 1,8 | **1,8** |
| » | 10 | | | | | | | |
| » | 11 | | | | | | | |
| » | 12 | | | | | | | |
| » | 13 | | | | | 3,2 | | **3,2** |
| » | 14 | 25,8 | | | | | 10,8 | **36,6** |
| » | 15 | | | | | | | |
| » | 16 | 11,6 | | | | | | **11,6** |
| » | 17 | 8,8 | | | | | | **8,8** |
| » | 18 | | | | | | | |
| » | 19 | | | | | | | |
| » | 20 | | | | | | | |
| » | 21 | | | | | | | |
| » | 22 | | | | | | | |
| » | 23 | | | | | | | |
| » | 24 | 22,6 | | | | | | **22,6** |
| » | 25 | | | | | | | |
| » | 26 | | | | | | | |
| » | 27 | 18,0 | | | | | | **18,0** |
| » | 28 | | | | | | | |
| » | 29 | 23,2 | | | | | | **23,2** |
| » | 30 | | | | | | | |
| » | 31 | 84,0 | | | | | | **84,0** |
| otal. | **40** | **212,8** | | | | **3,2** | **25,1** | ***241,1*** |

# TEMPÉRATURE DE L'AIR

en °C.

# TERRAIN DÉCOUVERT.

| Mois. | Date. | THERMOMÈTRE SEC. | | | | | | Mo par |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Avant-midi. | | | Après-midi. | | | |
| | | 6 h. | 9 h. | 11 h. | 1 h. | 3 h. | 5 h. | |
| Avril. | 22 | 21,4 | 28,4 | 33,0 | 32,8 | 34,2 | 29,4 | 3 |
| " | 23 | 21,8 | 29,0 | 33,2 | 34,2 | 32.0 | 28,8 | 3 |
| " | 24 | 21,6 | 27,2 | 28,8 | 33,6 | 32,4 | 29,8 | 2 |
| " | 25 | 22,6 | 31,4 | 32,4 | 35,6 | 33,0 | 30,2 | 1 |
| " | 26 | 22,4 | 23,0 | 24,6 | 27,4 | 30,2 | 28,0 | 2 |
| " | 27 | 21,2 | 30,4 | 33,4 | 34,8 | 32,6 | 30,0 | 3 |
| " | 28 | 21,2 | 28,2 | 30,0 | 33,2 | 26,8 | 25,6 | 2 |
| " | 29 | 22,0 | 26,4 | 28,0 | 30,4 | 30,6 | 28,6 | 2 |
| " | 30 | 22,6 | 28,0 | 33,6 | 32,4 | 31,4 | 29,6 | 2 |
| Mai. | 1 | 22,4 | 29,2 | 32,4 | 32,6 | 31,8 | 28,6 | 2 |
| " | 2 | 22,0 | 25,6 | 29,0 | 30.2 | 29,6 | 28,0 | 2 |
| " | 3 | 22,8 | 27,4 | 29,2 | 32,0 | 30,4 | 28,8 | 2 |
| " | 4 | 21,4 | 28,2 | 30,6 | 35,0 | 32,2 | 30,0 | 2 |
| " | 5 | 22,0 | 29,2 | 31,6 | 33,4 | 31,8 | 29,2 | 2 |
| " | 6 | 21,6 | 26,2 | 28,4 | 31,6 | 30,4 | 29,0 | 2 |
| " | 7 | 21,0 | 29,2 | 32,8 | 34,6 | 32,6 | 30,0 | 3 |
| " | 8 | 21,6 | 29,0 | 31,4 | 32,4 | 30,6 | 28,6 | 2 |
| " | 9 | 21,2 | 28,6 | 32,2 | 30,6 | 26,8 | 24,6 | 2 |
| " | 10 | 21,0 | 29,8 | 32,0 | 32,8 | 30,4 | 28,8 | 2 |
| " | 11 | 21,6 | 27,6 | 31,4 | 30,2 | 30,4 | 29,0 | 2 |
| " | 12 | 21,2 | 28.6 | 32,4 | 35,2 | 33,2 | 30,0 | 3 |
| " | 13 | 21,0 | 29,8 | 34,8 | 30,4 | 29.6 | 27,4 | 2 |
| " | 14 | 21,2 | 27,4 | 31,8 | 34,0 | 30,6 | 24,6 | 2 |
| " | 15 | 21,4 | 28,2 | 31,0 | 34,0 | 32,2 | 29,6 | 2 |
| " | 16 | 22,2 | 28,0 | 29,6 | 31,4 | 30,2 | 28,4 | 2 |
| " | 17 | 21,4 | 25,6 | 28,6 | 32,0 | 31,2 | 27,4 | 2 |
| " | 18 | 21,0 | 28,4 | 31,0 | 33,0 | 32,6 | 29,8 | 2 |
| " | 19 | 22,6 | 30,2 | 32,6 | 34,0 | 31,8 | 29,8 | 3 |
| " | 20 | 22,4 | 30,8 | 33,8 | 34,0 | 32,8 | 28,6 | 3 |
| " | 21 | 22,0 | 27,0 | 30,4 | 32,6 | 31,2 | 29,0 | 2 |
| " | 22 | 21,4 | 29,4 | 31,6 | 31,8 | 27,8 | 27,0 | 2 |
| " | 23 | 22,0 | 29,8 | 32,0 | 36,2 | 33,2 | 29,6 | 3 |
| " | 24 | 22,6 | 27,4 | 31,8 | 33,2 | 32 6 | 26,6 | 2 |
| " | 25 | 22,8 | 29,0 | 31,6 | 34,0 | 32,2 | 29,0 | 2 |
| " | 26 | 21,6 | 27,8 | 32,0 | 33,8 | 33,0 | 30,4 | 2 |
| " | 27 | 22,0 | 28,8 | 31,4 | 32,2 | 31,6 | 28,4 | 2 |
| " | 28 | 22,4 | 28,6 | 32,2 | 32,6 | 32,0 | 29,4 | 2 |
| " | 29 | 21,8 | 25,8 | 30,6 | 32,4 | 32,2 | 28,6 | 2 |
| " | 30 | 21,6 | 28,8 | 32,6 | 33,8 | 32,6 | 29,0 | 2 |
| " | 31 | 22,0 | 25,6 | 28,6 | 29,6 | 29,2 | 28,2 | 2 |
| **Moyenne.** | **40** | **21,80** | **28,18** | **31,21** | **32,75** | **31,30** | **28,64** | 29 |

# TEMPÉRATURE DE L'AIR

en °C.

# TERRAIN DÉCOUVERT.

| Mois. | Date. | THERMOMÈTRE HUMIDE. | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Avant-midi. | | | Après-midi. | | |
| | | 6 h. | 9 h. | 11 h. | 1 h. | 3 h. | 5 h. |
| Avril. | 22 | 21,2 | 25,0 | 26,2 | 26,2 | 26,6 | 25,4 |
| " | 23 | 21,6 | 25,2 | 26,8 | 28,2 | 25,8 | 25,6 |
| " | 24 | 21,4 | 24,8 | 25,6 | 26,4 | 25,6 | 26,0 |
| " | 25 | 22,4 | 26,6 | 26,4 | 27,2 | 25,4 | 25,2 |
| " | 26 | 22,2 | 22,2 | 23,4 | 24,6 | 25,4 | 25,2 |
| " | 27 | 21,0 | 26,4 | 26,6 | 28,2 | 26,4 | 25,8 |
| " | 28 | 20,8 | 25,0 | 25,2 | 26,6 | 25,4 | 24,8 |
| " | 29 | 21,8 | 24,8 | 25,4 | 26,4 | 26,6 | 25,0 |
| " | 30 | 22,0 | 24,8 | 27,0 | 25,8 | 25,6 | 25,0 |
| Mai. | 1 | 22,0 | 26,2 | 26,8 | 27,2 | 27,0 | 25,4 |
| " | 2 | 21,8 | 24,4 | 25,8 | 26,2 | 24,8 | 25,0 |
| " | 3 | 22,6 | 25,0 | 26,0 | 27,0 | 26,0 | 26,0 |
| " | 4 | 21,2 | 24,8 | 25,8 | 27,2 | 26,2 | 25,2 |
| " | 5 | 22,0 | 25,0 | 26,2 | 26,4 | 26,0 | 25,8 |
| " | 6 | 21,4 | 24,6 | 25,8 | 26,0 | 25,0 | 25,0 |
| " | 7 | 21,0 | 25,0 | 25,0 | 27,0 | 25,6 | 24,8 |
| " | 8 | 21,2 | 25,6 | 24,8 | 26,6 | 25,2 | 25,0 |
| " | 9 | 20,8 | 24,4 | 26,4 | 25,0 | 24,8 | 23,6 |
| " | 10 | 20,8 | 25,2 | 25,8 | 26,8 | 25,2 | 24,4 |
| " | 11 | 21,6 | 25,6 | 27,0 | 25,6 | 25,4 | 24,8 |
| " | 12 | 21,0 | 25,2 | 26,6 | 26,4 | 26,0 | 25,6 |
| " | 13 | 20,8 | 26,0 | 27,4 | 26,6 | 26,6 | 25,0 |
| " | 14 | 21,0 | 25,2 | 27,2 | 27,6 | 26,2 | 23,8 |
| " | 15 | 21,4 | 25,8 | 26,8 | 28,2 | 27,0 | 26,4 |
| " | 16 | 21,6 | 26,0 | 26,6 | 27,0 | 25,4 | 25,4 |
| " | 17 | 21,2 | 24,0 | 26,4 | 26,8 | 25,6 | 24,8 |
| " | 18 | 20,6 | 25,8 | 26,6 | 26,2 | 27,4 | 25,6 |
| " | 19 | 22,4 | 26,8 | 27,0 | 27,8 | 26,6 | 26,4 |
| " | 20 | 22,4 | 27,2 | 27,6 | 26,6 | 26,6 | 25,0 |
| " | 21 | 21,8 | 24,8 | 26,6 | 27,4 | 26,4 | 25,8 |
| " | 22 | 21,2 | 25,6 | 26,4 | 26,4 | 24,4 | 24,4 |
| " | 23 | 21,6 | 26,4 | 26,2 | 27,8 | 27,6 | 26,0 |
| " | 24 | 22,6 | 25,6 | 27,2 | 27,2 | 26,8 | 25,2 |
| " | 25 | 22,4 | 25,8 | 26,6 | 27,0 | 26,8 | 26,2 |
| " | 26 | 21,4 | 25,8 | 26,8 | 27,6 | 28,0 | 27,0 |
| " | 27 | 21,8 | 26,0 | 27,2 | 27,6 | 27,4 | 25,0 |
| " | 28 | 22,2 | 26,6 | 28,0 | 27,4 | 27,4 | 26,8 |
| " | 29 | 21,8 | 24,6 | 27,0 | 27,8 | 27,8 | 25,6 |
| " | 30 | 21,4 | 26,2 | 28,4 | 27,6 | 25,8 | 24,8 |
| " | 31 | 22,0 | 24,8 | 26,0 | 26,6 | 26,0 | 26,0 |
| Moyenne. | 40 | 21,34 | 25,37 | 26,42 | 26,86 | 26,15 | 25,35 |

# TEMPÉRATURE DE L'AIR

en ° C.

# TERRAIN DÉCOUVERT.

| Mois. | Date. | THERMOMÈTRE SEC. | | | | | | Moy par j |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Avant-midi. | | | Après-midi. | | | |
| | | 6 h. | 9 h. | 11 h. | 1 h. | 3 h. | 5 h. | |
| Juin. | 1 | 21,4 | 28,0 | 31,8 | 33,4 | 31,0 | 38,4 | 2 |
| " | 2 | 22,0 | 25,4 | 26,8 | 30,4 | 31,2 | 29,2 | 27 |
| " | 3 | 22,4 | 29,4 | 32,8 | 32,0 | 31,0 | 26,0 | 2 |
| " | 4 | 22,8 | 25,8 | 28,0 | 29,0 | 30,2 | 29,2 | 27 |
| " | 5 | 23,0 | 28,2 | 33,0 | 31,8 | 30,4 | 27,0 | 2 |
| " | 6 | 22,0 | 27,6 | 31,0 | 33,6 | 31,2 | 25,4 | 2 |
| " | 7 | 22,2 | 27,0 | 29,6 | 32,6 | 30,4 | 28,2 | 2 |
| " | 8 | 21,6 | 25,0 | 27,0 | 28,6 | 31,0 | 28,4 | 27 |
| " | 9 | 22,0 | 28,4 | 30,0 | 33,4 | 30,6 | 28,2 | 2 |
| " | 10 | 22,6 | 28,6 | 31,0 | 32,2 | 33,4 | 24,2 | 2 |
| " | 11 | 21,4 | 28,4 | 30,6 | 33,0 | 29,8 | 24,0 | 2 |
| " | 12 | 22,8 | 28,6 | 30,8 | 33,4 | 32,4 | 28,4 | 2 |
| " | 13 | 22,2 | 29,8 | 31,6 | 30,2 | 30,8 | 29,2 | 2 |
| " | 14 | 22,2 | 26,2 | 29,2 | 30,0 | 30,2 | 27,0 | 27 |
| " | 15 | 21,4 | 27,8 | 31,2 | 33,0 | 31,6 | 29,2 | 2 |
| " | 16 | 19,8 | 27,2 | 31,0 | 32,0 | 31,4 | 28,8 | 2 |
| " | 17 | 22,6 | 28,4 | 31,2 | 32,6 | 31,0 | 28,6 | 2 |
| " | 18 | 22,8 | 25,8 | 31,6 | 31,4 | 30,2 | 28,4 | 2 |
| " | 19 | 21,6 | 28,0 | 33,2 | 32,4 | 32,8 | 28,6 | 2 |
| " | 20 | 20,8 | 27,4 | 32,0 | 31,8 | 30,6 | 28,2 | 2 |
| " | 21 | 21,4 | 27,0 | 31,6 | 32,0 | 32,4 | 28,6 | 28 |
| " | 22 | 21,0 | 27,4 | 31,2 | 32,0 | 31,4 | 28,2 | 28 |
| " | 23 | 22,0 | 26,6 | 30,0 | 31,8 | 31,2 | 28,6 | 28 |
| " | 24 | 22,6 | 26,4 | 27,4 | 31,4 | 30,8 | 29,2 | 28 |
| " | 25 | 21,8 | 23,4 | 26,4 | 28,4 | 28,6 | 27,8 | 26 |
| " | 26 | 21,6 | 28,0 | 30,8 | 31,6 | 31,0 | 28,2 | 28 |
| " | 27 | 21,6 | 27,6 | 30,6 | 33,2 | 31,6 | 29,2 | 29 |
| " | 28 | 21,4 | 24,2 | 29,2 | 31,6 | 32,0 | 28,8 | 27 |
| " | 29 | 21,0 | 24,8 | 30,6 | 32,0 | 31,4 | 28,6 | 28 |
| " | 30 | 22,0 | 28,8 | 31,4 | 33,6 | 27,6 | 24,6 | 28 |
| Juillet. | 1 | 21,6 | 29,0 | 32,2 | 33,8 | 30,2 | 29,2 | 29 |
| " | 2 | 22,0 | 25,6 | 28,8 | 31,0 | 30,4 | 28,6 | 27 |
| " | 3 | 21,8 | 28,6 | 28,4 | 28,6 | 29,6 | 28,4 | 27 |
| " | 4 | 20,4 | 27,8 | 29,8 | 32,2 | 31,8 | 29,8 | 28 |
| " | 5 | 21,2 | 27,0 | 32,0 | 35,8 | 33,4 | 30,2 | 30 |
| " | 6 | 22,0 | 27,8 | 32,0 | 34,0 | 32,4 | 30,0 | 29 |
| " | 7 | 20,4 | 29,0 | 32,6 | 34,8 | 34,0 | 30,2 | 30 |
| " | 8 | 20,8 | 26,6 | 32,4 | 36,0 | 32,6 | 28,0 | 29 |
| " | 9 | 20,0 | 26,6 | 30,6 | 32,8 | 30,0 | 28,2 | 28, |
| " | 10 | 21,6 | 25,6 | 29,0 | 32,0 | 31,0 | 28,4 | 28, |
| **Moyenne.** | **40** | **21,70** | **27,22** | **30,51** | **32,14** | **31,12** | **28,19** | 28, |

# TEMPÉRATURE DE L'AIR

en °C.

# TERRAIN DÉCOUVERT.

| ois. | Date. | THERMOMÈTRE HUMIDE. | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Avant-midi. | | | Après-midi. | | |
| | | 6 h. | 9 h. | 11 h. | 1 h, | 3 h. | 5 h. |
| in. | 1 | 21,2 | 25,4 | 27,2 | 28,4 | 26,4 | 24,8 |
| " | 2 | 21,8 | 24,6 | 25,6 | 27,6 | 27,2 | 26,4 |
| " | 3 | 22,0 | 26,6 | 28,6 | 27,0 | 27,0 | 25,2 |
| " | 4 | 22,8 | 24,8 | 26,0 | 25,6 | 26,8 | 26,2 |
| " | 5 | 22,6 | 26,6 | 28,8 | 27,0 | 25,4 | 24,0 |
| " | 6 | 21,8 | 25,2 | 27,2 | 27,6 | 27,4 | 24,6 |
| " | 7 | 22,0 | 25,0 | 27,0 | 27,8 | 27,0 | 26,0 |
| " | 8 | 21,6 | 24,2 | 25,4 | 26,2 | 27,8 | 26,4 |
| " | 9 | 21,8 | 26,0 | 27,2 | 28,4 | 27,8 | 25,8 |
| " | 10 | 22,4 | 25,8 | 27,6 | 27,8 | 29,0 | 22,6 |
| " | 11 | 21,2 | 26,0 | 27,8 | 28,6 | 27,0 | 23,4 |
| " | 12 | 22,4 | 26,0 | 27,6 | 28,4 | 28,2 | 25,8 |
| " | 13 | 22,2 | 26,6 | 27,2 | 26,2 | 26,8 | 26,4 |
| " | 14 | 22,0 | 24,8 | 26,6 | 26,6 | 26,8 | 26,0 |
| " | 15 | 21,0 | 25,6 | 27,8 | 28,6 | 27,8 | 26,2 |
| " | 16 | 19,6 | 25,0 | 27,0 | 27,6 | 28,0 | 26,2 |
| " | 17 | 22,4 | 26,6 | 27,2 | 28,2 | 28,0 | 26,6 |
| " | 18 | 22,6 | 25,0 | 28,4 | 28,0 | 27,4 | 26,8 |
| " | 19 | 21,6 | 25,6 | 29,0 | 28,2 | 27,8 | 25,8 |
| " | 20 | 20,6 | 25,0 | 27,6 | 27,4 | 25,6 | 24,6 |
| " | 21 | 21,0 | 25,2 | 27,4 | 26,8 | 26,8 | 25,4 |
| " | 22 | 21,0 | 25,6 | 27,2 | 27,0 | 28,0 | 26,8 |
| " | 23 | 21,8 | 25,2 | 26,4 | 27,2 | 26,8 | 25,6 |
| " | 24 | 22,2 | 25,2 | 25,8 | 27,4 | 27,8 | 26,8 |
| " | 25 | 21,6 | 22,8 | 25,0 | 25,6 | 25,8 | 26,4 |
| " | 26 | 21,2 | 25,4 | 26,8 | 27,4 | 26,6 | 25,4 |
| " | 27 | 21,4 | 25,8 | 27,0 | 28,4 | 27,2 | 26,2 |
| " | 28 | 21,2 | 23,4 | 26,4 | 27,6 | 27,6 | 26,4 |
| " | 29 | 21,0 | 23,8 | 26,8 | 28,2 | 27,4 | 25,6 |
| " | 30 | 21,8 | 26,2 | 27,2 | 28,4 | 24,0 | 23,6 |
| uillet. | 1 | 21,2 | 25,0 | 25,4 | 26,0 | 25,4 | 26,0 |
| " | 2 | 21,8 | 24,4 | 25,6 | 27,2 | 27,0 | 26,6 |
| " | 3 | 21,6 | 26,4 | 26,0 | 26,0 | 26,3 | 25,0 |
| " | 4 | 20,4 | 25,2 | 26,6 | 27,4 | 27,0 | 26,8 |
| " | 5 | 21,0 | 25,4 | 27,4 | 28,6 | 28,0 | 26,6 |
| " | 6 | 21,6 | 25,4 | 26,6 | 26,8 | 26,6 | 26,2 |
| " | 7 | 20,2 | 23,4 | 25,2 | 26,0 | 27,4 | 26,6 |
| " | 8 | 20,8 | 24,6 | 26,0 | 28,0 | 25,8 | 24,0 |
| " | 9 | 20,0 | 24,6 | 26,8 | 27,6 | 25,6 | 25,4 |
| " | 10 | 21,4 | 23,6 | 25,4 | 28,0 | 27,2 | 25,6 |
| oyenne. | **40** | **21,50** | **25,18** | **26,85** | **27,42** | **26,99** | **25,67** |

TABLEAU IV.

# HUMIDITÉ RELATIVE DE L'AIR.

# HUMIDITÉ RELATIVE DE L'AIR

en %.

# TERRAIN COUVERT.

| Mois. | Date. | Avant-midi. | | | Après-midi. | | | Moye par j |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 6 h. | 9 h. | 11 h. | 1 h. | 3 h. | 5 h. | |
| Juin. | 1 | 100 | 81 | 69 | 72 | 73 | 83 | 79 |
| " | 2 | 100 | 94 | 91 | 80 | 72 | 81 | 86 |
| " | 3 | 98 | 81 | 73 | 69 | 73 | 95 | 81 |
| " | 4 | 100 | 93 | 86 | 81 | 78 | 83 | 86 |
| " | 5 | 98 | 91 | 72 | 69 | 65 | 81 | 79 |
| " | 6 | 98 | 83 | 73 | 62 | 73 | 95 | 80 |
| " | 7 | 100 | 86 | 83 | 70 | 80 | 88 | 84 |
| " | 8 | 100 | 94 | 89 | 86 | 80 | 89 | 89 |
| " | 9 | 98 | 83 | 82 | 66 | 82 | 83 | 81 |
| " | 10 | 100 | 78 | 77 | 70 | 72 | 89 | 80 |
| " | 11 | 98 | 84 | 83 | 73 | 80 | 96 | 85 |
| " | 12 | 98 | 90 | 80 | 69 | 76 | 86 | 83 |
| " | 13 | 100 | 81 | 73 | 71 | 74 | 85 | 80 |
| " | 14 | 98 | 91 | 83 | 78 | 78 | 93 | 86 |
| " | 15 | 98 | 84 | 78 | 69 | 73 | 80 | 79 |
| " | 16 | 98 | 86 | 73 | 69 | 76 | 83 | 80 |
| " | 17 | 98 | 88 | 73 | 70 | 80 | 86 | 82 |
| " | 18 | 100 | 96 | 80 | 76 | 80 | 88 | 86 |
| " | 19 | 100 | 86 | 72 | 69 | 66 | 78 | 78 |
| " | 20 | 68 | 84 | 70 | 67 | 64 | 74 | 75 |
| " | 21 | 100 | 88 | 72 | 66 | 62 | 77 | 77 |
| " | 22 | 100 | 91 | 73 | 64 | 78 | 90 | 82 |
| " | 23 | 100 | 89 | 74 | 67 | 70 | 78 | 79 |
| " | 24 | 98 | 93 | 89 | 74 | 80 | 83 | 86 |
| " | 25 | 100 | 96 | 91 | 81 | 80 | 89 | 89 |
| " | 26 | 98 | 83 | 73 | 70 | 67 | 81 | 78 |
| " | 27 | 100 | 89 | 74 | 66 | 69 | 77 | 78 |
| " | 28 | 100 | 94 | 81 | 73 | 69 | 80 | 82 |
| " | 29 | 100 | 94 | 74 | 73 | 70 | 78 | 81 |
| " | 30 | 98 | 83 | 70 | 66 | 72 | 91 | 79 |
| Juillet. | 1 | 98 | 72 | 55 | 49 | 67 | 77 | 68 |
| " | 2 | 98 | 91 | 78 | 74 | 77 | 86 | 83 |
| " | 3 | 100 | 88 | 81 | 81 | 78 | 79 | 84 |
| " | 4 | 100 | 81 | 78 | 67 | 69 | 80 | 78 |
| " | 5 | 98 | 89 | 67 | 57 | 64 | 75 | 74 |
| " | 6 | 100 | 84 | 64 | 53 | 60 | 73 | 71 |
| " | 7 | 98 | 62 | 53 | 47 | 58 | 75 | 64 |
| " | 8 | 100 | 84 | 60 | 52 | 57 | 71 | 70 |
| " | 9 | 98 | 89 | 74 | 66 | 67 | 78 | 78 |
| " | 10 | 98 | 85 | 75 | 73 | 73 | 81 | 80 |
| **Moyenne.** | **40** | **99,00** | **86,48** | **75.40** | **68,88** | **72,05** | **82,88** | *80.* |

# HUMIDITÉ RELATIVE DE L'AIR

en %.

# TERRAIN DÉCOUVERT.

| Mois. | Date. | Avant-midi. | | | Après-midi. | | | Moyenne par jour. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 6 h. | 9 h. | 11 h. | 1 h. | 3 h. | 5 h. | |
| Juin. | 1 | 98 | 77 | 64 | 64 | 64 | 70 | **72,08** |
| " | 2 | 98 | 92 | 89 | 77 | 68 | 76 | **83,25** |
| " | 3 | 96 | 76 | 68 | 62 | 68 | 93 | **76,85** |
| " | 4 | 100 | 91 | 82 | 72 | 72 | 75 | **81,00** |
| " | 5 | 96 | 86 | 68 | 63 | 61 | 74 | **74,52** |
| " | 6 | 98 | 79 | 70 | 57 | 70 | 92 | **77,28** |
| " | 7 | 98 | 82 | 78 | 64 | 72 | 81 | **78,00** |
| " | 8 | 100 | 92 | 85 | 79 | 74 | 82 | **85,17** |
| " | 9 | 98 | 79 | 77 | 62 | 77 | 79 | **77,92** |
| " | 10 | 98 | 76 | 73 | 66 | 66 | 85 | **76,81** |
| " | 11 | 98 | 79 | 77 | 66 | 77 | 94 | **81,40** |
| " | 12 | 96 | 78 | 74 | 62 | 67 | 77 | **75,12** |
| " | 13 | 100 | 74 | 66 | 68 | 68 | 76 | **74,42** |
| " | 14 | 98 | 87 | 78 | 72 | 72 | 91 | **82,04** |
| " | 15 | 96 | 81 | 73 | 66 | 70 | 75 | **76,31** |
| " | 16 | 98 | 81 | 68 | 66 | 73 | 78 | **76,72** |
| " | 17 | 98 | 84 | 68 | 66 | 76 | 83 | **78,72** |
| " | 18 | 98 | 93 | 75 | 73 | 77 | 86 | **83,65** |
| " | 19 | 100 | 79 | 68 | 67 | 62 | 76 | **74,75** |
| " | 20 | 98 | 79 | 66 | 66 | 61 | 70 | **72,72** |
| " | 21 | 96 | 84 | 67 | 61 | 59 | 73 | **73,12** |
| " | 22 | 100 | 84 | 68 | 62 | 73 | 87 | **78,62** |
| " | 23 | 98 | 87 | 71 | 64 | 65 | 75 | **76,42** |
| " | 24 | 96 | 91 | 85 | 68 | 76 | 79 | **82,35** |
| " | 25 | 98 | 94 | 87 | 76 | 76 | 87 | **86,40** |
| " | 26 | 96 | 77 | 68 | 67 | 65 | 76 | **74,27** |
| " | 27 | 98 | 84 | 71 | 64 | 66 | 75 | **75,94** |
| " | 28 | 98 | 92 | 76 | 69 | 66 | 79 | **80,02** |
| " | 29 | 100 | 90 | 70 | 70 | 68 | 75 | **78,56** |
| " | 30 | 98 | 78 | 67 | 62 | 70 | 90 | **77,08** |
| Juillet. | 1 | 96 | 67 | 52 | 47 | 62 | 73 | **65,19** |
| " | 2 | 98 | 89 | 73 | 70 | 72 | 83 | **80,60** |
| " | 3 | 98 | 81 | 79 | 78 | 73 | 72 | **79,44** |
| " | 4 | 100 | 77 | 74 | 63 | 63 | 75 | **74,62** |
| " | 5 | 98 | 85 | 64 | 51 | 60 | 71 | **71,19** |
| " | 6 | 96 | 79 | 60 | 50 | 57 | 69 | **68,04** |
| " | 7 | 98 | 57 | 49 | 43 | 54 | 71 | **60,65** |
| " | 8 | 100 | 82 | 54 | 47 | 52 | 67 | **66,56** |
| " | 9 | 100 | 82 | 70 | 61 | 65 | 76 | **75,15** |
| " | 10 | 98 | 82 | 70 | 69 | 70 | 76 | **76,96** |
| Moyenne. | **40** | **98,00** | **82,18** | **71,05** | **64,50** | **67,68** | **78,55** | *76,56* |

# HUMIDITÉ RELATIVE DE L'AIR

en %.

# TERRAIN COUVERT.

| Mois. | Date. | Avant-midi. | | | Après-midi. | | | Moy par |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 6 h. | 9 h. | 11 h. | 1 h. | 3 h. | 5 h. | |
| Juin. | 1 | 100 | 81 | 69 | 72 | 73 | 83 | 7 |
| " | 2 | 100 | 94 | 91 | 80 | 72 | 81 | 8 |
| " | 3 | 98 | 81 | 73 | 69 | 73 | 95 | 8 |
| " | 4 | 100 | 93 | 86 | 81 | 78 | 83 | 8 |
| " | 5 | 98 | 91 | 72 | 69 | 65 | 81 | 7 |
| " | 6 | 98 | 83 | 73 | 62 | 73 | 95 | 8 |
| " | 7 | 100 | 86 | 83 | 70 | 80 | 88 | 8 |
| " | 8 | 100 | 94 | 89 | 86 | 80 | 89 | 8 |
| " | 9 | 98 | 83 | 82 | 66 | 82 | 83 | 8 |
| " | 10 | 100 | 78 | 77 | 70 | 72 | 89 | 8 |
| " | 11 | 98 | 84 | 83 | 73 | 80 | 96 | 8 |
| " | 12 | 98 | 90 | 80 | 69 | 76 | 86 | 8 |
| " | 13 | 100 | 81 | 73 | 71 | 74 | 85 | 8 |
| " | 14 | 98 | 91 | 83 | 78 | 78 | 93 | 8 |
| " | 15 | 98 | 84 | 78 | 69 | 73 | 80 | 7 |
| " | 16 | 98 | 86 | 73 | 69 | 76 | 83 | 8 |
| " | 17 | 98 | 88 | 73 | 70 | 80 | 86 | 8 |
| " | 18 | 100 | 96 | 80 | 76 | 80 | 88 | 8 |
| " | 19 | 100 | 86 | 72 | 69 | 66 | 78 | 7 |
| " | 20 | 68 | 84 | 70 | 67 | 64 | 74 | 7 |
| " | 21 | 100 | 88 | 72 | 66 | 62 | 77 | 7 |
| " | 22 | 100 | 91 | 73 | 64 | 78 | 90 | 8 |
| " | 23 | 100 | 89 | 74 | 67 | 70 | 78 | 7 |
| " | 24 | 98 | 93 | 89 | 74 | 80 | 83 | 8 |
| " | 25 | 100 | 96 | 91 | 81 | 80 | 89 | 8 |
| " | 26 | 98 | 83 | 73 | 70 | 67 | 81 | 7 |
| " | 27 | 100 | 89 | 74 | 66 | 69 | 77 | 7 |
| " | 28 | 100 | 94 | 81 | 73 | 69 | 80 | 8 |
| " | 29 | 100 | 94 | 74 | 73 | 70 | 78 | 8 |
| " | 30 | 98 | 83 | 70 | 66 | 72 | 91 | 7 |
| Juillet. | 1 | 98 | 72 | 55 | 49 | 67 | 77 | 6 |
| " | 2 | 98 | 91 | 78 | 74 | 77 | 86 | 8 |
| " | 3 | 100 | 88 | 81 | 81 | 78 | 79 | 8 |
| " | 4 | 100 | 81 | 78 | 67 | 69 | 80 | 7 |
| " | 5 | 98 | 89 | 67 | 57 | 64 | 75 | 7 |
| " | 6 | 100 | 84 | 64 | 53 | 60 | 73 | 7 |
| " | 7 | 98 | 62 | 53 | 47 | 58 | 75 | 6 |
| " | 8 | 100 | 84 | 60 | 52 | 57 | 71 | 7 |
| " | 9 | 98 | 89 | 74 | 66 | 67 | 78 | 7 |
| " | 10 | 98 | 85 | 75 | 73 | 73 | 81 | 8 |
| Moyenne. | 40 | 99,00 | 86,48 | 75.40 | 68,88 | 72,05 | 82,88 | 80, |

# HUMIDITÉ RELATIVE DE L'AIR

en %.

# TERRAIN DÉCOUVERT.

| Mois. | Date. | Avant-midi. | | | Après-midi. | | | Moyenne par jour. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 6 h. | 9 h. | 11 h. | 1 h. | 3 h. | 5 h. | |
| Juin. | 1 | 98 | 77 | 64 | 64 | 64 | 70 | **72,06** |
| „ | 2 | 98 | 92 | 89 | 77 | 68 | 76 | **83,25** |
| „ | 3 | 96 | 76 | 68 | 62 | 68 | 93 | **76,85** |
| „ | 4 | 100 | 91 | 82 | 72 | 72 | 75 | **81,00** |
| „ | 5 | 96 | 86 | 68 | 63 | 61 | 74 | **74,52** |
| „ | 6 | 98 | 79 | 70 | 57 | 70 | 92 | **77,22** |
| „ | 7 | 98 | 82 | 78 | 64 | 72 | 81 | **78,00** |
| „ | 8 | 100 | 92 | 85 | 79 | 74 | 82 | **85,17** |
| „ | 9 | 98 | 79 | 77 | 62 | 77 | 79 | **77,92** |
| „ | 10 | 98 | 76 | 73 | 66 | 66 | 85 | **76,81** |
| „ | 11 | 98 | 79 | 77 | 66 | 77 | 94 | **81,40** |
| „ | 12 | 96 | 78 | 74 | 62 | 67 | 77 | **75,12** |
| „ | 13 | 100 | 74 | 66 | 68 | 68 | 76 | **74,42** |
| „ | 14 | 98 | 87 | 78 | 72 | 72 | 91 | **82,94** |
| „ | 15 | 96 | 81 | 73 | 66 | 70 | 75 | **76,31** |
| „ | 16 | 98 | 81 | 68 | 66 | 73 | 78 | **76,72** |
| „ | 17 | 98 | 84 | 68 | 66 | 76 | 83 | **78,72** |
| „ | 18 | 98 | 93 | 75 | 73 | 77 | 86 | **83,65** |
| „ | 19 | 100 | 79 | 68 | 67 | 62 | 76 | **74,75** |
| „ | 20 | 98 | 79 | 66 | 66 | 61 | 70 | **72,72** |
| „ | 21 | 96 | 84 | 67 | 61 | 59 | 73 | **73,12** |
| „ | 22 | 100 | 84 | 68 | 62 | 73 | 87 | **78,62** |
| „ | 23 | 98 | 87 | 71 | 64 | 65 | 75 | **76,42** |
| „ | 24 | 96 | 91 | 85 | 68 | 76 | 79 | **82,35** |
| „ | 25 | 98 | 94 | 87 | 76 | 76 | 87 | **86,40** |
| „ | 26 | 96 | 77 | 68 | 67 | 65 | 76 | **74,27** |
| „ | 27 | 98 | 84 | 71 | 64 | 66 | 75 | **75,94** |
| „ | 28 | 98 | 92 | 76 | 69 | 66 | 79 | **80,02** |
| „ | 29 | 100 | 90 | 70 | 70 | 68 | 75 | **78,56** |
| „ | 30 | 98 | 78 | 67 | 62 | 70 | 90 | **77,08** |
| Juillet. | 1 | 96 | 67 | 52 | 47 | 62 | 73 | **65,19** |
| „ | 2 | 98 | 89 | 73 | 70 | 72 | 83 | **80,60** |
| „ | 3 | 98 | 81 | 79 | 78 | 73 | 72 | **79,44** |
| „ | 4 | 100 | 77 | 74 | 63 | 63 | 75 | **74,62** |
| „ | 5 | 98 | 85 | 64 | 51 | 60 | 71 | **71,19** |
| „ | 6 | 96 | 79 | 60 | 50 | 57 | 69 | **68,04** |
| „ | 7 | 98 | 57 | 49 | 43 | 54 | 71 | **60,65** |
| „ | 8 | 100 | 82 | 54 | 47 | 52 | 67 | **66,56** |
| „ | 9 | 100 | 82 | 70 | 61 | 65 | 76 | **75,15** |
| „ | 10 | 98 | 82 | 70 | 69 | 70 | 76 | **76,96** |
| Moyenne. | **40** | **98,00** | **82,18** | **71,05** | **64,50** | **67,68** | **78,55** | *76,56* |

# TEMPÉRATURE MAX. ET MIN.

# TEMPÉRATURE MAX. ET MIN.

en °C.

# TERRAIN COUVERT.

| Mois. | Date. | Temp. max. | Temp. min. | | Mois. | Date. | Temp. max. | Temp |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Avril. | 22 | 35 | 22 | | Juin. | 1 | 32,5 | 2 |
| " | 23 | 35 | 22,5 | | " | 2 | 32 | 2 |
| " | 24 | 34 | 22 | | " | 3 | 32,5 | 2 |
| " | 25 | 35 | 22,5 | | " | 4 | 31 | 2 |
| " | 26 | 30,5 | 22 | | " | 5 | 33 | 2 |
| " | 27 | 35 | 21,5 | | " | 6 | 32,5 | 2 |
| " | 28 | 34 | 21,5 | | " | 7 | 32 | 2 |
| " | 29 | 31 | 22 | | " | 8 | 31 | 2 |
| " | 30 | 33 | 22,5 | | " | 9 | 32,5 | 2 |
| Mai. | 1 | 32,5 | 22,5 | | " | 10 | 33 | 2 |
| " | 2 | 30,5 | 22 | | " | 11 | 32 | 2 |
| " | 3 | 32 | 23,5 | | " | 12 | 32,5 | 2 |
| " | 4 | 35 | 21,5 | | " | 13 | 32 | 2 |
| " | 5 | 33,5 | 22 | | " | 14 | 31,5 | 2 |
| " | 6 | 32 | 21,5 | | " | 15 | 32,5 | 2 |
| " | 7 | 35 | 21,5 | | " | 16 | 33 | 2 |
| " | 8 | 33,5 | 22 | | " | 17 | 32 | 2 |
| " | 9 | 32,5 | 22 | | " | 18 | 32,5 | 2 |
| " | 10 | 33 | 21,5 | | " | 19 | 33 | 2 |
| " | 11 | 32 | 22 | | " | 20 | 32 | 2 |
| " | 12 | 35 | 21,5 | | " | 21 | 33 | 2 |
| " | 13 | 34,5 | 21,5 | | " | 22 | 32,5 | 2 |
| " | 14 | 34,5 | 21,5 | | " | 23 | 32 | 2 |
| " | 15 | 34 | 22 | | " | 24 | 32 | 2 |
| " | 16 | 31,5 | 23 | | " | 25 | 30,5 | 2 |
| " | 17 | 31,5 | 22 | | " | 26 | 32,5 | 2 |
| " | 18 | 33,5 | 22 | | " | 27 | 33 | 2 |
| " | 19 | 34,5 | 23 | | " | 28 | 32,5 | 2 |
| " | 20 | 34,5 | 23,5 | | " | 29 | 32 | 2 |
| " | 21 | 33 | 23 | | " | 30 | 33,5 | 2 |
| " | 22 | 32,5 | 22 | | Juillet. | 1 | 33,5 | 2 |
| " | 23 | 35,5 | 22,5 | | " | 2 | 31 | 2 |
| " | 24 | 34 | 23 | | " | 3 | 30,5 | 2 |
| " | 25 | 33,5 | 23 | | " | 4 | 32 | 2 |
| " | 26 | 33,5 | 22 | | " | 5 | 35 | 2 |
| " | 27 | 33 | 22,5 | | " | 6 | 33 | 2 |
| " | 28 | 33,5 | 23 | | " | 7 | 35 | 2 |
| " | 29 | 32 | 22,5 | | " | 8 | 35,5 | 2 |
| " | 30 | 34 | 22 | | " | 9 | 33 | 2 |
| " | 31 | 30 | 23 | | " | 10 | 32 | 2 |
| Moyenne. | 40 | 33,30 | 22,22 | | Moyenne. | 40 | 32,48 | 2 |

# TEMPÉRATURE MAX. ET MIN.

en °C.

# TERRAIN DÉCOUVERT.

| ois. | Date. | Temp. max. | Temp. min. | | Mois. | Date. | Temp. max. | Temp. min. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ril. | 22 | 36 | 20,5 | | Juin. | 1 | 34 | 21 |
| „ | 23 | 36,5 | 21 | | „ | 2 | 33 | 21,5 |
| „ | 24 | 35 | 20,5 | | „ | 3 | 34 | 22 |
| „ | 25 | 36,5 | 21,5 | | „ | 4 | 32 | 22 |
| „ | 26 | 32 | 21 | | „ | 5 | 35 | 22,5 |
| „ | 27 | 36,5 | 20,5 | | „ | 6 | 34 | 22 |
| „ | 28 | 36 | 20 | | „ | 7 | 33,5 | 21,5 |
| „ | 29 | 32,5 | 20,5 | | „ | 8 | 32 | 21 |
| „ | 30 | 34,5 | 21 | | „ | 9 | 33,5 | 21 |
| ai. | 1 | 34 | 21,5 | | „ | 10 | 35 | 22 |
| „ | 2 | 31 | 20,5 | | „ | 11 | 33,5 | 20,5 |
| „ | 3 | 33,5 | 22 | | „ | 12 | 34 | 22 |
| „ | 4 | 36,5 | 20 | | „ | 13 | 33,5 | 21 |
| „ | 5 | 35 | 21 | | „ | 14 | 33 | 21,5 |
| „ | 6 | 33,5 | 20 | | „ | 15 | 34 | 21 |
| „ | 7 | 36,5 | 20 | | „ | 16 | 34,5 | 19,5 |
| „ | 8 | 35,5 | 20,5 | | „ | 17 | 33,5 | 22 |
| „ | 9 | 34 | 20,5 | | „ | 18 | 33 | 22,5 |
| „ | 10 | 34,5 | 20 | | „ | 19 | 34 | 21 |
| „ | 11 | 33 | 20,5 | | „ | 20 | 33,5 | 20 |
| „ | 12 | 36,5 | 20 | | „ | 21 | 34 | 21 |
| „ | 13 | 36,5 | 20 | | „ | 22 | 34 | 20,5 |
| „ | 14 | 36 | 20 | | „ | 23 | 33 | 21,5 |
| „ | 15 | 35,5 | 21 | | „ | 24 | 33,5 | 22 |
| „ | 16 | 32,5 | 21,5 | | „ | 25 | 31,5 | 21 |
| „ | 17 | 32,5 | 20,5 | | „ | 26 | 33 | 21,5 |
| „ | 18 | 34,5 | 21 | | „ | 27 | 35 | 21 |
| „ | 19 | 35,5 | 22 | | „ | 28 | 34 | 22 |
| „ | 20 | 35 | 22 | | „ | 29 | 33 | 20,5 |
| „ | 21 | 34,5 | 21,5 | | „ | 30 | 35 | 21,5 |
| „ | 22 | 34 | 21 | | Juillet. | 1 | 35 | 21 |
| „ | 23 | 36,5 | 21,5 | | „ | 2 | 32 | 21,5 |
| „ | 24 | 35,5 | 21 | | „ | 3 | 31 | 22 |
| „ | 25 | 35 | 21,5 | | „ | 4 | 33 | 20 |
| „ | 26 | 35,5 | 21 | | „ | 5 | 36,5 | 20,5 |
| „ | 27 | 34 | 21,5 | | „ | 6 | 35 | 21 |
| „ | 28 | 35 | 22 | | „ | 7 | 36 | 20 |
| „ | 29 | 33,5 | 21 | | „ | 8 | 36,5 | 20 |
| „ | 30 | 35 | 21 | | „ | 9 | 33,5 | 19,5 |
| „ | 31 | 31,5 | 21,5 | | „ | 10 | 33 | 22 |
| enne. | **40** | **34,68** | **20,89** | | Moyenne. | **40** | **33,75** | **21,19** |

# TEMPÉRATURE MAX. ET MIN.

en °C.

# TERRAIN COUVERT.

| Mois. | Date. | Temp. max. | Temp. min. | | Mois. | Date. | Temp. max. | Temp |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Avril. | 22 | 35 | 22 | | Juin. | 1 | 32,5 | 2 |
| " | 23 | 35 | 22,5 | | " | 2 | 32 | 2 |
| " | 24 | 34 | 22 | | " | 3 | 32,5 | 2 |
| " | 25 | 35 | 22,5 | | " | 4 | 31 | 2 |
| " | 26 | 30,5 | 22 | | " | 5 | 33 | 2 |
| " | 27 | 35 | 21,5 | | " | 6 | 32,5 | 2 |
| " | 28 | 34 | 21,5 | | " | 7 | 32 | 2 |
| " | 29 | 31 | 22 | | " | 8 | 31 | 2 |
| " | 30 | 33 | 22,5 | | " | 9 | 32,5 | 2 |
| Mai. | 1 | 32,5 | 22,5 | | " | 10 | 33 | 2 |
| " | 2 | 30,5 | 22 | | " | 11 | 32 | 2 |
| " | 3 | 32 | 23,5 | | " | 12 | 32,5 | 2 |
| " | 4 | 35 | 21,5 | | " | 13 | 32 | 2 |
| " | 5 | 33,5 | 22 | | " | 14 | 31,5 | 2 |
| " | 6 | 32 | 21,5 | | " | 15 | 32,5 | 2 |
| " | 7 | 35 | 21,5 | | " | 16 | 33 | 2 |
| " | 8 | 33,5 | 22 | | " | 17 | 32 | 2 |
| " | 9 | 32,5 | 22 | | " | 18 | 32,5 | 2 |
| " | 10 | 33 | 21,5 | | " | 19 | 33 | 2 |
| " | 11 | 32 | 22 | | " | 20 | 32 | 2 |
| " | 12 | 35 | 21,5 | | " | 21 | 33 | 2 |
| " | 13 | 34,5 | 21,5 | | " | 22 | 32,5 | 2 |
| " | 14 | 34,5 | 21,5 | | " | 23 | 32 | 2 |
| " | 15 | 34 | 22 | | " | 24 | 32 | 2 |
| " | 16 | 31,5 | 23 | | " | 25 | 30,5 | 2 |
| " | 17 | 31,5 | 22 | | " | 26 | 32,5 | 2 |
| " | 18 | 33,5 | 22 | | " | 27 | 33 | 2 |
| " | 19 | 34,5 | 23 | | " | 28 | 32,5 | 2 |
| " | 20 | 34,5 | 23,5 | | " | 29 | 32 | 2 |
| " | 21 | 33 | 23 | | " | 30 | 33,5 | 2 |
| " | 22 | 32,5 | 22 | | Juillet. | 1 | 33,5 | 2 |
| " | 23 | 35,5 | 22,5 | | " | 2 | 31 | 2 |
| " | 24 | 34 | 23 | | " | 3 | 30,5 | 2 |
| " | 25 | 33,5 | 23 | | " | 4 | 32 | 2 |
| " | 26 | 33,5 | 22 | | " | 5 | 35 | 2 |
| " | 27 | 33 | 22,5 | | " | 6 | 33 | 2 |
| " | 28 | 33,5 | 23 | | " | 7 | 35 | 2 |
| " | 29 | 32 | 22,5 | | " | 8 | 35,5 | 2 |
| " | 30 | 34 | 22 | | " | 9 | 33 | 2 |
| " | 31 | 30 | 23 | | " | 10 | 32 | 2 |
| Moyenne. | **40** | **33,30** | **22,23** | | Moyenne. | **40** | **32,48** | **22** |

# TEMPÉRATURE MAX. ET MIN.

en °C.

# TERRAIN DÉCOUVERT.

| is. | Date. | Temp. max. | Temp. min. | | Mois. | Date. | Temp. max. | Temp. min. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| il. | 22 | 36 | 20,5 | | Juin. | 1 | 34 | 21 |
| | 23 | 36,5 | 21 | | " | 2 | 33 | 21,5 |
| | 24 | 35 | 20,5 | | " | 3 | 34 | 22 |
| | 25 | 36,5 | 21,5 | | " | 4 | 32 | 22 |
| | 26 | 32 | 21 | | " | 5 | 35 | 22,5 |
| | 27 | 36,5 | 20,5 | | " | 6 | 34 | 22 |
| | 28 | 36 | 20 | | " | 7 | 33,5 | 21,5 |
| | 29 | 32,5 | 20,5 | | " | 8 | 32 | 21 |
| | 30 | 34,5 | 21 | | " | 9 | 33,5 | 21 |
| ai. | 1 | 34 | 21,5 | | " | 10 | 35 | 22 |
| | 2 | 31 | 20,5 | | " | 11 | 33,5 | 20,5 |
| | 3 | 33,5 | 22 | | " | 12 | 34 | 22 |
| | 4 | 36,5 | 20 | | " | 13 | 33,5 | 21 |
| | 5 | 35 | 21 | | " | 14 | 33 | 21,5 |
| | 6 | 33,5 | 20 | | " | 15 | 34 | 21 |
| | 7 | 36,5 | 20 | | " | 16 | 34,5 | 19,5 |
| | 8 | 35,5 | 20,5 | | " | 17 | 33,5 | 22 |
| | 9 | 34 | 20,5 | | " | 18 | 33 | 22,5 |
| | 10 | 34,5 | 20 | | " | 19 | 34 | 21 |
| | 11 | 33 | 20,5 | | " | 20 | 33,5 | 20 |
| | 12 | 36,5 | 20 | | " | 21 | 34 | 21 |
| | 13 | 36,5 | 20 | | " | 22 | 34 | 20,5 |
| | 14 | 36 | 20 | | " | 23 | 33 | 21,5 |
| | 15 | 35,5 | 21 | | " | 24 | 33,5 | 22 |
| | 16 | 32,5 | 21,5 | | " | 25 | 31,5 | 21 |
| | 17 | 32,5 | 20,5 | | " | 26 | 33 | 21,5 |
| | 18 | 34,5 | 21 | | " | 27 | 35 | 21 |
| | 19 | 35,5 | 22 | | " | 28 | 34 | 22 |
| | 20 | 35 | 22 | | " | 29 | 33 | 20,5 |
| | 21 | 34,5 | 21,5 | | " | 30 | 35 | 21,5 |
| | 22 | 34 | 21 | | Juillet. | 1 | 35 | 21 |
| | 23 | 36,5 | 21,5 | | " | 2 | 32 | 21,5 |
| | 24 | 35,5 | 21 | | " | 3 | 31 | 22 |
| | 25 | 35 | 21,5 | | " | 4 | 33 | 20 |
| | 26 | 35,5 | 21 | | " | 5 | 36,5 | 20,5 |
| | 27 | 34 | 21,5 | | " | 6 | 35 | 21 |
| | 28 | 35 | 22 | | " | 7 | 36 | 20 |
| | 29 | 33,5 | 21 | | " | 8 | 36,5 | 20 |
| | 30 | 35 | 21 | | " | 9 | 33,5 | 19,5 |
| | 31 | 31,5 | 21,5 | | " | 10 | 33 | 22 |
| enne. | **40** | **34,68** | **20,89** | | Moyenne. | **40** | **33,75** | **21,19** |

TABLEAU VI.

# TEMPÉRATURE DU SOL.

# TEMPÉRATURE DU SOL

en °C.

# TERRAIN COUVERT.

| Mois. | Date. | Avant-midi. | | | Après-midi. | | | Moy par |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 6 h. | 9 h. | 11 h. | 1 h. | 3 h. | 5 h. | |
| Avril. | 22 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,25 | 28,25 | 2 |
| " | 23 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,25 | 28,50 | 28,50 | 2 |
| " | 24 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | 28,75 | 2 |
| " | 25 | 28,25 | 28,25 | 28,25 | 28,50 | 29,00 | 29,00 | 2 |
| " | 26 | 28,50 | 28,25 | 28,25 | 28,25 | 28,25 | 28,50 | 2 |
| " | 27 | 27,75 | 27,75 | 28,00 | 28,25 | 28,25 | 28,25 | 2 |
| " | 28 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | 2 |
| " | 29 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,25 | 2 |
| " | 30 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,25 | 28,50 | 2 |
| Mai. | 1 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | 28,75 | 2 |
| " | 2 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,25 | 2 |
| " | 3 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,25 | 28,50 | 2 |
| " | 4 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | 28,50 | 2 |
| " | 5 | 28,25 | 28,25 | 28,25 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 2 |
| " | 6 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | 2 |
| " | 7 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,50 | 28,50 | 2 |
| " | 8 | 28,25 | 28,25 | 28,50 | 28,75 | 29,00 | 29,00 | 2 |
| " | 9 | 28,00 | 28,00 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | 2 |
| " | 10 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 27,75 | 27,75 | 28,25 | 2 |
| " | 11 | 27,75 | 27,50 | 27,50 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 2 |
| " | 12 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | 2 |
| " | 13 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,50 | 28,50 | 2 |
| " | 14 | 27,75 | 27,75 | 27,75 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 2 |
| " | 15 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 27,75 | 28,25 | 28,25 | 2 |
| " | 16 | 28,75 | 28,25 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | 2 |
| " | 17 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 2 |
| " | 18 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | 2 |
| " | 19 | 28,25 | 28,25 | 28,25 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 2 |
| " | 20 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | 29,00 | 2 |
| " | 21 | 28,50 | 28,25 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 2 |
| " | 22 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,25 | 2 |
| " | 23 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | 28,50 | 2 |
| " | 24 | 28,25 | 28,25 | 28,25 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 2 |
| " | 25 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | 2 |
| " | 26 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 29,00 | 2 |
| " | 27 | 28,25 | 28,25 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | 2 |
| " | 28 | 28,25 | 28,25 | 28,25 | 28,50 | 28,75 | 29,00 | 2 |
| " | 29 | 28,25 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,75 | 2 |
| " | 30 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,25 | 28,50 | 2 |
| " | 31 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 2 |
| Moyenne. | 40 | 28,08 | 28,04 | 28,09 | 28,24 | 28,37 | 28,53 | 2 |

# TEMPÉRATURE DU SOL

en ° C.

# TERRAIN DÉCOUVERT.

| Mois. | Date. | Avant-midi. | | | Après-midi. | | | Moyenne par jour. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 6 h. | 9 h. | 11 h. | 1 h. | 3 h. | 5 h. | |
| vril. | 22 | 28,25 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | 28,75 | 28,75 | **28,40** |
| " | 23 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 29,00 | 29,00 | 29,25 | **28,80** |
| " | 24 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | 29,25 | **28,68** |
| " | 25 | 29,00 | 29,00 | 29,00 | 29,25 | 29,50 | 29,75 | **29,26** |
| " | 26 | 29,50 | 29,25 | 29,00 | 29,00 | 29,00 | 29,00 | **29,11** |
| " | 27 | 28,25 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | 29,00 | 28,75 | **29,44** |
| " | 28 | 29,00 | 29,00 | 29,00 | 29,25 | 29,50 | 29,75 | **29,26** |
| " | 29 | 28,50 | 28,25 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | 29,00 | **28,58** |
| " | 30 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 29,00 | 29,00 | **28,67** |
| Mai. | 1 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 29,00 | 29,00 | **28,67** |
| " | 2 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | 28,75 | **28,58** |
| " | 3 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | 29,00 | **28,63** |
| " | 4 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | 29,00 | 29,00 | **28,46** |
| " | 5 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 29,00 | 29,00 | 29,25 | **28,80** |
| " | 6 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 29,00 | 29,00 | **28,67** |
| " | 7 | 28,25 | 28,25 | 28,25 | 28,75 | 29,00 | 29,00 | **28,58** |
| " | 8 | 29,00 | 29,00 | 29,00 | 29,25 | 29,50 | 30,00 | **29,20** |
| " | 9 | 29,00 | 29,00 | 29,00 | 29,00 | 29,25 | 29,50 | **29,13** |
| " | 10 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | 29,25 | **28,68** |
| " | 11 | 29,00 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | 29,00 | 29,00 | **28,77** |
| " | 12 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 29,00 | 29,50 | **28,76** |
| " | 13 | 29,00 | 29,00 | 29,00 | 29,25 | 29,75 | 30,00 | **29,34** |
| " | 14 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 29,00 | 29,00 | 29,50 | **28,84** |
| " | 15 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 29,00 | 29,00 | **28,67** |
| " | 16 | 29,00 | 28,75 | 28,50 | 28,75 | 29,00 | 29,25 | **28,87** |
| " | 17 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | **28,55** |
| " | 18 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | 29,00 | **28,63** |
| " | 19 | 28,75 | 28,75 | 28,75 | 29,00 | 29,00 | 29,50 | **28,97** |
| " | 20 | 29,00 | 29,00 | 29,00 | 29 25 | 29,50 | 30,00 | **29,30** |
| " | 21 | 29,25 | 29,00 | 29,00 | 29,00 | 29,25 | 29,50 | **29,16** |
| " | 22 | 28,75 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | 29,00 | 29,25 | **28,79** |
| " | 23 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 29,00 | 29,50 | 30,00 | **29,01** |
| " | 24 | 29,00 | 29,00 | 29,00 | 29,00 | 29,50 | 29,75 | **29,21** |
| " | 25 | 29,00 | 29,00 | 29,00 | 29,25 | 29,50 | 29,75 | **29,26** |
| " | 26 | 29,00 | 29,00 | 29,00 | 29,25 | 29,50 | 30,00 | **29,30** |
| " | 27 | 29,00 | 29,00 | 29,00 | 29,00 | 29,50 | 29,50 | **29,17** |
| " | 28 | 29,00 | 28,75 | 28,75 | 29,00 | 29,50 | 29,75 | **29,12** |
| " | 29 | 29,00 | 28,50 | 28,75 | 28,75 | 29,25 | 29,50 | **28,94** |
| " | 30 | 28,75 | 28,75 | 28,75 | 29,00 | 29,25 | 29,50 | **29,01** |
| " | 31 | 29,00 | 28,75 | 28,75 | 28,75 | 28,75 | 29,00 | **28,83** |
| yenne. | **40** | **28,72** | **28,64** | **28,66** | **28,82** | **29,11** | **29,33** | *28,91* |

# TEMPÉRATURE DU SOL

en °C.

# TERRAIN COUVERT.

| Mois. | Date. | Avant-midi. | | | Après-midi. | | | Moye par j |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 6 h. | 9 h. | 11 h. | 1 h. | 3 h. | 5 h. | |
| Juin. | 1 | 27,75 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 28,00 | 28,00 | 27 |
| " | 2 | 28,00 | 27,75 | 27,75 | 27,75 | 27,75 | 28,00 | 27 |
| " | 3 | 27,75 | 27,75 | 27,75 | 27,75 | 28,00 | 28,00 | 27 |
| " | 4 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,25 | 28,50 | 28 |
| " | 5 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,25 | 28 |
| " | 6 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,25 | 28,50 | 28 |
| " | 7 | 27,75 | 27,75 | 27,75 | 27,75 | 28,00 | 28,00 | 27 |
| " | 8 | 28,00 | 27,75 | 27,75 | 27,75 | 27,75 | 27,75 | 27 |
| " | 9 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 27,75 | 28,00 | 27 |
| " | 10 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 28,00 | 28,00 | 27 |
| " | 11 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 27 |
| " | 12 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 27,75 | 27 |
| " | 13 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 28,00 | 27 |
| " | 14 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 27 |
| " | 15 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 28,00 | 27 |
| " | 16 | 27,50 | 27,75 | 27,75 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 27 |
| " | 17 | 27,75 | 27,75 | 27,75 | 27,75 | 28,00 | 28,25 | 27 |
| " | 18 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | 28 |
| " | 19 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28 |
| " | 20 | 27,75 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 28,00 | 27 |
| " | 21 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 28,00 | 28,00 | 27 |
| " | 22 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 27,75 | 27 |
| " | 23 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 27 |
| " | 24 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 27,75 | 27 |
| " | 25 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27 |
| " | 26 | 27,25 | 27,25 | 27,25 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27 |
| " | 27 | 27,50 | 27,25 | 27,25 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 27 |
| " | 28 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27 50 | 27,75 | 27,75 | 27 |
| " | 29 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 27 |
| " | 30 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 27,75 | 28,00 | 27 |
| Juillet. | 1 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 27,75 | 28,00 | 27 |
| " | 2 | 27,25 | 27,25 | 27,50 | 27,50 | 27.50 | 27,50 | 27 |
| " | 3 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27 |
| " | 4 | 27,00 | 27,00 | 27,00 | 27,00 | 27,25 | 27,50 | 27 |
| " | 5 | 27,25 | 27,25 | 27,25 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 27 |
| " | 6 | 27,25 | 27.25 | 27,25 | 27,50 | 27,75 | 28,00 | 27 |
| " | 7 | 27,50 | 27,25 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 27 |
| " | 8 | 27,25 | 27,25 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 27,75 | 27 |
| " | 9 | 27,00 | 26,75 | 26,75 | 26,75 | 27,00 | 27,25 | 26 |
| " | 10 | 27,00 | 27,00 | 27,00 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27 |
| Moyenne. | 40 | 27,55 | 27,50 | 27,53 | 27,62 | 27,74 | 27,89 | 27, |

# TEMPÉRATURE DU SOL

en °C.

# TERRAIN DÉCOUVERT.

| Mois. | Date. | Avant-midi. | | | Après-midi. | | | Moyenne par jour. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 6 h. | 9 h. | 11 h. | 1 h. | 3 h. | 5 h. | |
| Juin. | 1 | 28,50 | 28,00 | 28,00 | 28,75 | 28,75 | 29,00 | **28,48** |
| " | 2 | 28,75 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | 29,00 | **28,66** |
| " | 3 | 28,75 | 28,75 | 28,75 | 28,75 | 29,25 | 29,50 | **28,96** |
| " | 4 | 28,75 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | 29,25 | **28,71** |
| " | 5 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | 29,00 | 29,50 | **28,08** |
| " | 6 | 28,75 | 28,75 | 28,75 | 29,00 | 29,25 | 29,50 | **29,01** |
| " | 7 | 28,25 | 28,25 | 28,25 | 28,50 | 29,00 | 29,25 | **28,59** |
| " | 8 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | **28,55** |
| " | 9 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | 28,75 | **28,26** |
| " | 10 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | 28,75 | 29,00 | **28,42** |
| " | 11 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | 29,00 | **28,30** |
| " | 12 | 28,00 | 27,75 | 27,75 | 28,00 | 28,00 | 28,50 | **28,00** |
| " | 13 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,75 | 29,00 | **28,34** |
| " | 14 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | 29,00 | **28,63** |
| " | 15 | 28,25 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | 29,00 | **28,33** |
| " | 16 | 28,75 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | 29,00 | **28,40** |
| " | 17 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | 29,00 | 29,50 | **28,80** |
| " | 18 | 28,75 | 28,50 | 28,50 | 29,00 | 29,25 | 29,50 | **28,91** |
| " | 19 | 28,75 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | 29,00 | 29,50 | **28,83** |
| " | 20 | 28,50 | 28,25 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | 29,00 | **28,58** |
| " | 21 | 28,25 | 28,00 | 28,25 | 28,25 | 28,50 | 29,00 | **28,38** |
| " | 22 | 28,25 | 28,25 | 28,25 | 28,50 | 28,75 | 29,00 | **28,51** |
| " | 23 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | 28,75 | **28,26** |
| " | 24 | 28,25 | 28,25 | 28,25 | 28,50 | 28,50 | 28,75 | **28,42** |
| " | 25 | 28,25 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | **28,08** |
| " | 26 | 27,75 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 28,25 | 28,50 | **27,87** |
| " | 27 | 28,00 | 27,75 | 27,75 | 28,00 | 28,50 | 28,75 | **28,12** |
| " | 28 | 28,00 | 27,75 | 27,75 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | **28,04** |
| " | 29 | 28,00 | 27,75 | 27,75 | 28,00 | 28,50 | 28,75 | **28,12** |
| " | 30 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | 28,75 | **28,26** |
| uillet. | 1 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | 28,50 | 28,50 | **28,29** |
| " | 2 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | **28,13** |
| " | 3 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,00 | 28,25 | 28,25 | **28,08** |
| " | 4 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 27,75 | 28,25 | **27,68** |
| " | 5 | 27,50 | 27,50 | 27,50 | 28,00 | 28,25 | 28,50 | **27,88** |
| " | 6 | 28,00 | 27,75 | 27,75 | 28,00 | 28,50 | 28,75 | **28,12** |
| " | 7 | 28,00 | 27,75 | 27,75 | 27,75 | 28,00 | 28,50 | **27,96** |
| " | 8 | 28,00 | 27,75 | 27,75 | 28,00 | 28,50 | 28,75 | **28,12** |
| " | 9 | 27,50 | 27,25 | 27,50 | 27,50 | 28,00 | 28,25 | **27,66** |
| " | 10 | 27,75 | 27,75 | 27,75 | 27,75 | 28,00 | 28,25 | **27,88** |
| yenne. | **40** | **28,22** | **28,06** | **28,10** | **28,28** | **28,54** | **28,85** | *28,34* |

## Liste des planches, figures et représentations graphiques.

---


Plan du terrain à l'ombre à Medan-Estate.

Fig. 1. Portion d'un champ de tabac de 10 acres, couvert de „cheese-cloth", pour montrer les détails de la structure externe de la membrure.

Fig. 2. Vue extérieure d'un champ de tabac en Amérique, de 10 acres, couvert de „cheese-cloth", prise d'une élévation située à quelque distance.

Fig. 3. Portion d'un champ de tabac en Amérique, de 8 acres, montrant la façon d'attacher le „cheese-cloth".

Fig. 4. Un champ de tabac en Amérique, de 8 acres, couvert de „cheese-cloth", à Mitchelson-farm, Tariffville (Conn.).

Fig. 5. Membrure de la tente d'abri, telle qu'on l'employa pendant la saison de 1901 en Amérique, prête à être recouverte.

Fig. 6. Membrure de la tente d'abri, destinée à être employée en partie pendant la saison de 1902 en Amérique, avec pieux distants de 20 à 24 pieds, et faite pour une couverture large de 288 pouces.

Fig. 7. „Cheese-cloth" en toile de lin; produit hollandais de la fabrique de M. VAN BESOUW (Goorle).

Fig. 8. „Cheese-cloth" en coton; produit hollandais de la fabrique de M. VAN BESOUW (Goorle).

Pl. I. Vue intérieure de la tente d'ombre à Medan-Estate (C. o. d. Sumatra) 1903.

Pl. II. Vue extérieure de la tente d'ombre à Medan-Estate (C. o. d. Sumatra) 1903.

Pl. III. Coup d'oeil dans la tente d'ombre à Medan-Estate (C. o. d. Sumatra) 1903.

Courbe *a*. Représentation schématique de la durée d'insolation dans l'expérience à couvert et dans l'expérience de contrôle à Medan-Estate (C. o. d. Sumatra) en 1903.

Courbe *b*. Représentation schématique de la chute de pluies dans l'expérience à couvert et dans l'expérience de contrôle à Medan-Estate (C. o. d. Sumatra) en 1903.

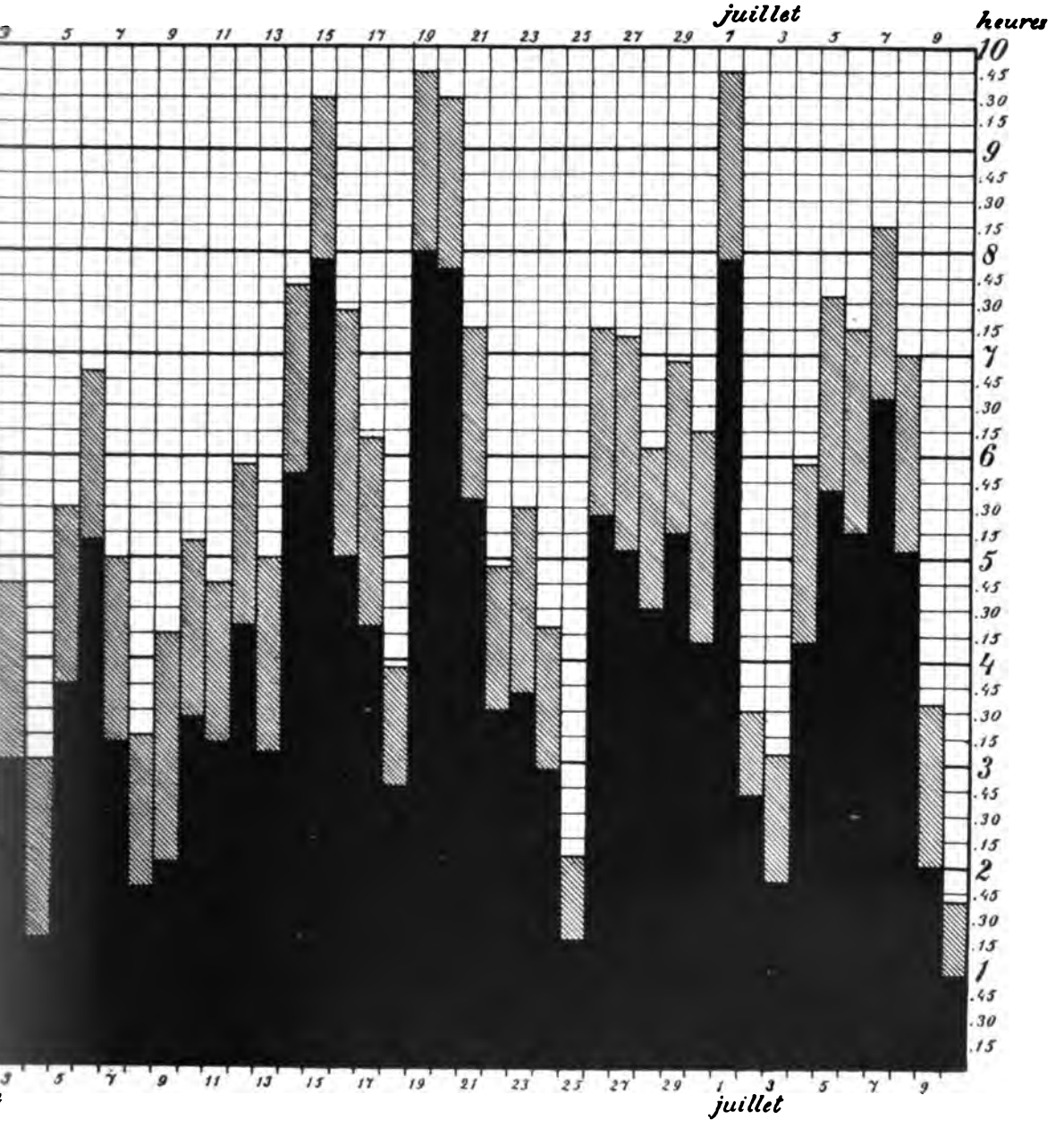
Courbe *c*. Représentation schématique de la température moyenne de l'air dans l'expérience à couvert et dans l'expérience de contrôle à Medan-Estate (C. o. d. Sumatra) en 1903.

Courbe *d*. Représentation schématique de l'humidité relative de l'air dans l'expérience à couvert et dans l'expérience de contrôle à Medan-Estate (C. o. d. Sumatra) en 1903.

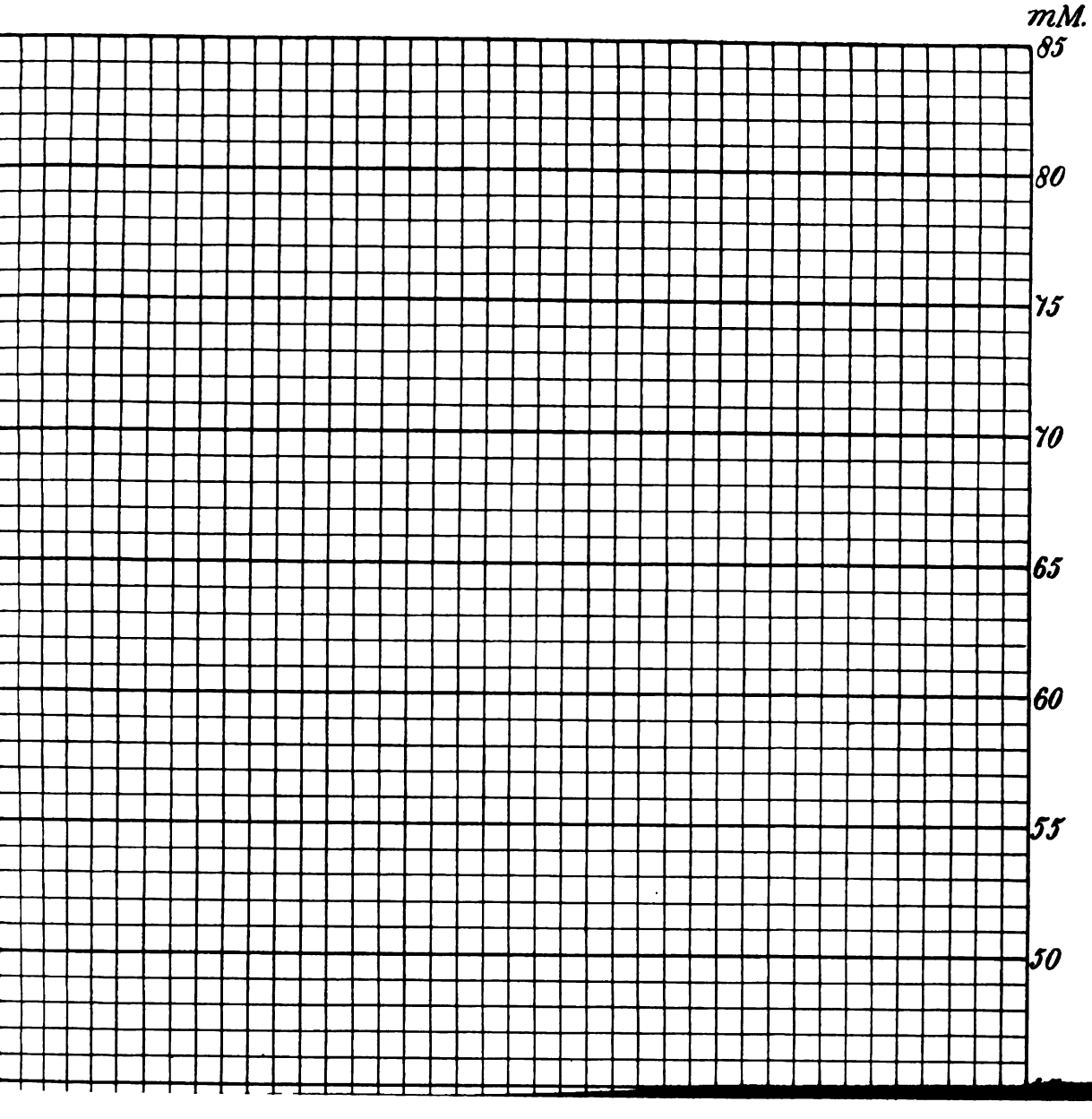
Courbe *e*. Représentation schématique des températures max. et min. dans l'expérience à couvert et dans l'expérience de contrôle à Medan-Estate (C. o. d. Sumatra) en 1903.

Courbe *f*. Représentation schématique de la température du sol dans l'expérience à couvert et dans l'expérience de contrôle à Medan-Estate (C. o. d. Sumatra) en 1903.

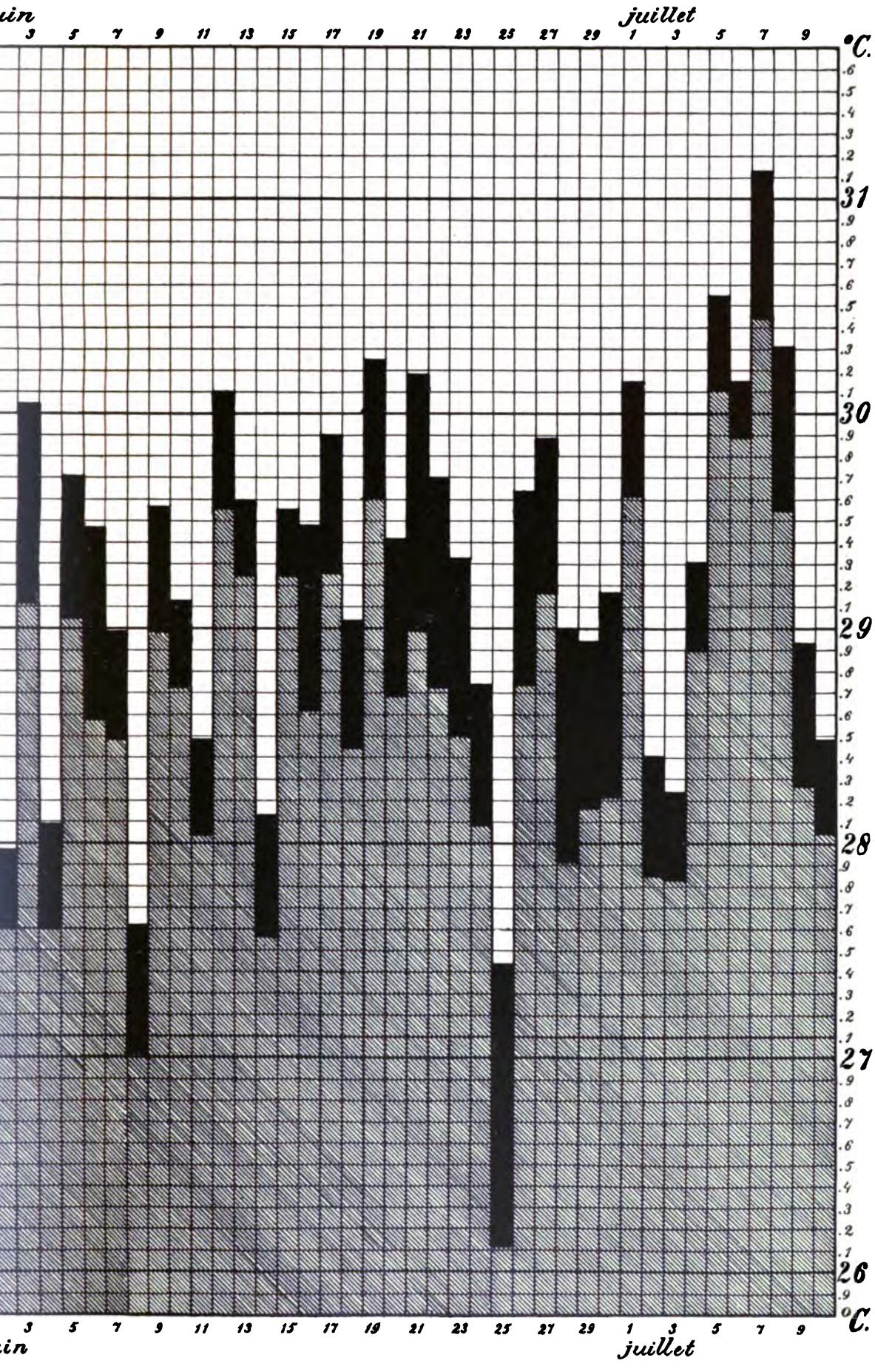
on.


juillet
heures
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 1 3 5 7 9
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
.45
.30
.15
juillet

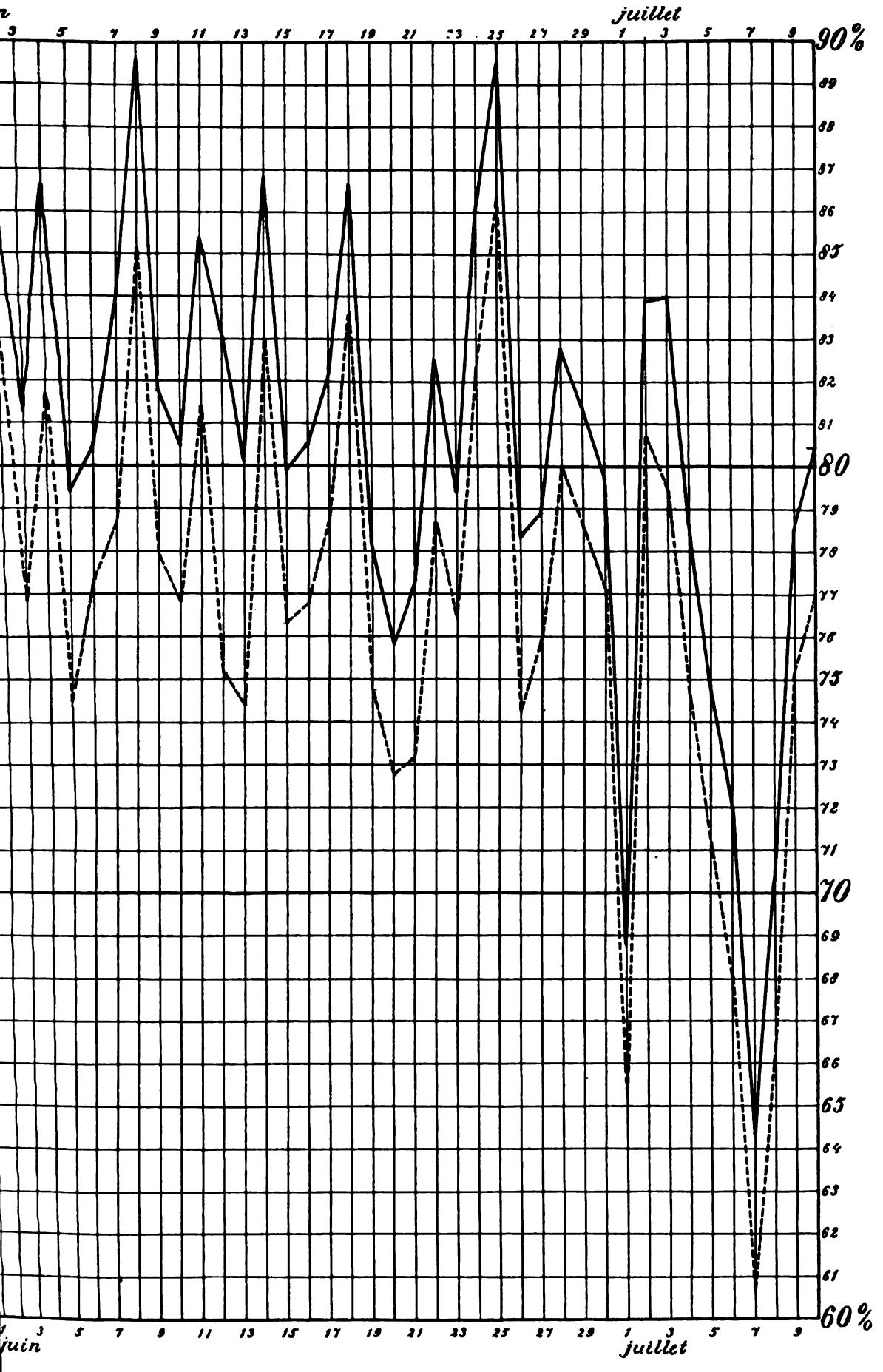
de pluie.

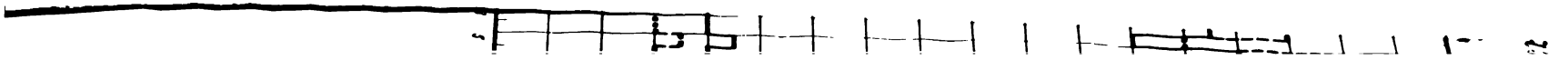


e de l'air.

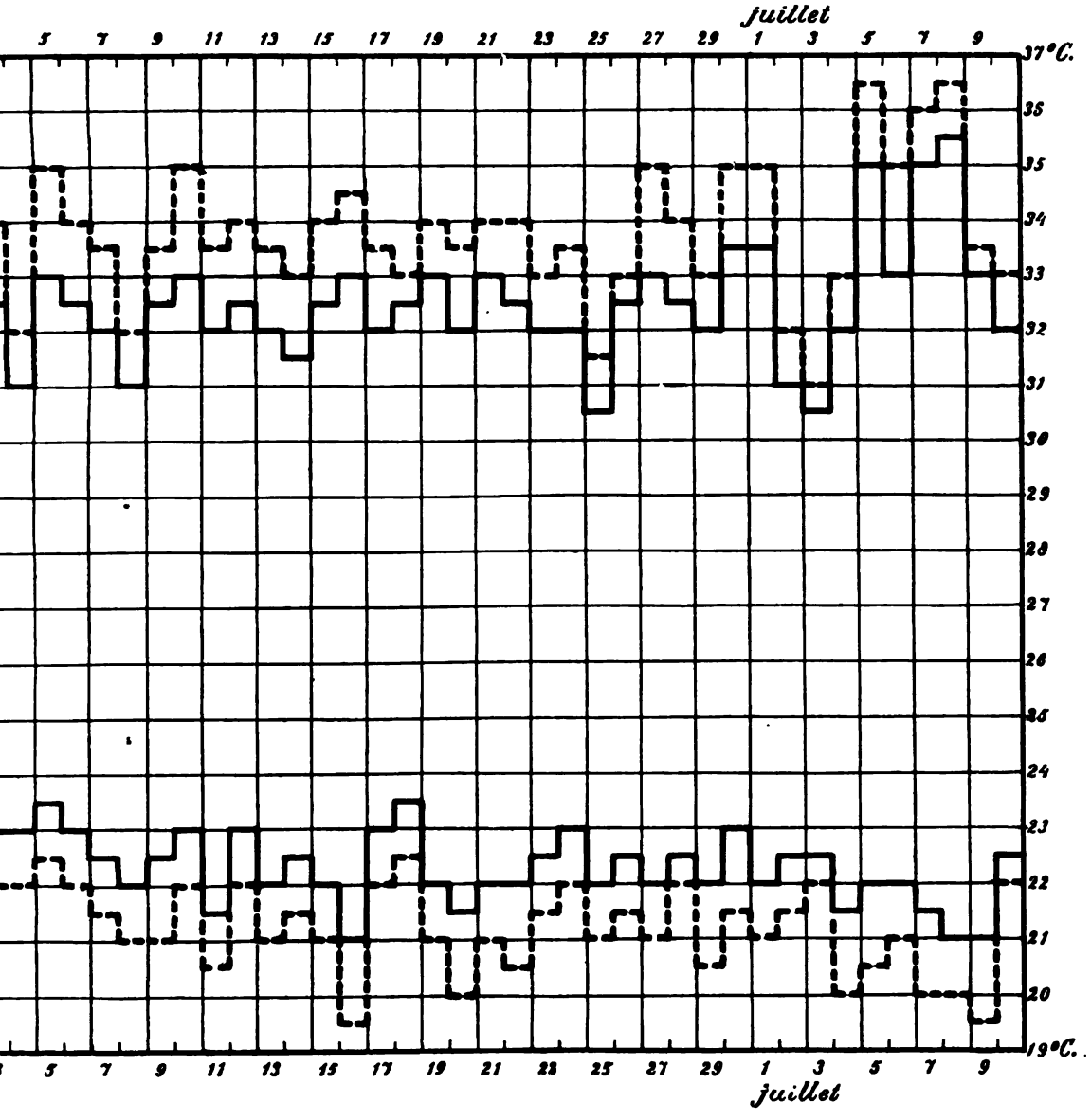

uin
juillet
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 1 3 5 7 9
°C.
31
30
29
28
27
26
°C.
3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 1 3 5 7 9
uin
juillet

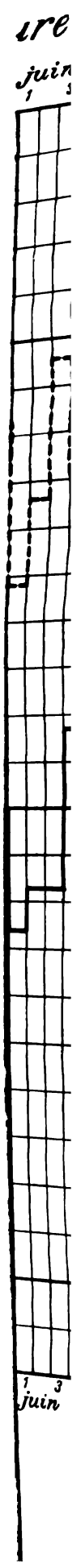
ve de l'air.



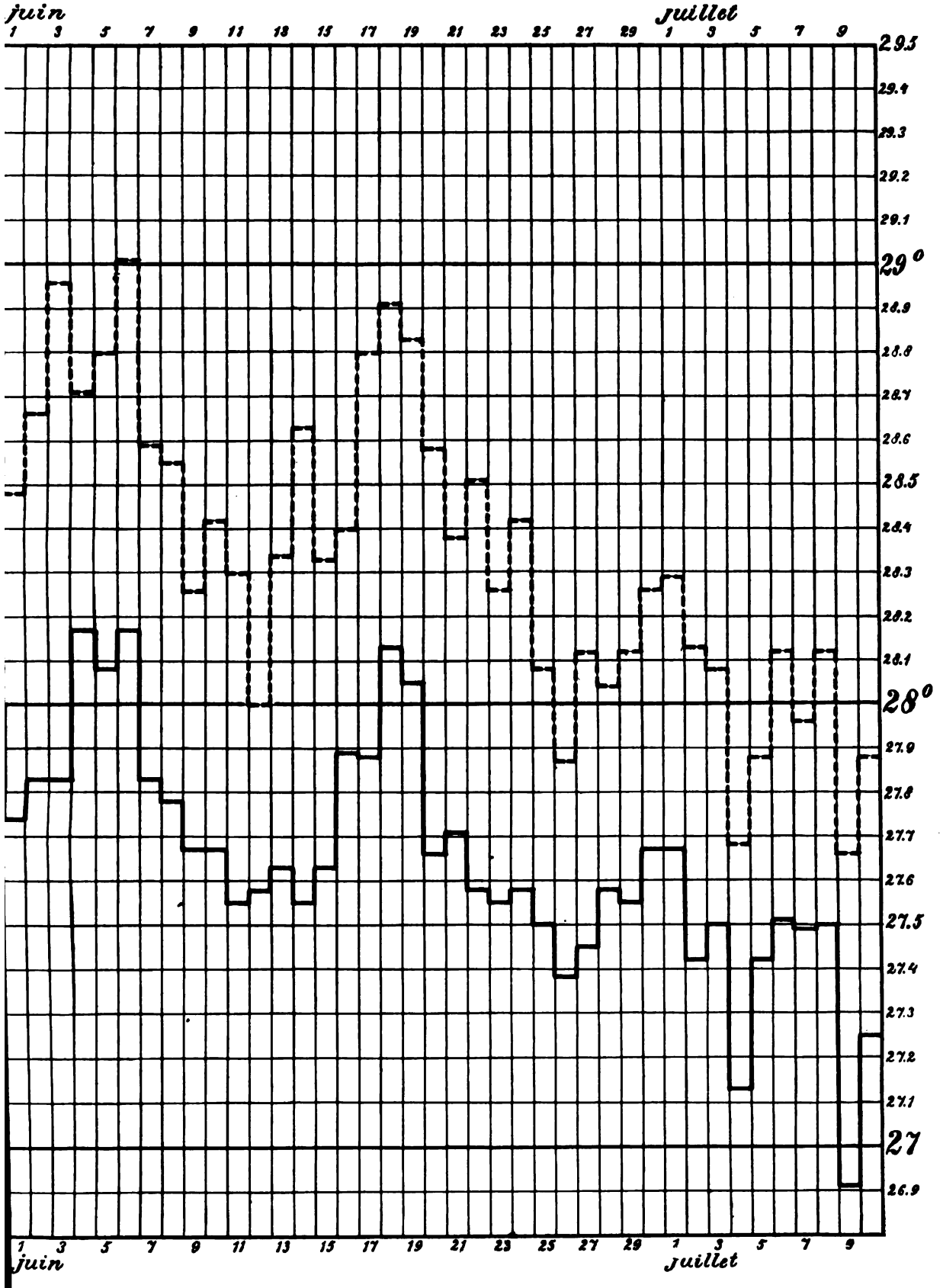


*x. et min.*


juillet
5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 1 3 5 7 9
37°C.
36
35
34
33
32
31
30
29
28
27
26
25
24
23
22
21
20
19°C.
5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 1 3 5 7 9
juillet


ure
juin
1
1
3
juin

*ure du sol.*


juin
juillet
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 1 3 5 7 9
29.5
29.4
29.3
29.2
29.1
29°
28.9
28.8
28.7
28.6
28.5
28.4
28.3
28.2
28.1
28°
27.9
27.8
27.7
27.6
27.5
27.4
27.3
27.2
27.1
27
26.9

## Bibliographie relative à la culture du tabac à l'ombre.


1) DORSEY, C. W. Cultivation of tobacco. Farmers' Bulletin n°. 5, 1903; Bureau of Agriculture Manilla.

2) FLOYD, M. L. Cultivation of cigar-leaf tobacco in Florida. Report n°. 62, U. S. Department of Agriculture, 1899.

3) JENKINS, E. H. Can wrapper leaf tobacco of the Sumatra type be raised at a profit in Connecticut? 25th Annual Report of the Connecticut Agricultural Experiment Station for 1901, pag. 295—312.

4) MAC NESS, G. T. and HINSON, W. H. Experiments in growing Cuban seed Tobacco in Texas. Bulletin n°. 27, Bureau of Soils, 1905, U. S. Department of Agriculture.

5) STURGIS, W. C. On the effects, on tobacco, of shading and the application of lime. 23th Annual Report of the Connecticut Agricultural Experiment Station for 1899, pag. 252—261.

6) WHITNEY, M. Growing Sumatra tobacco under Shade in the Connecticut Valley. Bulletin n°. 20, Bureau of Soils, 1902, U. S. Department of Agriculture.

7) — — — — Methods of Curing tobacco. Farmers' Bulletin n°. 60, 1902, U. S. Department of Agriculture.

8) *The United States Tobacco Journal* contient beaucoup d'articles et de courtes informations sur la culture du tabac à l'ombre et le tabac cultivé sous tente, depuis l'année 1901 jusqu'à ce jour.

9) *The Tobacco Leaf.* — idem.

# SOMMAIRE.

PAGE.

I. Introduction . . . . . 181
II. Aperçu de la culture à couvert du tabac en Amérique . . . . 185
III. Aperçu de l'importation du tabac de Sumatra en Amérique . 198
IV. L'expérience de culture à l'ombre à Déli (1903) . . . . . 200
A. Les préparatifs de l'expérience . . . . . 200
B. L'allure de l'expérience . . . . . 204
C. Les résultats de l'expérience . . . . . 213
D. L'appréciation de courtiers sur les deux tabacs d'épreuve. 222
V. Détails relatifs à l'unique récolte faite l'après-midi . . . . . 224
VI. Observations météorologiques dans l'expérience de culture à l'ombre et dans l'expérience de contrôle . . . . . 230
VII. La culture à l'ombre comme mesure prophylactique contre la maladie de la nielle (panachure en mosaïque) chez le tabac . 241
VIII. Considérations finales. . . . . 247
IX. Tableaux des observations météorologiques.
*a.* Relatifs à l'insolation.
*b.* „ „ la chute de pluie.
*c.* „ „ la température de l'air.
*d.* „ „ l'humidité relative de l'air.
*e.* „ „ la température max. et min.
*f.* „ „ la température du sol.
X. Bibliographie relative à la culture à l'ombre . . . . . 251

IMPRIMERIE LES HÉRITIERS LOOSJES à HAARLEM.

L. Soz 3072.10

# ARCHIVES

DU

# MUSÉE TEYLER

SÉRIE II, VOL. X.

QUATRIÈME PARTIE.

HAARLEM. — LES HÉRITIERS LOOSJES.
1907.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIC,
G. E. SCHULZE.

# ARCHIVES

DU

# MUSÉE TEYLER

---

SÉRIE II, VOL. X.

Quatrième partie.

---

HAARLEM. — LES HÉRITIERS LOOSJES.
1907.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS.

LEIPSIC,
G. E. SCHULZE.

# AVIS.

En ouvrant cette nouvelle série l'Institut scientifique et littéraire de la fondation Teyler a l'honneur d'informer les lecteurs des Archives, que M. M. les Directeurs ont résolu de lui en confier dorénavant la rédaction, qui, à partir de ce jour, se fera sous sa responsabilité.

Les Archives, comme l'indique déjà leur titre, contiendront d'abord la description scientifique des principaux instruments de précision et des diverses collections que la fondation possède, ainsi que les résultats des expériences et des études, qui seront faites par leur moyen, soit que ce travail soit fait par les conservateurs de ces collections, soit par d'autres, auxquels les Directeurs en auront accordé l'usage.

En second lieu, et pour tant que l'espace disponible ne sera pas occupé par ces publications obligatoires, les pages des Archives seront ouvertes aux savants, dont les travaux scientifiques ont rapport à une des branches, dont la culture a été recommandée à l'Institut par son fondateur.

Pour de plus amples informations à cet égard on est prié de s'adresser au Secrétaire de l'Institut,

E. VAN DER VEN.

HAARLEM, janvier 1881.

# PROGRAMMA

VAN

# TEYLER'S TWEEDE GENOOTSCHAP

TE HAARLEM,

## voor het jaar 1907.

---

H.H. DIRECTEUREN VAN TEYLERS STICHTING en de LEDEN VAN TEYLER'S TWEEDE GENOOTSCHAP hebben besloten voor het jaar 1907 de volgende prijsvraag uit te schrijven:

Het Genootschap vraagt een levensbeschrijving van GIJSBERT KAREL VAN HOGENDORP.

De geschiedkundige studiën van onzen tijd vertoonen het dubbele streven, om ruimer plaats toe te kennen aan de bestudeering der economische toestanden dan vroeger het geval was en tevens, het geschiedkundig leven der negentiende eeuw meer en meer binnen den kring der beschouwingen te trekken. In beiderlei opzicht schijnt het aanbevelingswaardig aan de belangwekkende figuur van GIJSBERT KAREL VAN HOGENDORP een boek van beteekenis te doen wijden Staatsman van groot talent, man van karakter, opmerkzaam beschouwer als hij was van het economisch leven van zijn tijd en van de waarde daarvan voor het heden en de toekomst van het volk, welks wedergeboorte hij trachtte voor te bereiden en werkelijk mocht beleven, is zijn persoonlijkheid geschikt om tot onderwerp te strekken eener studie, waarin de grondslagen van het modern leven van Nederland in het oog gevat worden.

De uitgebreide verzameling zijner, door de zorgen zijner familie uitgegeven Brieven en Gedenkschriften, de betere toegankelijkheid van de archieven der ministerieele departementen tot 1830, de belangrijke tijdschriftartikelen, enz, van FRUIN en anderen over gedeelten zijner werkzaamheid, geven aanleiding den tijd voor een werk als het bedoelde thans gekomen te achten.

De prijs voor het best en voldoend antwoord bestaat in een gouden eerepenning, op den stempel des Genootschaps geslagen, ter innerlijke waarde van *f* 400.

De antwoorden moeten worden ingezonden vóór of op den 1sten April 1908, opdat zij voor den 1sten Mei 1909 kunnen beoordeeld worden.

De verhandelingen moeten in het Nederlandsch, Fransch, Engelsch of Hoogduitsch, met eene *Latijnsche* letter, vooral goed en leesbaar geschreven zijn door eene *andere hand, dan die van den opsteller.* Ook moeten zij vóór den bepaalden tijd *in haar geheel* worden ingezonden: geene antwoorden, waaraan eenig gedeelte bij de inlevering ontbreekt, zullen tot het dingen naar den gemelden eereprijs worden toegelaten.

Alle ingezonden stukken blijven het eigendom des Genootschaps, dat de bekroonde verhandelingen, met of zonder vertaling, in zijne werken opneemt, zonder dat de schrijvers, anders dan met toestemming der Stichting, die mogen uitgeven. Ook behoudt het Genootschap aan zich het recht om van de niet bekroonde stukken zoodanig gebruik te maken als het raadzaam zal oordeelen, hetzij zonder of met vermelding van den naam des schrijvers; in het laatste geval echter niet zonder zijne toestemming.

Ook worden geene afschriften van de niet bekroonde stukken aan de schrijvers verleend, dan ten hunnen koste. De in te zenden antwoorden moeten, zonder naam en alleen met eene spreuk onderteekend, vergezeld van een verzegeld briefje, dezelfde spreuk ten opschrift voerende en van binnen des schrijvers naam en woonplaats behelzende, gezonden worden *aan het Fundatiehuis van wijlen den Heer* P. TEYLER VAN DER HULST *te Haarlem.*

---

# PROGRAMM

DER

# TEYLERSCHEN THEOLOGISCHEN GESELLSCHAFT

ZU HAARLEM,

## für das Jahr 1907.

---

Die Direktoren der TEYLERSCHEN STIFTUNG und die Mitglieder der TEYLERSCHEN THEOLOGISCHEN GESELLSCHAFT haben keine Antwort erhalten auf die Frage:

„Die Gesellschaft verlangt eine Geschichte der eschatologischen Vorstellungen innerhalb der Grenzen des Neuen Testaments."

Ausgeschrieben sind noch die folgenden Preisfragen:

1. Zur Beantwortung vor 1. Januar 1907:

„Wie verhält sich der Calvinismus unserer Tage zu dem des 16. Jahrhunderts hinsichtlich seiner Lehren?"

2. Zur Beantwortung vor 1. Januar 1908:

„Was ergibt sich aus den Schriften des Erasmus über seine theoretische und praktische Stellung zur Religion?"

—

3. Die neue Preisfrage zur Beantwortung vor 1. Januar 1909 lautet:

> „Die Gesellschaft verlangt eine systematische Auseinandersetzung der sittlichen Gedanken in Boendale's „Lekenspieghel" und in der gleichzeitigen niederländischen Literatur.

Der Preis besteht in einer goldenen Medaille von *f* 400 an innerem Wert, die ausgehändigt wird, sobald die gekrönte Arbeit druckfertig vorliegt.

Man kann sich bei der Beantwortung des Holländischen, Lateinischen, Französischen, Englischen oder Deutschen (nur mit Lateinischer Schrift) bedienen. Auch müssen die Antworten vollständig eingesandt werden, da keine unvollständige zur Preisbewerbung zugelassen wird. Alle eingesandten Antworten fallen der Gesellschaft als Eigentum anheim, welche die gekrönten, mit oder ohne Uebersetzung, unter ihre Werke aufnimmt, sodass die Verfasser sie nicht ohne Erlaubnis der Stiftung herausgeben dürfen. Auch behält die Gesellschaft sich vor, von den nicht mit dem Preis gekrönten nach Gutfinden Gebrauch zu machen, mit oder ohne Vermeldung des Namens der Verfasser, doch im ersteren Falle nicht ohne ihre Bewilligung. Auch können die Einsender nicht anders Abschriften ihrer Antworten bekommen als auf ihre Kosten. Die Antworten müssen nebst einem versiegelten Namenszettel, mit einem Denkspruch versehen, eingesandt werden an die Adresse: „Fundatiehuis van wijlen den Heer P. TEYLER VAN DER HULST, te Haarlem."

# TABLE DES MATIÈRES.

---

Points singuliers des courbes gauches données par les équations: $x=t^n$, $y=t^{n+r}$, $z=t^{n+r+m}$, par W. A. VERSLUYS.

---

Sur la réduction d'un système quelconque de forces dans l'espace $E_4$ à quatre dimensions, par P. H. SCHOUTE.

---

Recherches sur la circulation du sang, par J. L. HOORWEG.

---

La charge de contact entre une paroi poreuse et des solutions salines, par E. VAN DER VEN.

---

Sur quelle échelle s'accomplit le phénomène du transport atmosphérique de sel marin, par EUG. DUBOIS.

---

# FONDATION

DE

# P. TEYLER VAN DER HULST,

## À HAARLEM.

**Directeurs.**

L. P. ZOCHER.
P. LOOSJES.
Mr. A. W. THÖNE.
J. J. VAN OORDE.
J. A. FONTEIN.

**Secrétaire.**

Mr. A. A. VAN DER MERSCH.

**Trésorier.**

P. DROSTE.

**Conservateur du Cabinet de Physique.**

Dr. E. VAN DER VEN.

**Conservateur du musée de Paléontologie et de Minéralogie.**

*Prof.* Dr. EUG. DUBOIS.

**Bibliothécaire.**

J. J. VERWIJNEN.

**Conservateur des Collections de tableaux, de dessins et de gravures.**

H. J. SCHOLTEN.

**Conservateur du cabinet numismatique.**

Jhr. H. M. RIDDER BARONET SPEELMAN.

# MEMBRES DES SOCIÉTÉS TEYLERIENNES.

---

**De la première Société ou Société de théologie.**

*Prof.* Dr. S. CRAMER.
*Prof.* Dr. I. J. DE BUSSY.
Dr. J. G. BOEKENOOGEN.
*Prof.* Dr. D. E. J. VÖLTER.
Dr. A. C. DUKER.
*Prof.* Dr. H. J. ELHORST.

---

**De la seconde Société.**

Dr. E. VAN DER VEN.
H. J. SCHOLTEN.
J°. DE VRIES.
*Prof.* Dr. HUGO DE VRIES.
*Prof.* Dr. P. J. BLOK.
Dr. H. J. DE DOMPIERRE DE CHAUFEPIE.

---

# POINTS SINGULIERS

DES

# COURBES GAUCHES

DONNÉES PAR LES ÉQUATIONS:

$$x = t^n, \quad y = t^{n+r}, \quad z = t^{n+r+m}.$$

PAR

W. A. VERSLUYS.

---

## CHAPITRE I.

### Des singularités de la courbe $C(n, r, m)$.

§ 1. *Introduction.*

Dans les pages suivantes je me propose d'étudier des points singuliers supérieurs de courbes gauches. Pour fixer les idées j'ai supposé que ces singularités se trouvent sur des courbes gauches rationnelles $C(n, r, m)$ très spéciales dont les coordonnées sont données par les expressions

$$x = t^n, \quad y = t^{n+r}, \quad z = t^{n+r+m}.$$

Les résultats obtenus pour les points singuliers supérieurs à l'aide de ces courbes rationnelles sont pour le plupart encore vrais pour des points singuliers supérieurs de courbes gauches algébriques quelconques. Les démonstrations se simplifiant notablement pour les courbes $C(n, r, m)$ et ces courbes offrant de précieux contrôles, j'ai cru devoir publier d'abord les démonstrations pour ce cas simple, en réservant pour un memoire suivant la démonstration de ces résultats pour le cas que ces singularités se trouvent sur des courbes gauches quelconques

Je déterminerai succesivement: 1° le nombre des points doubles ordinaires qui sont équivalents au point singulier, le nombre des tangentes doubles ordinaires équivalentes à la tangente au point

singulier, et le nombre des plans doubles ordinaires équivalents au plan osculateur au point singulier;

2° le nombre des branches nodales, de la développable $D$ engendrée par les tangentes à la courbe gauche, passant par le point singulier;

3° le nombre des intersections, coïncidant avec le point singulier, de la courbe gauche et de la courbe nodale avec la deuxième surface polaire de la développable $D$ prise par rapport à un point quelconque;

4° les singularités que présente la courbe nodale au point singulier.

Pour les singularités ordinaires ces nombres et l'influence de la singularité sur la courbe nodale ont été déterminés par CREMONA [1]). La méthode qu'il a inventé pour l'étude des singularités ordinaires s'est prouvé encore applicable au cas général. Ce mémoire est donc à considérer comme une suite de ces belles recherches de CREMONA.

Je me suis donc servi des mêmes notations pour indiquer les singularités ordinaires à l'exception de celles pour un point ou plan double. Pour ces deux singularités je me suis servi des notations $H$ et $G$ qu'on trouve p. e. dans les ouvrages de SALMON [2]) et de E. PASCAL [3]).

§ 2. *Des nombres $n$, $r$, $m$.*

Considérons une courbe rationnelle, dont les coordonnées sont données par les expressions

$$x_1 = at^n, \quad y_1 = bt^{n+r}, \quad z_1 = ct^{n+r+m},$$

où $n$, $r$ et $m$ sont des entiers positifs. Je ne m'occuperai dans les pages suivantes que de propiétés projectives. Ces propriétés ne changeant pas par une transformation des coordonnées projective, je ne perd rien en généralité en supposant les axes des coordonnées rectangulaires et en effectuant la transformation

$$x = x_1 : a, \quad y = y_1 : b, \quad z = z_1 : c.$$

Les expressions donnant les coordonnées de la courbe prennent par cette transformation la forme plus simple

---

[1]) CREMONA—CURTZE, *Oberflächen*, Cap. IV.

[2]) G. SALMON, *Geometry of three dimensions*, § 328

[3]) E. PASCAL, *Repertorio di Matematiche Superiori* II, p. 320.

$$x = t^n, \quad y = t^{n+r}, \quad z = t^{n+r+m}.$$

Les propiétés projectives de cette courbe ne dépendant, que des nombres $n$, $r$ et $m$ j'indiquerai, pour la suite, cette courbe par la notation $C\ (n,\ r,\ m)$.

Les propriétés de la courbe

$$x = A\,t^n, \quad y = B\,t^{n+r}, \quad r = C\,t^{n+r+m}$$

ne dépendant que des nombres $n$, $r$ et $m$, je dirai que deux courbes $C\ (n,\ r,\ m)$ sont de même espèce quand ces courbes ne se distinguent que par les coefficients $A$, $B$ et $C$.

A chaque valeur du paramètre $t$ il correspond un système de valeurs des coordonnées $x$, $y$ et $z$, donc à chaque valeur de $t$ il correspond un seul point de la courbe $C\ (n,\ r,\ m)$. Pour obtenir que, réciproquement, il ne correspond à chaque point de la courbe qu'une seule valeur du paramètre $t$, il faut que les trois nombres $n$, $r$ et $m$ ne possèdent pas un facteur commun. En effet, supposons qu'un même point de la courbe correspond à deux paramètres $t_1$ et $t_2$, ces paramètres devraient satisfaire aux conditions

$$t_1^{\,n} = t_2^{\,n}, \quad t_1^{\,n+r} = t_2^{\,n+r}, \quad t_1^{\,n+r+m} = t_2^{\,n+r+m},$$

ou bien

$$(t_1 : t_2)^n = 1, \quad (t_1 : t_2)^{n+r} = 1, \quad (t_1 : t_2)^{n+r+m} = 1. \quad (A)$$

C'est un théorème connu que les équations binômes $x^p - 1 = 0$ et $x^q - 1 = 0$, pour $p$ et $q$ premiers entre eux n'admettent pas d'autre racine commune que l'unité. On peut donc seulement satisfaire aux équations $(A)$ pour des valeurs inégales de $t_1$ et de $t_2$ quand $n$, $n + r$ et $n + r + m$ possèdent un facteur commun, on cequi revient au même quand $n$, $r$ et $m$ possèdent un facteur commun. Quand les nombres $n$, $r$ et $m$ ne possèdent pas de facteur commun on ne peut donc pas satisfaire aux équations $(A)$ pour $t_1 \neq t_2$ et à chaque point de la courbe $C(n, r, m)$ il correspondra une seule valeur du paramètre $t$.

Nous supposerons donc dans les pages suivantes que les 3 nombres $n$, $r$ et $m$ n'ont pas de facteur commun.

## § 3. *Des points singuliers* $M_1$ et $M_2$.

Coupons la courbe $C(n, r, m)$ par un plan passant par l'origine des coordonnées $M_1$. On trouve les paramètres des points d'inter-

section en remplaçant dans l'équation du plan $ax + by + cz = 0$, $x$, $y$ et $z$ par $t^n$, $t^{n+r}$ et $t^{n+r+m}$, cequi donne

$$at^n + bt^{n+r} + ct^{n+r+m} = 0.$$

De cette équation en $t$, $n$ racines sont nulles, le point de la courbe $C(n, r, m)$, correspondant au paramètre $t = 0$, compte donc pour $n$ intersections de la courbe $C(n, r, m)$ avec le plan passant par l'origine des coordonnées. L'origine des coordonnées $M_1$ est donc un point singulier d'ordre $n$ [1]) de la courbe $C(n, r, m)$, ou bien il passe par le point $M_1$ $n$ branches de la courbe $C(n, r, m)$.

Soit $p$ un nombre réel, on obtient les coordonnées des $n$ points de rencontre du plan $x = p^n$ avec les $n$ branches passant par l'origine $M_1$ en substituant

$$t = p\left\{\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right\},$$

dans les expressions

$$x = t^n, \quad y = t^{n+r}, \quad r = t^{n+r+m};$$

$k$ étant un entier variant de $o$ à $n - 1$.

A chaque valeur de $k$ il correspond un point de la courbe $C(n, r, m)$ situé dans le plan $x = p^n$. Les $n$ branches passant par l'origine $M_1$ constituent d'après HALPHEN un groupe circulaire [2]) ou un cycle [3]).

Le nombre d'intersections de la courbe $C(n, r, m)$ avec le plan passant par l'origine et coïncidant avec l'origine ne sera plus grand que $n$ que pour $a = 0$. Les seuls plans passant par une tangente à la courbe $C(n, r, m)$ au point $M_1$ sont donc des plans passant par l'axe des $x$. L'axe des $x$ est donc tangente aux $n$ branches de la courbe passant par le point singulier $M_1$.

Coupons la courbe par un plan quelconque passant par l'axe des $x$,

$$by + cz = 0.$$

---

[1]) PLÜCKER, *Theorie der Algebraischen Curven.* Bonn 1839. Abschnitt II, § 3, art. 60, p. 205.

[2]) HALPHEN, Sur les points singuliers des Courbes Alg. Planes. *Mém. présentés p. divers Sav. à l'Ac. des Sciences de l'Institut de France.* T. 26, p. 17.

[3]) HALPHEN, Sur les singularités des courbes gauches algébriques. *Bulletin d. l. Soc. Math. d. France.* T. 6, p. 12.

Les paramètres des points d'intersection sont donnés par l'équation en $t$,

$$b t^{n+r} + c t^{n+r+m} = 0.$$

De cette équation en $t$, $n+r$ racines sont nulles, le point $M_1$ correspondant au paramètre $t=0$ compte donc pour $n+r$ intersections de la courbe $C(n, r, m)$ avec tout plan passant par l'axe des $x$, ou bien l'axe des $x$ a de commun, au point singulier $M_1$, $n+r$ points consécutifs avec la courbe $C(n, r, m)$ Le point $M_1$ est donc une singularité du rang $r$ [1]).

Le nombre des intersections réunies au point $M_1$ ne peut devenir plus grand que $n+r$ que pour le cas que $b=0$. Les $n$ branches de la courbe $C(n, r, m)$ passant par le point $M_1$ ont donc toutes pour plan osculateur le plan $z=0$. Ce plan $z=0$ a, ou point $M_1$, de commun avec la courbe $C(n, r, m)$, $n+r+m$ points. Le point singulier $M_1$ est donc une singularité de la classe $m$ [2]). J'indiquerai, pour la suite, par la notation $M(n, r, m)$ que le point $M$ est une singularité de l'ordre $n$, du rang $r$ et de la classe $m$, ou bien que les $n$ branches de la courbe $C(n, r, m)$ passant par le point $M$ forment un cycle $M(n, r, m)$ [3]).

Remplaçons $x$, $y$ et $z$ par $x:u$, $y:u$ et $z:u$, les expressions pour les coordonnées d'un point de la courbe $C(n, r, m)$ deviennent

$$x:u = t^n, \; y:u = t^{n+r}, \; z:u = t^{n+r+m}.$$

En posant $z=1$ et remplaçant $t$ par $1:t$ on en déduit

$$y = t^m, \; x = t^{m+r}, \; u = t^{n+r+m}.$$

Le point $M_2$ $(y=x=u=0)$, c'est à dire, le point à l'infini de l'axe des $Z$ est donc un point singulier $M_2(m, r, n)$ de la courbe $C(n, r, m)$. Les deux cycles $M_1(n, r, m)$ et $M_2(m, r, n)$ ne se distinguent que par le changement de $n$ en $m$ et vice-versa, ces 2 cycles sont donc des cycles corrélatifs [4])

*La courbe $C(n, r, m)$ possède donc deux singularités, $M_1(n, r, m)$ et $M_2(m, r, n)$ dont l'une est le cycle corrélatif de l'autre.*

Je démontrerai tantôt (§§ 6, 8, 10) que les points $M_1$ et $M_2$ sont les seuls points singuliers de la courbe $C(n, r, m)$.

---

[1]) HALPHEN, *Bull. d. l. Soc. Mat. d. France*, t. 6, p. 14.

[2]) PLÜCKER, Loc. cit..

[3]) HALPHEN, *Bull. d. l. Soc. Math. d. France*, t. 6, p. 14.

[4]) HALPHEN, Loc. cit. p. 15.

Nous venons de voir que, par un changement des axes des coordonnées, la courbe $C(n, r, m)$ est transformée en une courbe $C(m, r, n)$. Par conséquent, deux courbes $C(n, r, m)$ et $C(m, r, n)$ seront dits être de même espèce.

§ 4. *Détermination du genre, de l'ordre, de la classe et du rang de la courbe $C(n, r, m)$.*

La courbe $C(n, r, m)$ étant une courbe rationnelle, elle est du genre $p = 0$.

Coupons la courbe par un plan quelconque

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Les paramètres des points d'interrection sont donnés par l'équation en $t$

$$at^n + bt^{n+r} + ct^{n+r+m} + d = 0.$$

A chaque racine $t$ de cette équation il correspond un point de la courbe $C(n, r, m)$. Le nombre des racines étant $n + r + m$, la courbe $C(n, r, m)$ rencontre le plan quelconque en $n + r + m$ points. La courbe $C(n, r, m)$ est donc du degré $\nu = n + r + m$.

On trouve facilement que l'équation du plan osculateur de la courbe $C(n, r, m)$ au point $P(t)$, correspondant au paramètre $t$, est

$$\begin{aligned} m(n + r)(n + r + m)\, t^{r+m} x - n(r + m)(n + r + m)\, t^m y \\ + nr(n + r)\, z - rm(r + m)\, t^{n+r+m} = 0. \end{aligned}$$

Par chaque point de l'espace il passe donc $n + r + m$ plans osculateurs, ou bien, la courbe $C(n, r, m)$ est de la classe $\mu = n + r + m$ On a donc $\nu = \mu$, c'est à dire, la courbe $C(n, r, m)$ est une courbe autopolaire. Les coordonnées tangentielles du plan osculateur sont

$$\begin{aligned} \alpha &= m(n + r)(n + r + m)\, t^{m+r}, \\ \beta &= -n(r + m)(n + r + m)\, t^m, \\ \gamma &= nr(n + r), \\ \delta &= -rm(r + m)\, t^{n+r+m}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \alpha : \gamma &= \frac{m(n + r + m)}{nr}\, t^{r+m}, \\ \beta : \gamma &= -\frac{(r + m)(n + r + m)}{r(n + r)}\, t^m, \\ \delta : \gamma &= -\frac{m(r + m)}{n(n + r)}\, t^{n+r+m}. \end{aligned}$$

La courbe corrélative de la courbe $C(n, r, m)$ est donc une courbe de même espèce que la courbe $C(n, r, m)$, de laquelle nous venons de voir qu'on peut représenter les coordonnées par les expressions (§ 3)

$$y = t^m, \; x = t^{r+m}, \; u = t^{n+r+m}.$$

Les coordonnées des points et des plans osculateurs de la courbe $C(n, r, m)$ étant des fonctions entières d'un paramètre $t$, la courbe $C(n, r, m)$ est une courbe rationnelle entière [1].

On vérifie facilement que les équations de la tangente à la courbe $C(n, r, m)$ au point $P(t)$ sont,

$$\frac{t^n - x}{n\, t^{n-1}} = \frac{t^{n+r} - y}{(n+r)\, t^{n+r-1}} = \frac{t^{n+r+m} - z}{(n+r+m)\, t^{n+r+m-1}},$$

ou bien

$$r t^{n+r} - (n+r)\, t^r x + n y = 0,$$
$$(r+m)\, t^{n+r+m} - (n+r+m)\, t^{r+m} x + n z = 0.$$

Cette tangente rencontre la droite quelconque

$$a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0,$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0,$$

à la condition que $t$ satisfait à l'équation suivante

$$\begin{vmatrix} r t^{n+r} & -(n+r)\, t^r & n & 0 \\ (r+m)\, t^{n+r+m} & -(n+r+m)\, t^{r+m} & 0 & n \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation étant du degré $n + 2r + m$ en $t$, la droite quelconque rencontre $n + 2r + m$ tangentes de la courbe $C(n, r, m)$, ou bien cette courbe est du rang $\varrho = n + 2r + m$.

§ 5. *Détermination des singularités* $\beta, \alpha, h + H, g + G, \theta, \xi + \omega'$ et $\eta + \omega$.

Soit $\beta$ le nombre des points stationnaires (points de rebroussement) de la courbe $C(n, r, m)$, soit $H$ le nombre des noeuds effectifs et $h$ le nombre des noeuds apparents.

---

[1]) A. Brill, Ueber Singularitäten ebener algebraischer Curven und eine neue Curvenspecies. *Math. Ann.* Band 16, 1879.

Des valeurs $p = 0$, $\nu = \mu = n + r + m$, $\varrho = n + 2r + m$. (§ 4) on détermine au moyen de la formule

$$p = \frac{1}{2}(\nu - 1)(\nu - 2) - (h + H + \beta)$$

et de la formule de CAYLEY—PLÜCKER

$$\varrho = \nu(\nu - 1) - 2(h + H) - 3\beta$$

le nombre des points stationnaires $\beta$ et le nombre des noeuds $h + H$ d'une projection quelconque de la courbe $C(n, r, m)$.

On trouve

$$\beta = n + m - 2,$$
$$h + H = \{r(n + r + m - 1) + (n + m - 2)(n + r + m - 3)\} : 2.$$

La courbe $C(n, r, m)$ étant autopolaire (§ 4) le nombre des plans stationnaires $\alpha$ est égal au nombre des points stationnaires $\beta$, donc on a

$$\alpha = n + m - 2.$$

De même, le nombre $g + G$ des bitangentes d'une section quelconque de la développable $D$, engendrée par les tangentes à la courbe $C(n, r, m)$, est égal à $h + H$, donc

$$g + G = \{r(n + r + m - 1) + (n + m - 2)(n + r + m - 3)\} : 2.$$

Pour déterminer le nombre des tangentes stationnaires $\theta$ de la courbe $C(n, r, m)$, appliquons à une section quelconque de la développable $D$ la formule connue de géométrie plane

$$\varkappa - \iota = 3(n - m).$$

On trouve alors

$$\nu + \theta - \alpha = 3(\varrho - \mu),$$

d'où

$$\theta = 2r - 2$$

Soit $\xi$ le degré de la courbe nodale et $\omega'$ le nombre des génératrices doubles de la développable $D$, par la formule de CAYLEY—PLÜCKER

$$\mu = \varrho(\varrho - 1) - 2(\xi + \omega') - 3(\nu + \theta),$$

on trouve

$$\xi + \omega' = \{\varrho(\varrho - 1) - \mu - 3(\nu + \theta)\} : 2,$$
$$\xi + \omega' = \{(n + 2r + m - 2)(n + 2r + m - 3) - 2r\} : 2.$$

La courbe $C(n, r, m)$ étant autopolaire, on a, $\eta + \omega = \xi + \omega'$, où $\eta$ est le nombre de plans bitangents à la courbe $C(n, r, m)$ passant par un point quelconque et où $\omega$ est le nombre des tangentes doubles de la courbe $C(n, r, m)$, par conséquent,

$$\eta + \omega = \{(n + 2r + m - 2)(n + 2r + m - 3) - 2r\} : 2$$

§ 6. *Les points $M_1$ et $M_2$ sont les seules singularités de la courbe $C(n, r, m)$.*

La branche d'une courbe gauche passant par un point ordinaire de cette courbe constitue un cycle du degré un, du rang un et de la classe un. On obtient les singularités les plus simples quand une des 3 quantités degré, rang, classe, devient 2 les deux autres restant un. Les 3 singularités les plus simples sont donc

le plan stationnaire : $\alpha(1, 1, 2)$,
la tangente stationnaire : $\theta(1, 2, 1)$,
le point stationnaire : $\beta(2, 1, 1)$.

En prenant un point quelconque, singulier ou ordinaire, d'une courbe gauche pour l'origine des coordonnées l'axe des $x$ étant la tangente et le plan $z = 0$ étant le plan osculateur, on peut développer les coordonnées d'un point de cette courbe, assez voisin de l'origine, de la manière suivante

$$x = t^n, \; y = t^{n+r} \; [t], \; z = t^{n+r+m} \; [t] \; ^{1}),$$

où $[t]$ représente une série entière en $t$, commençant par un terme constant.

Pour chaque point ordinaire $n + r + m = 3$ et le développement pour $z$ commence par un terme en $t^3$, d'où il résulte qu'en un point ordinaire le plan osculateur et la courbe ont 3 points consécutifs de commun. Quand le point, choisi pour origine des coordonnées, est un des 3 points singuliers $\alpha$, $\beta$ ou $\theta$, $n + r + m = 4$; la courbe gauche et son plan osculateur en un point $\alpha$, $\theta$ ou $\beta$ auront donc, au point singulier, 4 points consécutifs de commun. Pour chaque singularité supérieure ce nombre de points communs sera encore plus grand que 4, $n + r + m$ étant supérieur à quatre. On peut donc trouver tous les points singuliers (sauf les noeuds) d'une courbe gauche en déterminant les points où quatre points

---

[1]) HALPHEN. *Bull. d. l. Soc. Math. d. France.* T. 6, p. 14.

consécutifs sont dans un plan. Quatre points consécutifs seront dans un plan à la condition que

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = 0.$$

Les paramètres $t$ correspondants aux points singuliers de la courbe $C(n, r, m)$ sont donc des racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} n\,t^{n-1} & (n+r)t^{n+r-1} & (n+r+m)t^{n+r+m-1} \\ n(n-1)t^{n-2} & (n+r)(n+r-1)t^{n+r-2} & (n+r+m)(n+r+m-1)t^{n+r+m-2} \\ n(n-1)(n-2)t^{n-3} & (n+r)(n+r-1)(n+r-2)t^{n+r-3} & (n+r+m)(n+r+m-1)(n+r+m-2)t^{n+r+m-3} \end{vmatrix}$$

ou bien

$$n\,r\,m\,(n+r)\,(r+m)\,(n+r+m)\,t^{3n+2r+m-6} = 0.$$

Cette équation n'étant pas satisfaite pour toute valeur de $t$ la courbe $C(n, r, m)$ n'est pas une courbe plane. La courbe $C(n, r, m)$ ne possède donc des points singuliers qu'au point $M_1$ correspondant au paramètre $t = 0$ à la condition que $3n + 2r + m > 6$ et peut-être encore au point correspondant au paramètre $t = \infty$. En développant les coordonnées, $y$, $x$ et $u$ en fonction de $1 : t$ (§ 3) on trouve, en effet, que le point $M_2$ correspondant au paramètre $t = \infty$ est aussi un point singulier quand on a $3m + 2r + n > 6$.

Les conditions $3n + 2r + m > 0$ et $3m + 2r + n > 6$ sont toujours satisfaites sauf pour le cas que $n = r = m = 1$.

La courbe $C(n, r, m)$ ne possède donc que 2 points singuliers $M_1$ et $M_2$; dans le cas que cette courbe est une cubique gauche les points $M_1$ et $M_2$ sont aussi des points ordinaires.

En déterminant les nombres des points stationnaires réunis aux points $M_1$ et $M_2$ il faut trouver que la somme de ces 2 nombres soit précisement le nombre total $\beta$ des points stationnaires de la courbe $C(n, r, m)$. De même pour les singularités $\theta$ et $\alpha$.

Pour un cycle $\alpha\,(1, 1, 2)$ on trouve $3n + 2r + m - 6 = 1$.

Pour un cycle $\theta\,(1, 2, 1)$ on trouve $3n + 2r + m - 6 = 2$.

Pour un cycle $\beta\,(2, 1, 1)$ on trouve $3n + 2r + m - 6 = 3$.

On a donc le résultat que le paramètre correspondant à un cycle $\alpha$ est une racine simple, le paramètre correspondant à un cycle $\theta$ est une racine double et le paramètre correspondant à un cycle $\beta$ est une racine triple de l'équation donnant les para-

mètres des points pour lesquels quatre points consécutifs sont dans un plan. Ce résultat obtenu pour la courbe spéciale $C(n, r, m)$ se généralise facilement pour toute courbe gauche algébrique.

Et plus généralement on obtient pour chaque courbe gauche algébrique le théorème suivant:

*Le paramètre correspondant à un cycle $(n, r, m)$ est une racine de la quelle le degré de multiplicilé est $3n + 2r + m - 6$, de l'équation donnant les paramètres des points où quatre points consécutifs de la courbe se trouvent dans un plan.*

En considérant la courbe corrélative d'une courbe gauche on trouve facilement que par chacun des points $\beta$, $\theta$ et $\alpha$ il passe 4 plans osculateurs consécutifs. On peut donc également déterminer les paramètres des points $\beta$, $\theta$ et $\alpha$ de la courbe $C(n, r, m)$ en déterminant les points par lesquels passent 4 plans osculateurs consécutifs [1]). Soit $U = 0$ l'équation en $t$ donnant les paramètres de ces points. Pour la courbe $C(n, r, m)$ l'équation $U = 0$ se réduit à $A\, t^{3m+2r+n-6} = 0$, $A$ désignant une constante dépendant des exposants $n$, $r$ et $m$ On retrouve de cette manière que les seules singularités que possède la courbe $C(n, r, m)$ sont les points $M_1$ et $M_2$. On trouve encore facilement le résultat suivant.

Les paramètres correspondant respectivement à des cycles $\beta$, $\theta$ et $\alpha$ sont des racines simples, doubles et triples de l'équation $U = 0$, donnant les paramètres correspondant aux points par les quels passent 4 plans osculateurs consécutifs de la courbe gauche.

Ou plus généralement:

*Le paramètre correspondant à un cycle $(n, r, m)$ est une racine dont le degré de multiplicité est $3m + 2r + n - 6$ de l'équation donnant les paramètres des points par lesquels passent quatre plans osculateurs consécutifs.*

§ 7. *Détermination des singularités $\beta_1$, $\alpha_1$, $H_1$, $G_1$, équivalentes au cycle $M_1$ $(n\ r, m)$.*

Projetons la courbe $C(n, r, m)$ sur le plan $z = 0$, le centre de projection étant le point à l'infini du plan $x = 0$ pour lequel on a $y : z = tg\, \varphi$. Les coordonnées d'un point de la projection $p_z$ seront

$$x = t^n,\ y = t^{n+r} - t^{n+r+m}\, tg\, \varphi$$

[1]) SALMON, *Geometry of three Dimensions*, § 324.

La projection $p_z$ possède donc au point $M_1$ un cycle $(n, r)$. Par rapport aux formules de PLÜCKER et par rapport au genre, un cycle $(n, r)$ est équivalent à $n-1$ points stationnaires et à $\{M-3(n-1)\}:2$ noeuds [1] [2]) où $M$ représente le nombre des intersections de la courbe avec sa première polaire, coïncidantes avec le point $M_1$ $(n, r)$. HALPHEN [3]) et STEPHEN SMITH [4]) ont donné des expressions pour le nombre $M$ des intersections, réunies en $M_1$, de la courbe avec sa première polaire ou pour le double du nombre des intersections de la courbe avec elle même ou bien encore pour „the discriminantal index". Dans notre cas ces expressions se réduisent à la forme simple

$$M = (n+r)(n-1) + m(q_1 - 1),$$

où $q_1$ est le plus grand commun diviseur des nombres $n$ et $n+r$, parce que les nombres $q_1$ et $n+r+m$ n'auront pas un facteur commun, les nombres $n$, $r$ et $m$ ne possèdant pas de facteur commun (§ 2). Le nombre des noeuds équivalents au cycle $M_1$ $(n, r)$ sera donc

$$\delta = \{(n+r-3)(n-1) + m(q_1 - 1)\}:2 \quad [5]).$$

Les nombres des points stationnaires $\varkappa$ et des noeuds $\delta$ équivalents au cycle $M_1$ $(n, r)$ de la projection $p_z$ sont donc indépendants de la valeur de $\varphi$, sauf pour les valeurs $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi : 2$.

Les points stationnaires $\varkappa$ d'une projection sont les projections de points stationnaires $\beta$ de la courbe gauche ou sont dûs au passage par le centre de projection de tangentes à la courbe gauche. Un point de la projection $p_z$ et le point de la courbe $C(n, r, m)$, duquel il est la projection correspondent à la même valeur du paramètre $t$. Le point $M_1$ de la projection est donc la projection du point $M_1$ de la courbe gauche $C(n, r, m)$ ces 2 points correspondant au paramètre $t = 0$. La tangente à la courbe $C(n, r, m)$ étant l'axe des $X$ cette tangente ne passe pas par le centre de projection. Les $n-1$ points stationnaires de la projection, lesquels

[1]) CAYLEY, *Coll. Math. Papers*. Vol. 5. On the higher Sing. of a plane Curve, p. 524.

[2]) STEPHEN SMITH, On the higher Sing. of plane Curves. *Proceedings of the London. Math. Soc.* Vol. VI, p. 161.

[3]) HALPHEN, *Mém. d. l'Ac. d. Paris* (sav. étr.). T. 26, p. 42 et 50.

[4]) STEPHEN SMITH, loc. cit, p. 159.

[5]) A. BRILL, Ueber Sing. ebener Curven, etc. *Math. Ann.* Band 16, p. 400.

coïncident avec le point $M_1$ sont donc les projections d'autant de points stationnaires $\beta$ de la courbe $C(n, r, m)$, coïncidant avec le point $M_1$.

Le cycle $M_1(n, r, m)$ doit donc compter pour $n-1$ points stationnaires, ou bien

$$\beta_1 = n - 1 \text{ [1]}.$$

De même on démontrerait que le cycle $M_2(n, r, m)$ compte pour un nombre de points stationnaires

$$\beta_2 = m - 1.$$

La courbe $C(n, r, m)$, ne possédant des points stationnaires $\beta$ en dehors des points $M_1$ et $M_2$ (§ 6), le nombre total des points stationnaires $\beta$ de la courbe $C(n, r, m)$ est

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 = n + m - 2,$$

c'est la valeur que nous avons trouvé au § 5.

Le cycle $M_1(n, r, m)$ étant le cycle corrélatif du cycle $M_2(m, r, n)$ le nombre des plans stationnaires $\alpha_1$ équivalants au cycle $M_1$ sera égal à $\beta_2$ on a donc

$$\alpha_1 = \beta_2 = m - 1 \text{ [2]}.$$

De même on aura que le nombre $\alpha_2$ des plans stationnaires équivalents au cycle $M_2$ sera égal au nombre $\beta_1$ des points stationnaires équivalents au cycle $M_1$, donc,

$$\alpha_2 = \beta_1 = n - 1.$$

Le nombre total des plans stationnaires est donc (§§ 6, 5)

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = n + m - 2.$$

Les noeuds $\delta$ de la projection $p_z$ sont les projections des noeuds effectifs $H$ de la courbe gauche ou sont les intersections du plan de projection avec une bisécante $h$, de la courbe gauche, passant par le centre de projection. Les noeuds $\delta$ de la projection $p_z$, qui se trouvent au point $M_1$ ne sont pas des noeuds apparants. En effet, s'il en était ainsi il passerait par chaque point de la

---

[1]) Björling, Ueber Raumcurven Singularitäten. *Grünert's Archiv der Math. u. Physik*, zweite Reihe, Teil 8, 1890, p. 85.

[2]) Björling, Loc. cit. p. 86.

droite à l'infini du plan $x=0$ une on plussieurs bisécantes $h$ passant par le point $M_1$. Dans le plan $z=0$ se trouveraient alors une infinité de points de la courbe gauche $C(n, r, m)$, cequi est impossible. Les noeuds de la projection $p_z$, qui se trouvent au point $M_1$, sont donc les projections d'autant de noeuds effectifs $H$. Tout point de la courbe $C(n, r, m)$ et sa projection correspondant à la même valeur du paramètre $t$, le cycle $M_1(n, r)$ de la projection est la projection du cycle $M_1(n, r, m)$ de la courbe gauche. Les noeuds effectifs qui se projettent en le point $M_1$ se trouvent donc aussi au point $M_1$. Le cycle $M_1(n, r, m)$ est donc équivalent à un nombre de noeuds effectifs

$$H_1 = \delta = \{(n-1)(n+r-3) + m(q_1-1)\} : 2.$$

On démontre de la même manière que le cycle $M_2(m, r, n)$ est équivalent à un nombre de noeuds effectifs

$$H_2 = \{(m-1)(m+r-3) + n(q_2-1)\} : 2,$$

où $q_2$ est le plus grand commun diviseur des nombres $m$ et $r+m$.

Le cycle $M_2(m, r, n)$ étant un cycle corrélatif du cycle $M_1(n, r, m)$ et un noeud $H$ étant la singularité corrélative d'un plan double $G$. le cycle $M_1(n, r, m)$ est équivalent à un nombre de plans doubles

$$G_1 = H_2 = \{(m-1)(r+m-3) + n(q_2-1)\} : 2.$$

De même le cycle $M_2(m, r, n)$ est équivalent à un nombre de plans doubles

$$G_2 = H_1 = \{(n-1)(n+r-3) + m(q_1-1)\} : 2.$$

§ 8. *Détermination de H et de G.*

Projetons la courbe $C(n\ r, m)$ sur le plan $z=0$, du point $M_2$ comme centre de projection, c'est à dire supposons $\varphi=0$ (§ 7). Les coordonnées d'un point quelconque de la projection sont

$$x = t^n,\ y = t^{n+r}.$$

Supposons d'abord que les nombres $n$ et $n+r$ soient premiers entre eux, c'est à dire supposons $q_1 = 1$ (§ 7). Sous ces conditions, chaque point de cette projection $P_z$ est la projection d'un seul point de la courbe $C(n, r, m)$, ou bien la projection $P_z$ est une

courbe simple. C'est un théorème connu et facile à vérifier que la courbe $P_z(x = t^n, y = t^{n+r})$ possède deux singularités $M_1$ ($z = 0$, $y = 0$, $u = 1$) et $M_4$ ($x = 0$, $y = 1$, $u = 0$) et n'en possède pas d'autres [1]) (§ 2). Chaque noeud, point stationnaire, on tangente singulière de la courbe $C(n, r, m)$ se projetant en un noeud, point stationnaire on tangente stationnaire de la projection $P_z$, la courbe $C(n, r, m)$ ne possède d'autres noeuds $H$, points stationnaires $\beta$ ou tangentes $\theta$ et $\omega$ que ceux réunis aux points $M_1$ et $M_2$ (le point $M_4$ est la projection du point $M_2$). Quand $q_1 > 1$ chaque point de la projection $P_z$ est la projection de $q_1$ points de la courbe $C(n, r, m)$ et un noeud $H$ de la courbe $C(n, r, m)$ pourait se projeter en un point ordinaire de la projection $P_z\left(x = t^{\frac{n}{q_1}}, y = t^{\frac{n+r}{q_1}}\right)$ la quelle ne possède d'autres singularités que celles réunies aux points $M_1$ et $M_4$.

Envisageous alors les projections orthogonales

$$P_x\left(y = t^{\frac{n+r}{q_3}},\ z = t^{\frac{n+r+m}{q_3}}\right)$$
$$P_y\left(x = t^{\frac{n}{q_4}},\ z = t^{\frac{n+r+m}{q_4}}\right)$$

de la courbe $C(n, r, m)$, sur les plans des coordonnées $x = 0$, et $y = 0$ et la projection

$$P_u\left(y = t^{\frac{m}{q_2}},\ x = t^{\frac{m+r}{q_2}}\right)$$

sur le plan de l'infini, l'origine $M_1$ étant le centre de projection. Quand une de ces projections est une courbe simple, c'est à dire, quand un des plus grands communs diviseurs $q_3$, $q_4$ ou $q_2$ est l'unité, on peut démontrer, en raisonnent sur cette courbe simple comme on vient de le faire sur la courbe $P_z$, que la courbe $C(n, r, m)$ ne possède pas des singularités $H$, $\beta$, $\theta$ ou $\omega$ en dehors des points $M_1$ et $M_2$ (§ 6).

Quand aucune de ces 4 projections est une courbe simple on peut démontrer de la manière suivante que la courbe $C(n, r, m)$ ne possède pas des noeuds $H$ en dehors des points $M_1$ et $M_2$. En effet, supposons que la courbe $C(n, r, m)$ possède un noeud $H$, qui ne coïncide pas avec un des points $M_1$ et $M_2$. Ce noeud $H$ se projette en un point ordinaire de la projection $P_z$ à la con-

[1]) HALPHEN, *Mém. d. l'Ac. d. Paris*, (sav. étr.) T. 26, p. 54 (exemple).

dition que le plan $d$, déterminé par les 2 tangentes à la courbe $C(n, r, m)$ au point $H$ passe par le centre de projection $M_2$. De même quand le noeud $H$ se projette sur le plan de l'infini en un point ordinaire de la projection $P_u$, le plan $d$ déterminé par les 2 tangentes à la courbe $C(n, r, m)$ au point $H$ passe par le centre de projection $M_1$. Le plan $d$ passe donc par les points $M_1$ et $M_2$, donc passe par l'axe des $z$. De même on démontrerait que ce plan $d$ devrait passer par les axes des $x$ et des $y$, cequi est impossible. La courbe $C(n, r, m)$ ne possède donc pas des noeuds en dehors des points $M_1$ et $M_2$ Ce résultat est aussi une conséquence immédiate de ceque les coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point de la courbe $C(n, r, m)$ ne peuvent pas obtenir toutes les 3 les mêmes valeurs pour deux paramètres distincts $t_1$ et $t_2$ (§ 2). Ce résultat est obtenu ici par une méthode qui a l'avantage d'être encore applicable pour démontrer que la courbe $C(n, r, m)$ ne possède pas, en dehors des points $M_1$ et $M_2$ des singularités $\beta$, $\theta$, (§ 6) ou $\omega$ (§ 9).

Nous avons vu au § 7 que les nombres $H_1$ et $H_2$ des noeuds effectifs réunis aux points $M_1$ et $M_2$ sont

$$H_1 = \{(n-1)(n+r-3) + m(q_1-1)\} : 2,$$
$$H_2 = \{(m-1)(r+m-3) + n(q_2-1)\} : 2.$$

Le nombre total des noeuds effectifs $H$ étant $H_1 + H_2$ on trouve

$$H = \{(n+r+m-3)(n+m-2) - m(n-q_1) - n(m-q_2)\} : 2.$$

De cette valeur du nombre $H$ et de la valeur

$$h + H = \{r(n+r+m-1) + (n+m-2)(n+r+m-3)\} : 2,$$

déterminée au § 5 on déduit que le nombre des noeuds apparents $h$ est

$$h = \{r(n+r+m-1) + m(n-q_1) + n(m-q_2)\} 2.$$

La courbe corrélative de la courbe $C(n, r, m)$ étant une courbe de la même espèce que la courbe $C(n, r, m)$ (§ 4). le nombre $H'$ des noeuds effectifs de la courbe corrélative sera égal à $H$. Chaque noeud $H'$ de la courbe corrélative correspondant à un plan double $G$ de la courbe $C(n, r, m)$, le nombre des plan doubles $G$ de la courbe $C(n, r, m)$ sera

$$G = \{(n+r+m-3)(n+m-2) - m(n-q_1) - n(m-q_2)\} : 2$$

et ces plans doubles coïncident tous avec les plans osculateurs $z = 0$ et $u = 0$ de la courbe $C(n, r, m)$ aux points $M_1$ et $M_2$.

§ 9. *Détermination des singularités $\theta_1$ et $\omega_1$ équivalentes au cycle $M_1(n, r, m)$.*

Envisageons comme au § 7 la projection

$$p_z\,(x = t^n,\ y = t^{n+r} - t^{n+r+m}\, tg\varphi)$$

de la courbe $C(n, r, m)$ sur le plan $z = 0$, le centre de projection étant un point de la droite à l'infini du plan $x = 0$.

Le cycle corrélatif du cycle $M_1(n, r)$ de la projection $p_z$ est un cycle

$$x = t^r,\ y = t^{n+r} + A\, t^{r+n+m}\ ^{1)}.$$

Ce cycle corrélatif est équivalent à $r - 1$ points stationnaires et à

$$\{(r-1)(r+n-3) + m(q_1 - 1)\} : 2$$

noeuds, le plus grand commun diviseur $q_1$ des nombres $n$ et $n + r$ étant aussi le plus grand commun diviseur des nombres $r$ et $n + r$. Le cycle $M_1(n, r)$ de la projection $p_z$ est donc équivalent à $r - 1$ tangentes stationnaires $\iota$ et à $\{(r-1)(r+n-3) + m(q_1 - 1)\} : 2$ tangentes doubles $\tau$. Une tangente stationnaire $\iota$ de la projection $p_z$ est la projection d'une tangente stationnaire $\theta$ de la courbe $C(n, r, m)$ ou est l'intersection du plan de projection $z = 0$ avec un plan osculateur de la courbe passant par le centre de projection. Le terme constant $-rm(r + m)\, t^{n+r+m}$ (§ 4) de l'équation du plan osculateur ne s'annulant que pour $t = 0$, le seul plan osculateur de la courbe $C(n, r, m)$ passant par l'origine $M_1$ est le plan osculateur au point correspondant au paramètre $t = 0$, c'est à dire au point $M_1$. Le seul plan osculateur passant par l'axe des $x$ est donc le plan $z = 0$. Ce plan $z = 0$ ne passe pas par un centre de projection pris arbitrairement sur la droite de l'infini du plan $x = 0$. La tangente à la projection $p_z$ au point $M_1$, c'est à dire, l'axe des $x$ est donc la projection de $r - 1$ tangentes stationnaires. La tangente à la courbe $C(n, r, m)$ dont l'axe des $x$ est la projection étant l'axe des $x$ lui même, la tangente au point $M_1$ doit compter pour $r - 1$ tangentes stationnaires $\theta$ de

---

[1]) HALPHEN, *Mém. de l'Ac. d. Paris* (sav. étr.). T. 26, p. 43–44.

la courbe $C(n, r, m)$. Ou bien le nombre des tangentes stationnaires équivalentes au cycle $M_1\ (n, r, m)$ est

$$\theta_1 = r - 1.$$

De même on trouve que le nombre des tangentes stationnaires équivalentes au cycle $M_2\ (m, r, n)$ est

$$\theta_2 = r - 1.$$

Nous avons démontré au § 6 que la courbe $C(n, r, m)$ ne possède pas des tangentes stationnaires en dehors des cycles $M_1$ et $M_2$. Le nombre total des tangentes stationnaires de la courbe $C(n, r, m)$ est donc

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = 2r - 2,$$

cequi est précisément le nombre pour $\theta$ trouvé au § 5 au moyen des formules de CAYLEY-PLÜCKER.

Une tangente double $\tau$ de la projection $p_z$ est la projection d'un tangente double $\omega$ de la courbe $C(n, r, m)$ ou est l'intersection du plan de projection $z = 0$ avec un plan $\eta$ passant par le centre de projection, un plan $\eta$ contenant deux tangentes non consécutives de la courbe gauche. Supposons que la tangente double de la projection laquelle coïncide avec l'axe des $x$ est l'intersection d'un plan $\eta$ avec le plan de projection $z = 0$. La droite à l'infini du plan $x = 0$, où se trouve le centre de projection n'étant pas dans un plan avec l'axe des $x$, il passerait par l'axe des $x$ une infinité de plans $\eta$, puisque le nombre $\tau$ des tangentes doubles ne varie pas en changeant $\varphi$ ou bien en changeant la position du centre de projection. Dans chaque plan $\eta$ se trouvent 2 tangentes non consécutives de la courbe gauche. Par conséquent, l'axe des $x$ rencontrerait une infinité de génératrices de la développable $D$ engendrée par ces tangentes, cequi est impossible. L'axe des $x$ est donc un tangente double de la projection parcequ'il est une tangente multiple de la courbe $C(n, r, m)$. L'axe des $x$ doit donc compter pour $\{(r-1)(n+r-3) + m(q_1 - 1)\} : 2$ tangentes doubles de la courbe $C(n, r, m)$, ou bien le nombre des tangentes doubles de la courbe $C(n, r, m)$ équivalentes au cycle $M_1\ (n, r, m)$ est

$$\omega_1 = \{(r-1)(n+r-3) + m(q_1 - 1)\} : 2.$$

De même le cycle $M_2\ (m, r, n)$ est équivalent à

$$\omega_2 = \{(r-1)(m+r-3) + n(q_2 - 1)\} : 2$$

tangentes doubles, $q_2$ étant le plus grand commun diviseur des nombres $r$ et $m$.

Les quatre projections de la courbe $C(n, r, m)$ sur les 4 faces du tétraèdre de référence, les sommets opposés étant les centres de projection (§ 8) sont des courbes simples ou multiples de la forme

$$\xi = t^N, \ \eta = t^{N+M}.$$

Ces projections ne possèdent pas des tangentes doubles $\tau$ en dehors des 2 cycles $(N, M)$ et $(M, N)$. Une tangente double $\omega$ de la courbe gauche se projette toujours en une tangente double $\tau$ de la projection sauf dans le cas que la tangente $\omega$ passe par le centre de projection. Mais aucune des 4 projections $P_x$, $P_y$, $P_z$ et $P_u$ de la courbe $C(n, r, m)$ ne présentant une tangente double ordinaire, la tangente double $\omega$ devrait passer par les 4 sommets $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$ du tétraèdre de référence, ce qui est impossible. Par conséquent, la courbe $C(n, r, m)$ ne possède pas des tangentes doubles $\omega$ en dehors des tangentes aux points singuliers $M_1$ et $M_2$. Le nombre total des tangentes doubles de la courbe $C(n, r, m)$ est donc

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = \{(r-1)(n+2r+m-6) + m(q_1-1) + n(q_2-1)\} : 2.$$

§ 10. *De la génératrice singulière* $g_1$ $(z = 0, \ y = 0)$.

L'axe des $x$ étant, en général, une tangente singulière de la courbe $C(n, r, m)$ au point $M_1(n, r, m)$, l'axe des $x$ est également une génératrice singulière de la développable $D$ engendrée par les tangentes à la courbe $C(n, r, m)$. Examinons de plus près la section $S$ de cette développable par un plan $x = p$, $p$ étant quelconque. Les coordonnées d'un point quelconque $P$ de la développable $D$ sont données par les expressions suivantes,

$$x = t^n + l\,n\,t^{n-1},$$
$$y = t^{n+r} + l\,(n+r)\,t^{n+r-1},$$
$$z = t^{n+r+m} + l\,(n+r+m)\,t^{n+r+m-1}.$$

Quand le paramètre $t$ reste constant et le paramètre $l$ varie le point $P$ parcourt une génératrice de la développable $D$.

Pour les points $P$ situés dans le plan $x = p$ les paramètres $t$ et $l$ satisfont à la relation

$$p = t^n + l n t^{n-1},$$

d'où

$$l = \frac{p - t^n}{n t^{n-1}}.$$

Les coordonnées d'un point de la section $S$ seront donc:

$$x = p,$$

$$y = t^{n+r} + \frac{p - t^n}{n t^{n-1}}(n+r) t^{n+r-1} = \frac{p(n+r) t^r}{n}\left\{1 - \frac{r t^n}{p(n+r)}\right\},$$

$$z = t^{n+r+m} + \frac{p - t^n}{n t^{n-1}}(n+r+m) t^{n+r+m-1} = \frac{p(n+r+m) t^{r+m}}{n}\left\{1 - \frac{r+m) t^n}{p(n+r+m)}\right\}.$$

Posons $y_1 = \frac{n y}{p(n+r)}$, $z_1 = \frac{n z}{p(n+r+m)}$, $T^r = t^r\left\{1 - \frac{r t^n}{p(n+r)}\right\}$;

les coordonnées d'un point de la section seront

$$y_1 = T^r, z_1 = T^{r+m} + \frac{m(r+m)}{p(n+r)(n+r+m)} T^{n+r+m} + \text{etc.}$$

Le point d'intersection de l'axe des $x$ avec le plan sécant $x = p$ correspond au paramètre $T = 0$. Ce point $P_0$ correspondant au paramètre $T = 0$ est un point de la section $S$ où cette section présente un cycle $(r, m)$. Ce cycle $(r, m)$ est équivalent à $r - 1$ points stationnaires $\varkappa$, à $m - 1$ tangentes stationnaires $\iota$, à $\{(r-1)(r+m-3) + n(q_2 - 1)\} : 2$ noeuds $\delta$ et à $\{(m-1)(r+m-3) + n(q_2 - 1)\} : 2$ tangentes doubles $\tau$ de la section $S$, $q_2$ étant le plus grand commun diviseur des nombres $r$ et $m$ (§ 7). Chaque point stationnaire $\varkappa$ de la section $S$ est l'intersection du plan sécant $p = 0$ avec l'arête de rebrousement ou avec une génératrice stationnaire $\theta$. Les $r - 1$ points stationnaires $\varkappa$ équivalents au cycle $(r, m)$ ne sont pas dûs à la rencontre du plan $x = p$ avec l'arête de rebroussement, puisqu'on trouve le même résultat pour toute valeur du paramètre $p$ (sauf $p = 0$ et $p = \infty$), et il est impossible que tout point de l'axe des $x$ soit un point de l'arête de rebroussement.

Le point de rencontre $P_0$ du plan $x = p$ avec l'axe des $x$ comptant pour $r - 1$ points stationnaires, l'axe des $x$ est équivalent à $r - 1$ tangentes stationnaires $\theta$, résultat que nous avons déjà obtenu d'une autre manière au § 9 [1]). Le cycle $(r, m)$ de la section $S$ étant équivalent à $m - 1$ tangentes stationnaires $\iota$ on

[1]) BJÖRLING, loc. cit. p. 86.

trouve d'une manière analogue que le plan $z = 0$, qui contient la tangente au cycle $(r, m)$, est équivalent à $m - 1$ plans stationnaires $\alpha$, résultat déjà obtenu au § 7.

Le cycle $(r, m)$ de la section $S$ étant équivalent à $\{(m - 1)(r + m - 3) + n(q_2 - 1)\} : 2$ tangentes doubles, on conclut que le plan $z = 0$ est équivalent à autant de plans doubles $G$, ce qu'on a trouvé aussi au § 7.

Les noeuds de la section $S$ sont les points de rencontre du plan $x = p$ avec des branches de la courbe nodale $\xi$, on avec des génératrices doubles $\omega'$ ou sont des points où le plan sécant se trouve être tangent à la développable $D$ ou à son arête de rebroussement $C(n, r, m)$.

Le plan tangent à la développable $D$ au point $P_0$ est le plan $z = 0$ et l'arête de rebroussement $C(n, r, m)$ ne rencontre l'axe des $x$ qu'à l'origine des coordonnées $M_1$, le plan sécant $x = p$ n'est donc pas tangent au point $P_0$ à la développable $D$ ou à la courbe $C(n, r, m)$. Il est impossible qu'il passerait une branche de la courbe nodale $\xi$ par le point $P_0$, puis qu'on peut choisir pour point $P_0$ tout point de l'axe des $x$ et chaque point de l'axe des $x$ ferait alors partie de la courbe nodale $\xi$, cequi est impossible. Les noeuds réunis au point $P_0$, c'est à dire équivalents au cycle $(r, m)$ sont donc dûs à la rencontre d'une génératrice multiple. Le cycle $(r, m)$ étant équivalent à $\{(r - 1)(r + m - 3) + n(q_2 - 1)\} : 2$ noeuds l'axe des $x$ est une génératrice multiple $g_1$ qui doit compter pour

$$\omega_1' = \{(r - 1)(r + m - 3) + n(q_2 - 1)\} : 2$$

génératrices doubles ordinaires de la développable $D$.

Le nombre $\delta$ des noeuds équivalents au cycle $(r, m)$ est indépendant du paramètre $p$, sauf pour les valeurs $p = 0$ et $p = \infty$. Par le point $P_0$ il passe $r$ branches de la section $S$ tangentes au plan $z = 0$, par conséquent, il passe par la génératrice $g_1$ $r$ nappes de la développable $D$ et ces $r$ nappes sont toutes tangentes au plan $z = 0$, lelong de la génératrice $g_1$ (l'axes des $x$).

Quand 2 de ces $r$ nappes se pénètrent lelong d'une branche de la courbe nodale, coupant la génératrice $g_1$ au point $Q$, le point $Q$ doit compter pour un nombre de noeuds plus grand que $\delta$. Le nombre $\delta$, restant le même pour les points de la génératrice $g_1$, sauf pour les points $M_1$ et $M_3$ correspondant aux paramètres $p = 0$ et $p = \infty$, on obtient le résultat:

*La génératrice $g_1$ ne peut rencontrer des branches de la courbe nodale, lelong des quelles 2 nappes passant par $g_1$ se pénètrent, qu'aux points $M_1$ et $M_3$.*

On verra au § 12, qu'en général, la génératrice $g_1$ rencontrera au point $M_3$ des branches nodales lelong des quelles se pénètrent les $r$ nappes tangentes lelong de $g_1$.

Au § 9 nous avons vu que l'axe des $x$ doit compter pour

$$\omega_1 = \{(r-1)\ (n+r-3) + m\,(q_1 - 1)\} : 2$$

tangentes doubles $\omega$ de l'arête de rebroussement $C(n, r, m)$. En général, on aura donc $\omega_1' \neq \omega_1$, par conséquent, l'axe des $x$ ne doit pas compter pour autant de génératrices doubles que de tangentes doubles, tandis que toute génératrice double ordinaire $\omega'$ est à la fois une tangente double ordinaire $\omega$. On a donc le théorème.

*Une tangente singulière supérieure ne compte pas nécessairement pour autant de tangentes doubles que de génératrices doubles* (§§ 39, 43, 44).

Ce théorème trouvé pour le cas que la génératrice singulière est tangente au cycle $(n, r, m)$ est encore vrai quand la génératrice singulière est tangente à 2 branches distinctes de l'arête de rebroussement.

Par exemple, si une droite $g$ est tangente à 2 branches d'une courbe gauche en 2 points distincts ordinaires et quand coïncident les plans osculateurs aux 2 points de contact, la droite $g$ compte pour une tangente double ordinaire $\omega$ mais compte pour 2 génératrices doubles $\omega'$.

Autre exemple. Quand une droite $g$ est tangente au même point à deux branches distinctes d'une courbe gauche, le point de contact étant un point ordinaire sur les 2 branches et quand les 2 plans osculateurs sont distincts, la droite $g$ compte pour 2 tangentes $\omega$ mais pour úne génératrice double $\omega'$.

Dès qu'une courbe gauche possède des points singuliers supérieurs ou des tangentes doubles singulières le nombre $\omega$ entrant dans les formules de Cayley—Plücker se rapportant à des sections n'est pas le même que le nombre $\omega$ entrant dans ces formules se rapportant à des projections, ou bien les $\omega$ entrant dans les termes $\xi + \omega$ et $\eta + \omega$ ne sont pas les mêmes.

D'une relation

$$\xi + \omega = \eta + \omega$$

on ne peut donc plus tirer $\xi = \eta$.

Le cycle $M_1\,(n, r, m)$ étant équivalent à un nombre de génératrices doubles

$$\omega_1' = \{(r-1)(r+m-3) + n(q_2-1)\} : 2,$$

on trouve en changeant $n$ en $m$ et vice-versa que le second cycle $M_2\,(m, r, n)$ est équivalent à un nombre de génératrices doubles

$$\omega_2' = \{(r-1)(r+n-3) + m(q_1-1)\} : 2$$

cequi est précisément le nombre $\omega_1$ des tangentes doubles équivalentes au cycle $M_1\,(n, r, m)$. On a donc les relations

$$\omega_1 = \omega_2', \quad \omega_2 = \omega_1'.$$

Une génératrice double de la développable $D$, étant en même temps une tangente stationnaire $\theta$ ou une tangente double $\omega$, la développable $D$ ne possède pas d'autres génératrices doubles que les tangentes aux points $M_1$ et $M_2$, parce que ces 2 tangentes sont les seules tangentes stationnaires (§ 6) et les seules tangentes doubles (§ 9) que possède la courbe $C(n, r, m)$. Le nombre total des génératrices doubles $\omega'$ de la développable $D$ est donc

$$\omega' = \omega_1' + \omega_2' = \{(r-1)(n+2r+m-6) + m(q_1-1) + n(q_2-1)\} : 2.$$

C'est la valeur trouvée au § 9 pour le nombre des tangentes doubles, on a donc pour la courbe $C(n, r, m)$ le résultat

$$\omega = \omega'.$$

§ 11. *Des points $\lambda$ et des intersections de la courbe $C(n, r, m)$ avec $\Delta^2 D$.*

Une courbe gauche peut encore posséder des tangentes qui rencontrent la courbe gauche encore une fois endehors du point de contact. Ces tangentes sécantes sont des tangentes $\lambda$ et le point de rencontre avec la courbe gauche porte le nom de point $\lambda$ Ces points $\lambda$ sont des points triples de la développable $D$ et des points de rebroussement de la courbe nodale [1]). Pour déterminer le nombre de ces points $\lambda$ examinons les intersections de la courbe

---

[1]) CREMONA – CURTZE, *Oberflächen*, § 104.

$C(n, r, m)$ avec la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$ de la développable $D$, prise par rapport à un point quelconque $P$.

La développable $D$ étant du degré $\varrho = n + 2r + m$ (§ 4), la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$ sera du degré $n + 2r + m - 2$. La courbe $C(n, r, m)$ étant du degré $\nu = n + r + m$ (§ 4) le nombre total des intersections de la courbe $C(n, r, m)$ avec la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$ sera

$$(n + 2r + m - 2)(n + r + m).$$

Ces intersections sont: 1° les points de la courbe $C(n, r, m)$ qui sont des points triples ou d'une multiplicité supérieure de la développable $D$; 2° les points $C$ de la courbe $C(n, r, m)$ dont les plans osculateurs passent par le point $P$, chaque point $C$ étant un point triple de l'intersection de la développable $D$ avec le plan osculateur correspondant [1]). Les points de la courbe $C(n, r, m)$, qui sont les points triples ou d'une multiplicité supérieure de la développable $D$ sont les points $M_1$, $M_2$, $\beta$, $H$, $\lambda$ et les points de contact des tangentes stationnaires $\theta$ et des génératrices doubles $\omega'$. Posons que ces points comptent respectivement pour les nombres d'intersections, $M_1$ $M_2$, $N_1$, $N_2$, $N_3$, $N_4$ et $N_5$ et supposons que les nombres de ces singularités ordinaires non-coïncidantes avec les points $M_1$ et $M_2$ soient $\beta$, $H$, $\lambda$, $\theta$ et $\omega'$. Les points de contact $C$ des plans osculateurs passant par le point $P$ sont au nombre de $\mu = n + r + m$ (§ 4) et CREMONA annonce [2]), cequ'on vérifié facilement, que chacun de ces points $C$ compte pour 2 intersections de l'arête de rebroussement avec $\Delta^2 D$.

On obtient donc la relation suivante

$$(n + r + m)(n + 2r + m - 2) = 2(n + r + m) + M_1 + M_2 + N_1 \beta + \\ + N_2 H + N_3 \lambda + N_4 \theta + N_5 \omega' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Les équations d'une génératrice quelconque de la développable $D$ sont (§ 4)

$$(n + r) t^r x - ny - rt^{n+r} = 0,$$
$$(n + r + m) t^{r+m} x - nz - (r + m) t^{n+r+m} = 0.$$

En éliminant le paramètre $t$ entre ces 2 équations on obtient

---

[1]) CREMONA - CURTZE, *Oberflächen*, Cap. IV.

[2]) CREMONA - CURTZE, *Oberflächen*, § 104.

l'équation de la développable $D$. Le poids [1]) de cet éliminant sera $(n+r)(n+r+m)$. C'est à dire, si l'on donne aux variables $x$, $y$ et $z$ les indices, $n$, $n+r$ et $n+r+m$, la somme de ces indices dans chaque terme de l'équation de la développable sera $(n+r)(n+r+m)$. Par conséquent, en substituant

$$x = t^n,\ y = t^{n+r},\ z = t^{n+r+m} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

dans l'équation de la développable on obtient une équation en $t$ dont tous les termes sont du degré $(n+r)(n+r+m)$. En substituant les valeurs (2) dans l'équation de la deuxième surface polaire, les termes du degré le moins elevé en $t$ sont les termes obtenus en différentiant deux fois par rapport à $z$. Le terme de l'équation $\Delta^2 D(t) = 0$ du degré le moins elevé en $t$ sera donc du degré

$$(n+r-2)(n+r+m).$$

Il étant encore possible que le coefficient de ce terme s'annule on peut seulement conclure que le nombre des racines nulles est au moins $(n+r-2)(n+r+m)$. Chaque racine de l'équation $\Delta^2 D(t) = 0$ étant le paramètre d'un point d'intersection de la courbe $C(n, r, m)$ avec la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$ on trouve que le point $M_1$ correspondant au paramètre $t = 0$ compte pour $(n+r-2)(n+r+m)$ intersections au moins. Supposons donc

$$M_1 = (n+r-2)(n+r+m) + A,$$

$A$ étant un entier positif ou nul.

De même le nombre des intersections de la courbe $C(n, r, m)$ avec la surface $\Delta^2 D$ les quelles coïncident avec le point $M_2(m, r, n)$ sera

$$M_2 = (m+r-2)(n+r+m) + B,$$

$B$ étant un entier positif ou nul.

L'équation (1) de tantôt devient donc

$$\begin{aligned}(n+r+m)(n+2r+m-2) = 2(n+r+m) + (n+r-2) \times \\ \times (n+r+m) + A + (m+r-2)(n+r+m) + \\ + B + N_1 \beta + N_2 H + N_3 \lambda + N_4 \theta + N_5 \omega'.\end{aligned}$$

d'où

$$A + B + N_1 \beta + N_2 H + N_3 \lambda + N_4 \theta + N_5 \omega' = 0.$$

---

[1]) SALMON, *Modern Higher Algebra*, § 71.

Chacun des 5 nombres $N$ étant au moins un et aucun des nombres $A$, $B$, $\beta$, $H$, $\lambda$, $\theta$ et $\omega'$ n'étant négatif ces derniers nombres sont tous nulles.

On retrouve donc le résultat que la courbe $C(n, r, m)$ ne posède pas des singularités $\beta$ (§ 6), $H$ (§ 8), $\theta$ (§ 6), $\omega'$ (§ 10) en dehors des points $M_1$ et $M_2$.

En outre, on trouve que le nombre $\lambda$ des points de rencontre des courbes $C(n, r, m)$ et $\xi$, qui sont des points de rebroussement de la nodale et se trouvent en dehors des points $M_1$ et $M_2$, est nulle.

Les nombres $A$ et $B$ étant nulles on obtient le théorème.

*Les cycles $M_1(n, r, m)$, $M_2(m, r, n)$ comptent respectivement pour*

$$(n + r - 2)(n + r + m) \text{ et } (m + r - 2)(n + r + m)$$

*intersections de l'arête de rebrousement $C(n, r, m)$ avec la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$.*

On peut encore énoncer le théorème précédant de la manière suivante.

*La présence d'un cycle $M(n, r, m)$ diminue de*

$$(n + r - 2)(n + r + m)$$

*le nombre $\lambda$ des points de rebroussement $\lambda$ de la courbe nodale, les quels peuvent se trouver sur la courbe gauche en dehors du cycle $M(n, r, m)$.*

L'accroissement $A$ étant nulle, il faut conclure que le coefficient du terme, lequel est du degré $(n + r - 2)(n + r + m)$ en $t$, de l'équation $\Delta^2 D(t) = 0$, ne s'annule pas.

En posant $n = 2$, $m = r = 1$ le cycle $M_1(n, r, m)$ se réduit à un rebroussement ordinaire $\beta$ et $(n + r - 2)(n + r + m) = 4$, cequi donne le résultat déjà trouvé par CREMONA [1]):

*Un point stationnaire $\beta$ compte pour 4 intersections de l'arête de rebroussement avec $\Delta^2 D$.*

En posant $r = 2$, $m = n = 1$ le cycle $M_1(n, r, m)$ se réduit à une branche présentant une tangente stationnaire $\theta$ et $(n + r - 2)(n + r + m) = 4$, cequi donne le résultat déjà trouvé par CREMONA [2]):

---

[1]) CREMONA – CURTZE, *Oberflächen.* § 103.

[2]) CREMONA – CURTZE, *Oberflächen.* § 100.

*Le point de contact d'une tangente stationnaire $\theta$ compte pour 4 intersections de l'arête de rebroussement avec $\Delta^2 D$.*

Quand les $\beta_1$, $H_1$, $\theta_1$ et $\omega_1'$ singularités ordinaires, qui sont équivalentes au cycle $M_1(n, r, m)$ étaient des singularités isolées, elles compteraient chacune pour 4 intersections [1]) de l'arête de rebroussement avec la surface $\Delta^2 D$. Ces singularités compteraient alors pour (§§ 7, 9, 10) le nombre d'intersections suivant

$$\begin{aligned} 4(\beta_1 + H_1 + \theta_1 + \omega_1') &= 4[(n-1) + \{(n-1)(n+r-3) + m(q_1-1)\} : 2 + \\ &\quad + (r-1) + \{(r-1)(r+m-3) + n(q_2-1)\} : 2] \\ &= 2[(n+r+m-1)(n+r-2) - m(n-q_1) - n(r-q_2)], \end{aligned}$$

en général, ce nombre n'est pas égal au nombre $M_1$ de ces intersections coïncidant avec le cycle $M_1(n, r, m)$.

Par conséquent, quand $\beta_1$ points stationnaires, $H_1$ noeuds effectifs, $\theta_1$ tangentes stationnaires et $\omega_1'$ génératrices doubles distincts d'une courbe gauche se réunissent pour constituer un cycle $M_1(n, r, m)$, le nombre des points stationnaires $\lambda$ de la courbe nodale se trouvant en dehors du cycle $M_1(n, r, m)$ ne sera pas égal au nombre des points $\lambda$ que présente la courbe quand ces singularités ordinaires sont séparées.

---

## CHAPITRE II.

### Des courbes nodales de la développable $D$.

§ 12. *Des sections par les plans des coordonnées.*

Les coordonnées d'un point quelconque de la développable $D$ sont

$$\begin{aligned} x &= t^n + l\,n\,t^{n-1}, \\ y &= t^{n+r} + l(n+r)\,t^{n+r-1}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1) \\ z &= t^{n+r+m} + l(n+r+m)\,t^{n+r+m-1}. \end{aligned}$$

Pour les points de la développable $D$, qui se trouvent dans le plan $z = 0$ les paramètres $t$ et $l$ satisfont à la relation

$$0 = t^{n+r+m} + l(n+r+m)\,t^{n+r+m-1},$$

---

[1]) CREMONA—CURTZE. *Oberflächen*, § 104.

d'où $$l = -t : (n + r + m) \text{ ou } t = 0.$$

L'intersection de la développable $D$ avec le plan $z = 0$ consiste donc en 2 parties, savoir une partie courbe $S_z$ correspondant à la solution $l = -t : (n + r + m)$ et en une génératrice correspondant à la solution $t = 0$. Les coordonnées d'un point de la courbe $S_z$ sont

$$x = t^n - \frac{n}{n + r + m} t^n = \frac{r + m}{n + r + m} t^n,$$

$$y = t^{n+r} - \frac{n + r}{n + r + m} t^{n+r} = \frac{m}{n + r + m} t^{n+r}.$$

L'équation de cette courbe $S_z$ est donc

$$\left| \frac{x(n + r + m)}{r + m} \right|^{\frac{n+r}{q_1}} = \left| \frac{y(n + r + m)}{m} \right|^{\frac{n}{q_1}},$$

$q_1$ étant le plus grand commun diviseur des nombres $n$ et $r$. Chaque point de la section $S_z$ correspondant à $q_1$ valeurs distinctes du paramètre $t$, par chaque point de la section $S_z$ il passe $q_1$ génératrices de la développable $D$, ou bien la section $S_z$ est une courbe nodale dont le degré de multiplicité est $q_1$.

L'intersection totale de la développable $D$ avec le plan $z = 0$ consiste donc en la courbe $S_z$ du degré $(n + r) : q_1$, laquelle doit compter $q_1$ fois et en la tangente à la courbe $C(n, r, m)$ au point correspondant au paramètre $t = 0$, c'est à dire en l'axe des $x$. Nous avons vu au § 10, qu'au point de rencontre $P_0$ de l'axe des $x$ avec le plan $x = p$, la section $S$ possède un cycle de l'ordre $r$ et de la classe $m$. La tangente à la section $S$ au point $P_0(r, m)$ y a de commun $r + m$ points consécutifs avec la section $S$ et cette tangente se trouve dans le plan $z = 0$. L'axe des $x$ doit donc compter pour $r + m$ génératrices communes de la développable $D$ et du plan $z = 0$. L'intersection totale de la développable $D$ avec le plan $z = 0$ est donc du degré $(r + n) + (r + m) = n + 2r + m$, cequi est précisément la valeur trouvé au § 4 pour le rang de la courbe $C(n, r, m)$.

Supposons que la génératrice $g_1$, c'est à dire l'axe des $x$, rencontre une nappe de la développable $D$ au point $R$. Chaque plan passant par $g_1$ coupe cette nappe suivant une branche de la courbe de section, et cette branche passe par le point $R$. De l'équation de la

section $S_z$ on tire directement que l'axe des $x$ rencontre cette section $S_z$ seulement au point $M_1$.

*Par conséquent, l'axe des $x$, ou bien la génératrice singulière $g_1$, ne rencontre aucune nappe de la développable $D$ en dehors du point $M_1$.*

On peut énoncer ce théorème encore de la manière suivante.

*La génératrice singulière $g_1$ ne rencontre d'autres génératrices de la développable $D$ que les génératrices consécutives qu'elle rencontre au point singulier $M_1$.*

La génératrice $g_1$ ne rencontrant des nappes de la développable $D$ et les $r$ nappes passant par la génératrice $g_1$ ne se pénétrant que peut-être aux points $M_1$ et $M_3$ (§ 10), la génératrice $g_1$ ne peut rencontrer des branches de la courbe nodale qu'aux points $M_1$ et $M_3$. Nous verrons qu'en général, la génératrice $g_1$ rencontre, en effet, des branches de la courbe nodale aux points $M_1$ et $M_3$.

Pour les points de la développable $D$, qui se trouvent à l'infini, il faut que les paramètres $l$ et $t$ soient choisis de manière à rendre infiniment grandes les coordonnées $x$, $y$ et $z$ (1). Ces coordonnées seront infiniment grandes 1° quand $t=\infty$ et 2° quand $l=\infty$.

L'intersection totale de la développable $D$ avec le plan de l'infini consiste donc en 2 parties, 1° la tangente à la courbe $C(n, r, m)$ au point $M_2$, correspondant au paramètre $t=\infty$ et 2° une courbe $S_\infty$. En substituant $l=\infty$ dans les expressions (1) ou trouve pour les coordonnées d'un point de la courbe $S_\infty$,

$$\frac{x}{n\,t^{n-1}}=\frac{y}{(n+r)\,t^{n+r-1}}=\frac{z}{(n+r+m)\,t^{n+r+m-1}}\,.$$

L'équation de la section $S_\infty$ sera donc

$$\left\{\frac{y}{n+r}\right\}^{\frac{r+m}{q_2}}=\left\{\frac{z}{n+r+m}\right\}^{\frac{r}{q_2}}\left\{\frac{x}{n}\right\}^{\frac{m}{q_2}},$$

$q_2$ étant le plus grand commun diviseur des nombres $r$ et $m$. On trouve facilement que la courbe $S_\infty$ est une courbe nodale dont le degré de multiplicité est $q_2$ et que l'intersection totale de la développable $D$ avec le plan de l'infini consiste en la courbe $S_\infty$ du degré $(r+m):q_2$ comptée $q_2$ fois et en la tangente à la courbe $C(n, r, m)$ au point $M_2$ comptée $n+r$ fois.

Coupons la développable $D$ par le plan $x=0$; les paramètres $l$ et $t$ des points de cette section satisfont à la relation

$$0 = t^r + l n t^{n-1}$$

d'où $$t = 0 \quad \text{ou} \quad l = -t : n.$$

L'intersection totale consiste donc de nouveau en une courbe $S_x$ correspondant au paramètre $l = -t : n$ et une génératrice tangente à la courbe $C(n, r, m)$ au point correspondant au paramètre $t = 0$, c'est à dire l'axe des $x$. L'axe des $x$ ne se trouvant pas dans le plan $x = 0$, la partie de l'intersection totale correspondant à la valeur nulle du paramètre $t$ se réduit à un point. En substituant dans l'équation d'un plan quelconque les expressions (1), ou obtient une équation en $t$ du degré $n + r + m$, tandisque pour le plan $x = 0$ nous venons de trouver une équation en $t$ du degré $n$. Il faut donc ajouter aux solutions (2) la solution $t = \infty$.

Dans le plan $x = 0$ se trouve en effet la génératrice $g_2$ tangente à la courbe $C(n, r, m)$ au point $M_2$ correspondant au paramètre $t = \infty$. Le plan tangent à la développable $D$ lelong de la génératrice $g_2$ étant le plan de l'infini $u = 0$ (§ 3) et la génératrice $g_2$ étant une génératrice d'un degré de multiplicité $r$, la génératrice $g_2$ compte $r$ fois dans l'intersection totale. Les coordonnées d'un point de la courbe $S_x$ sont

$$y = -\frac{r}{n} t^{n+r}, \quad z = -\frac{r+m}{n} t^{n+r+m}.$$

L'équation de la courbe $S_x$ est donc

$$\left(\frac{-ny}{r}\right)^{\frac{n+r+m}{q_3}} = \left(\frac{-nz}{r+m}\right)^{\frac{n+r}{q_3}},$$

$q_3$ étant le plus grand commun diviseur des nombres $m$ et $n + r$. L'intersection totale consiste donc en la courbe $S_x$ du degré $(n + r + m) : q_3$ comptée $q_3$ fois et en la génératrice $g_2$ $(x = 0, u = 0)$ comptée $r$ fois. L'intersection totale est donc du degré $n + 2r + m = \varrho$.

Les paramètres $l$ et $t$ des points de la développable $D$ situés dans le plan $y = 0$ satisfont à l'équation

$$0 = t^{n+r} + l(n + r) t^{n+r-1},$$

d'où

$$t = 0 \quad \text{ou} \quad l = -t : (n + r).$$

L'intersection totale de la développable $D$ avec le plan $y = 0$

consiste donc en la génératrice $g_1$ tangente à la courbe $C(n, r, m)$ au point $M_1$ et en une partie courbe $S_y$. La génératrice $g_1$ $(y = z = 0)$, laquelle se trouve en effet dans le plan $y = 0$, est une génératrice d'un degré de multiplicité $r$ et le plan tangent à la développable $D$ lelong de la génératrice $q_1$ étant le plan $z = 0$, la génératrice $g_1$ doit compter $r$ fois dans l'intersection totale. Les coordonnées d'un point de la courbe $S_y$ sont

$$x = \frac{r\,t^{n}}{n+r}, \quad z = -\frac{m\,t^{n+r+m}}{n+r}.$$

L'équation de la courbe $S_y$ est donc

$$\left\{\frac{x(n+r)}{r}\right\}^{\frac{n+r+m}{q_4}} = \left\{\frac{-z(n+r)}{m}\right\}^{\frac{n}{q_4}},$$

où $q_4$ est le plus grand commun diviseur des nombres $n$ et $r + m$. L'intersection totale de la développable $D$ avec le plan $y = 0$, consiste donc en la courbe $S_y$ du degré $(n + r + m) : q_4$, laquelle compte $q_4$ fois et en la génératrice $g_1$ comptée $r$ fois. L'intersection totale est donc du degré $n + 2r + m$.

§ 13. *Du degré de la courbe nodale gauche et de la classe de la développable bitangente.*

Nous avous trouvé aux §§ 5 et 10

$$\xi + \omega' = \{(n + 2r + m - 2)(n + 2r + m - 3) - 2r\} : 2,$$
$$\omega' = \{(r - 1)(n + 2r + m - 6) + m(q_1 - 1) + n(q_2 - 1)\} : 2.$$

La courbe nodale $\xi$ de la développable $D$ est donc du degré

$$\xi = \{(n + 2r + m - 4)(n + r + m) - m(q_1 - 1) - n(q_2 - 1)\} : 2.$$

Cette courbe nodale $\xi$ consiste en les nodales planes $S_x$, $S_y$, $S_z$ et $S_\infty$ (quand les nombres $q_3$, $q_4$, $q_1$ et $q_2$ sont plus grands que l'unité) et en une partie restante $\xi'$ dont je démontrerai aux §§ 17 et 24 qu'elle est une courbe gauche.

La courbe nodale plane $S_z$ est du degré $(n + r) : q_1$ et son degré de multiplicité est $q_1$. La courbe nodale plane $S_z$ est donc équivalente à une courbe double du degré $(n + r)(q_1 - 1) : 2$. De même ou trouve facilement que les courbes multiples $S_\infty$, $S_x$ et $S_y$ sont respectivement équivalentes à des courbes doubles des degrés

$$(r+m)(q_2-1):2,$$
$$(n+r+m)(q_3-1):2,$$
$$(n+r+m)(q_4-1):2.$$

Le degré de la courbe nodale restante est donc

$$\xi' = \xi - (n+r)(q_1-1):2 - (r+m)(q_2-1):2 -$$
$$- (n+r+m)(q_3-1):2 - (n+r+m)(q_4-1):2 =$$
$$= (n+r+m)(n+2r+m-q_1-q_2-q_3-q_4):2,$$

en posant pour simplifier

$$N = (n+2r+m-q_1-q_2-q_3-q_4):2,$$

on a

$$\xi' = N(n+r+m).$$

Nous avons trouvé au § 10 qui le nombre $\omega$ des tangentes doubles de la courbe $C(n, r, m)$ est égal au nombre $\omega'$ des génératrices doubles. La courbe $C(n, r, m)$ étant une courbe autopolaire nous avous (§ 5)

$$\xi + \omega' = \eta + \omega.$$

Par conséquent, $\eta = \xi$, c'est à dire la classe de la développable bitangente est égale au degré de la courbe nodale. De même que la courbe nodale $\xi$ cette développable bitangente se décompose

Les coordonnées d'un point de la projection orthogonale $P_z$ de la courbe $C(n, r, m)$ sur le plan $z = 0$ sont

$$x = t^n, \; y = t^{n+r}.$$

Le plus grand commun diviseur des nombres $n$ et $n+r$ étant $q_1$, chaque point de cette projection $P_z$ est la projection de $q_1$ points distincts de la courbe $C(n, r, m)$ Par conséquent, tout plan tangent an cylindre projetant est un plan tangent multiple de la courbe $C(n, r, m)$, son degré de multiplicité étant $q_1$. Un plan tangent à ce cylindre projetant compte donc pour $q_1(q_1-1):2$ plants bitangents $\eta$. L'équation du cylindre projetant, ou bien de la courbe $P_z$ étant

$$y^{\frac{n}{q_1}} = x^{\frac{n+r}{q_1}},$$

ce cylindre (autopolaire) est de la classe $(n+r):q_1$. Ce cylindre est donc équivalent à une développable bitangente de la classe

$$(n+r)(q_1-1):2.$$

De même on trouve facilement que les cylindres droits projetant sur les plans $x=0$ et $y=0$ et le cône projetant dont le point $M_1$ est le sommet sont équivalents à des développables bitangentes, respectivement de la classe

$$(n+r+m)(q_3-1):2,$$
$$(n+r+m)(q_4-1):2,$$
$$(r+m)(q_2-1):2.$$

La développable bitangente $\eta$ se décompose donc en ces 4 cônes et en une développable restante de la classe

$$\eta' = N(n+r+m).$$

§ 14. *Des nombres $q_1$, $q_2$, $q_3$, $q_4$ et $N$.*

Par définition $q_1$ est le plus grand commun diviseur des nombres $n$ et $r$ (§ 7),

$q_2$ est le P. G. C. D. des nombres $r$ et $m$ (§ 7),
$q_3$ est le P. G. C. D. des nombres $m$ et $n+r$ (§ 8),
$q_4$ est le P. G. C. D. des nombres $n$ et $r+m$ (§ 8).

De ces définitions on déduit facilement les conséquences suivantes.

Quand $n=1$ on aura $q_1=q_4=1$, $q_1$ et $q_4$ étant des diviseurs de $n$.

Quand $r=1$ on aura $q_1=q_2=1$, $q_1$ et $q_2$ étant des diviseurs de $r$.

Quand $m=1$ on aura $q_2=q_3=1$, $q_2$ et $q_3$ étant des diviseurs de $m$.

Si 2 des 4 nombres $q$ sont égaux ou possèdent un facteur commun les 3 nombres $n$, $r$ et $m$ ont un facteur commun. Par définition les 3 nombres $n$, $r$ et $m$ n'ont pas de facteur commun (§ 2), par conséquent, parmi les 4 nombres il n'existent pas 2 qui sont plus grands que l'unité et sont égaux ou qui possèdent un facteur commun plus grand que l'unité.

Par définition (§ 13)

$$N=(n+2r+m-q_1-q_2-q_3-q_4):2$$

je démontrerai que $N$ est entier, c'est à dire, que

$$(n+2r+m-q_1-q_2-q_3-q_4)$$

est un nombre pair.

Les nombres $n$, $r$ et $m$ n'admettant pas de facteur commun, ces 3 nombres ne sont pas pairs tous les 3.

Supposons que les nombres $n$ et $m$ soient des nombres pairs et que $r$ soit impair, $n + 2r + m$ sera un nombre pair, et $n + r + m$ sera un nombre impair. Les nombres $q_1$ et $q_2$, qui sont des diviseurs du nombre impair $r$, sont aussi des nombres impairs. Les nombres $q_3$ et $q_4$, qui sont des diviseurs du nombre impair $n + r + m$, sont des nombres impairs.

La somme $q_1 + q_2 + q_3 + q_4$ est donc un nombre pair, il en sera de même de la différence de 2 nombres pairs

$$(n + 2r + m) - (q_1 + q_2 + q_3 + q_4).$$

Supposons $n$ et $r$ pairs et $m$ impair, $n + 2r + m$ et $n + r + m$ seront impairs. Le nombre $q_1$, étant le plus grand commun diviseur des nombres pairs $n$ et $r$, est aussi un nombre pair. Le nombre $q_2$, étant un diviseur du nombre impair $m$ est aussi impair. Les nombres $q_3$ et $q_4$, étant des diviseurs du nombre impair $n + r + m$, sont des nombres impairs. La somme $q_1 + q_2 + q_4 + q_3$ est donc un nombre impair. La différence de 2 nombres impairs

$$(n + 2r + m) - (q_1 + q_2 + q_3 + q_4)$$

est un nombre pair. De même quand $m$ et $r$ sont des nombres pairs et $n$ est un nombre impair

Supposons $n$ et $m$ pairs et $r$ impair, $n + 2r + m$ est un nombre pair. Les 4 nombres $q$ sont des diviseurs, ou du nombre impair $m$, ou du nombre impair $n$ et sont donc des nombres impairs. La somme $q_1 + q_2 + q_3 + q_4$ est donc un nombre pair, la différence de 2 nombres pairs

$$(n + 2r + m) - (q_1 + q_2 + q_3 + q_4)$$

est un nombre pair.

Supposons $m$ et $r$ impairs et $n$ pair, le nombre $n + 2r + m$ est impair. Les nombres $q_1$ et $q_2$ étant des diviseurs du nombre impair $r$ sont des nombres impairs. Le nombre $q_3$, étant un diviseur du nombre impair $m$, est un nombre impair. Le nombre $q_4$, étant le plus grand commun diviseur des nombres pairs $n$ et $(r + m)$, est un nombre pair. La somme $q_1 + q_2 + q_3 + q_4$ est donc un nombre impair. La différence de 2 nombres impairs

$$(n + 2r + m) - (q_1 + q_2 + q_3 + q_4)$$

est un nombre pair. De même quand les nombres $r$ et $n$ sont impairs et $m$ est pair.

Supposons les 3 nombres $n$, $r$ et $m$ impairs, leurs diviseurs $q_1$, $q_2$, $q_3$ et $q_4$ sont également impairs et les 2 sommes $n + 2r + m$ et $q_1 + q_2 + q_3 + q_4$ sont des nombres pairs, il en sera de même de la différence

$$(n + 2r + m) - (q_1 + q_2 + q_3 + q_4).$$

Cette différence est donc toujours un nombre pair ou bien le nombre

$$N = \{n + 2r + m - q_1 - q_2 - q_3 - q_4\} : 2$$

est un entier.

§ 15. *Du nombre des branches de la courbe nodale gauche $\xi'$ passant par $M_1$.*

Coupons la développable $D$ par un plan $y = x\, tg\, \varphi$, $\varphi$ étant quelconque. Transformons les coordonnées en retenant le plan des $z$ et l'origine. Soit le plan sécant le plan $y_1 = 0$ et soit $x_1 = 0$ le plan perpendiculaire au plan sécant et passant par l'axe des $z$; on aura les formules de transformation

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos\varphi + y \sin\varphi, \\ y_1 &= -x \sin\varphi + y \cos\varphi, \\ z_1 &= z. \end{aligned}$$

Les coordonnées primitives d'un point de la développable $D$ étant:

$$\begin{aligned} x &= t^n + l n t^{n-1}, \\ y &= t^{n+r} + l(n+r)\, t^{n+r-1}, \\ z &= t^{n+r+m} + l(n+r+m)\, t^{n+r+m-1}, \end{aligned}$$

les coordonnées nouvelles seront:

$$\begin{aligned} x_1 &= \{t^n + l n t^{n-1}\} \cos\varphi + \{t^{n+r} + l(n+r)\, t^{n+r-1}\} \sin\varphi, \\ y_1 &= -\{t^n + l n t^{n-1}\} \sin\varphi + \{t^{n+r} + l(n+r)\, t^{n+r-1}\} \cos\varphi, \\ z_1 &= t^{n+r+m} + l(n+r+m)\, t^{n+r+m-1}. \end{aligned}$$

Si les paramètres $l$ et $t$ satisfont à la relation

$$0 = -\{t^n + l n t^{n-1}\} \sin\varphi + \{t^{n+r} + l(n+r)\, t^{n+r-1}\} \cos\varphi,$$

ou bien

$$l = -t\frac{tg\,\varphi - t^r}{n\,tg\,\varphi - (n+r)\,t^r},$$

on aura $y_1 = 0$ et les points correspondants se trouvent donc dans le plan sécant $y = x\,tg\,\varphi$. Par conséquent, les coordonnées d'un point de la courbe d'intersection $S_1$ de la développable $D$ avec le plan $y = x\,tg\,\varphi$ seront

$$x_1 = t^n \cos\varphi\left[1 - \frac{n\,tg\,\varphi - n\,t^r}{n\,tg\,\varphi - (n+r)\,t^r} + t^r\,tg\,\varphi\left\{1 - \frac{(n+r)\,tg\,\varphi - (n+r)\,t^r}{n\,tg\,\varphi - (n+r)\,t^r}\right\}\right],$$

$$z_1 = t^{n+r+m}\left[1 - (n+r+m)\frac{tg\,\varphi - t^r}{n\,tg\,\varphi - (n+r)\,t^r}\right],$$

ou bien

$$x_1 = -\frac{r\,t^{n+r}\sec\varphi}{n\,tg\,\varphi - (n+r)\,t^r},$$

$$z_1 = -t^{n+r+m}\frac{(r+m)\,tg\,\varphi - m\,t^r}{n\,tg\,\varphi - (n+r)\,t^r}.$$

En supposant qu'on n'ait pas $\varphi = 0$ on poura poser

$$x_2 = \frac{-x_1\,n\sin\varphi}{r} = t^{n+r}\left\{1 - \frac{(n+r)\,t^r}{n\,tg\,\varphi}\right\}^{-1} = T^{n+r},$$

$$z_2 = \frac{-z_1\,n}{r+m} = t^{n+r+m}\left\{1 - \frac{m\,t^r}{(r+m)\,tg\,\varphi}\right\}\left\{1 - \frac{(n+r)\,t^r}{n\,tg\,\varphi}\right\}^{-1},$$

d'où en prenant $t$ suffisammant petit

$$z_2 - T^{n+r+m} = t^{n+r+m}\left\{1 + \frac{r\,(n+r+m)\,t^r}{n\,(r+m)\,tg\,\varphi} + \text{etc.}\right\} -$$

$$- t^{n+r+m}\left\{1 + \frac{(n+r+m)\,t^r}{n\,tg\,\varphi} + \text{etc.}\right\},$$

$$z_2 - T^{n+r+m} = -t^{n+2r+m}\frac{m\,(n+r+m)}{n\,(r+m)\,tg\,\varphi} + \text{etc.},$$

$$z_2 = T^{n+r+m} - \frac{m\,(n+r+m)}{n\,(r+m)\,tg\,\varphi}\,T^{n+2r+m} + \text{etc.}.$$

Des 2 valeurs

$$x_2 = T^{n+r},\ z_2 = T^{n+r+m} - \frac{m\,(n+r+m)}{n\,(r+m)\,tg\,\varphi}\,T^{n+2r+m} + \text{etc.}$$

on déduit que le point $M_1$ est sur la courbe de section $S_1$ un point singulier où passent $n+r$ branches formant un cycle

$(n+r, m)$. Le nombre des braches de $S_1$ passant par $M_1$ étant indépendant de $\varphi$, il passe par le point $M_1$ $n+r$ nappes de la développable $D$.

Les $n+r-1$ points stationnaires de la section $S_1$, qui sont équivalents an cycle $M_1$ $(n+r, m)$ sont dûs ou passage par $M_1$ de $n$ branches de l'arêt de rebroussement (§ 3) et au passage de la génératrice $g_1$, laquelle est équivalente à $r-1$ tangentes stationnaires $\theta$ (§§ 9, 10).

Le plus grand commun diviseur $q_3$ de l'ordre $n+r$ et de la classe $m$ du cycle $M_1$ $(n+r, m)$ ne peut avoir un facteur de commun avec le nombre $r$, puisque les nombres $n$, $r$ et $m$ n'admettent pas de facteur commun (§ 2). Le nombre des intersections de la courbe $S_1$ avec sa première polaire, coïncidantes avec le point $M_1$ est donc

$$(n+r-1)(n+r+m)+r(q_3-1)\ ^{1}).$$

Le nombre des noeuds équivalentes au cycle $M_1$ $(n+r, m)$ est donc (§ 7)

$$\delta = \{(n+r-1)(n+r+m-3)+r(q_3-1)\}:2.$$

Ce résultat tombe en défaut quand s'annule le coefficient $\frac{m(n+r+m)}{n(m+r)\,tg\,\varphi}$ du terme en $T^{n+2r+m}$ du développement donnant $z_2$. Il faut donc exclure la valeur $\varphi = \pi:2$. Le plan sécant $y = x\,tg\,\varphi$ n'étant pas tangent, au point $M_1$, à la développable $D$ ou à l'arête de rebroussement, les noeuds $\delta$ réunis en $M_1$ sont dûs à la rencontre de ligues doubles.

Les lignes doubles passant pas le point $M_1$ sont

1°. la génératrice singulière $g_1$ (§ 10) tangente à l'arête de rebroussement $C(n, r, m)$ au point $M_1$;

2°. les sections planes $S_x$, $S_y$ et $S_z$ (§ 12) et 3° peut-être des branches de la courbe nodale restante $\xi'$ (§ 13).

La génératrice $g_1$ est équivalente à

$$\omega_1' = \{(r-1)(r+m-3)+n(q_2-1)\}:2$$

génératrices doubles $\omega'$.

La section $S_z$ est une courbe nodale dont le dégre de multiplicité est $q_1$ et dont l'équation est (§ 12)

---

[1]) HALPHEN. *Mém. d. l'Ac. d. Paris* (sav. étr.). T. 26, p. 42, p. 50.

$$\left\{\frac{x\,(n+r+m)}{r+m}\right\}^{\frac{n+r}{q_1}} = \left\{\frac{(n+r+m)\,y}{m}\right\}^{\frac{n}{q_1}}.$$

Par le point $M_1$ il passe donc $n:q_1$ branches de la courbe nodale $S_z$, ces branches sont équivalentes à $n\,(q_1-1):2$ branches doubles et ces branches nodales n'étant pas tangentes au plan sécant $y = x\,tg\,\varphi$, ces branches donnent lieu à autant de noeuds de la section $S_1$.

La section $S_y$ est une courbe nodale, dont le degré de multiplicité est $q_4$, et dont l'équation est (§ 12)

$$\left\{\frac{(n+r)\,x}{r}\right\}^{\frac{n+r+m}{q_4}} = \left\{\frac{-(n+r)\,z}{m}\right\}^{\frac{n}{q_4}}.$$

Par le point $M_1$ il passe donc $n:q_4$ branches de la courbe nodale $S_y$; ces branches sont équivalentes à $n\,(q_4-1):2$ branches doubles. Ces branches n'étant pas tangentes au plan sécant $y = x\,tg\,\varphi$ donnent sur la section $S_1$ lieu à $n\,(q_4-1):2$ noeuds réunis au point $M_1$.

La section plane $S_x$ est une courbe nodale, dont le degré de multiplicité est $q_3$ et dont l'équation est (§ 12)

$$\left\{-\frac{ny}{r}\right\}^{\frac{n+r+m}{q_3}} = \left\{\frac{-nz}{r+m}\right\}^{\frac{n+r}{q_3}}.$$

Par conséquent, il passe par le point $M_1$, $(n+r):q_3$ branches nodales, qui sont équivalentes à $(n+r)\,(q_3-1):2$ branches doubles. Ces branches n'étant pas tangentes au point $M_1$ au plan sécant $y = x\,tg\,\varphi$, elles donnent sur la section $S_1$ lieu à $(n+r)\,(q_3-1):2$ noeuds réunis au point $M_1$.

En diminuant le nombre des noeuds de la section $S_1$ réunis au point $M_1$

$$\delta_1 = \{(n+r-1)\,(n+r+m-3) + r\,(q_3-1)\}:2$$

des nombres

$$\omega_1' = \{(r-1)\,(r+m-3) + n\,(q_2-1)\}:2$$
$$n\,(q_1-1):2,\ n\,(q_4-1):2,\ (n+r)\,(q_3-1):2$$

donnant les nombres des noeuds de la section $S_1$ dûs à la rencontre au point $M_1$ des lignes nodales $g_1$, $S_z$, $S_y$ et $S_x$, il reste encore

$$n\,(n+2r+m-q_1-q_2-q_3-q_4):2 = n\,N$$

noeuds dûs à la rencontre d'autant de branches de la nodale $\xi'$. On a donc le théorème:

*Par le point $M_1$ il passe n N branches de la courbe nodale $\xi'$.*

Sauf pour les 2 valeurs $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi : 2$, qui viennent d'être exlues, on trouve pour chaque valeur de $\varphi$ le même nombre de noeuds réunis au point $M_1$, donc aussi le même nombre de points communs du plan sécant et de la courbe $\xi'$. Par conséquent, le plan sécant $y = x\, tg\, \varphi$ ne peut être tangent au point $M_1$ à la courbe $\xi'$ que pour les valeurs $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi : 2$. Les tangentes au branches de la courbe $\xi'$ au point $M_1$ ne peuvent donc se trouver que dans les plans $y = 0$ et $x = 0$. La courbe $\xi'$ se trouvant sur la développable $D$, les tangentes à la courbe $\xi'$ au point $M_1$ se trouvent dans le plan tangent au point $M_1$ à la développable $D$. Ce plan tangent est le plan $z = 0$.

Les branches de la courbe $\xi'$ passant par le point $M_1$ sont donc, ou tangentes à l'axe des $x$, ou à l'axe des $y$. Je démontrerai au § suivant que ces branches ne sont pas tangentes à l'axe des $y$, par conséquent, elles sont tangentes à l'axe des $x$, résultat qu'on obtiendra encore d'une autre manière au § 24.

§ 16. *De l'intersection de la développable D avec le plan $z = x\, tg\, \varphi$.*

Pour vérifier si l'axe des $Y$ est tangente au point $M_1$ à des branches de la courbe nodale $\xi'$, coupons la développable $D$ par un plan $z = x\, tg\, \varphi$ passant par l'axe des $Y$. Transformons les coordonnées par les formules

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \varphi + z \sin \varphi, \\ y_1 &= y, \\ z_1 &= -x \sin \varphi + z \cos \varphi. \end{aligned}$$

Les coordonnées nouvelles d'un point de la développable $D$ sont alors

$$\begin{aligned} x_1 &= \{t^n + ln\, t^{n-1}\} \cos\varphi + \{t^{n+r+m} + l(n+r+m)\, t^{n+r+m-1}\} \sin\varphi, \\ y_1 &= t^{n+r} + l\,(n+r)\, t^{n+r-1}, \\ z_1 &= -\{t^n + ln\, t^{n-1}\} \sin\varphi + \{t^{n+r+m} + l\,(n+r+m)\, t^{n+r+m-1}\} \cos\varphi. \end{aligned}$$

Pour tout point du plan sécant $z = x\, tg\, \varphi$ on aura $z_1 = 0$, cequi donne la relation suivante entre les paramètres $l$ et $t$ des points de la développable $D$, lesquels se trouvent dans le plan $z = x\, tg\, \varphi$,

$$t^{n+r+m} + l\,(n+r+m)\, t^{n+r+m-1} = (t^n + ln\, t^{n-1})\, tg\, \varphi,$$

d'où

$$l = -t\,(tg\,\varphi - t^{r+m}) : \{n\,tg\,\varphi - (n+r+m)\,t^{r+m}\}.$$

Les coordonnées d'un point quelconque de la section plane $S_2$, située dans le plan $z = x\,tg\,\varphi$, sont donc:

$$x_1 = -\frac{(r+m)\,t^{n+r+m}}{n\,sin\,\varphi} : \left\{1 - \frac{(n+r+m)\,t^{r+m}}{n\,tg\,\varphi}\right\},$$

$$y_1 = -\frac{r\,t^{n+r}}{n}\left\{1 + \frac{m\,t^{r+m}}{r\,tg\,\varphi}\right\} : \left\{1 - \frac{(n+r\,m)\,t^{r+m}}{n\,tg\,\varphi}\right\}.$$

En posant $x_2 = -\dfrac{n\,x_1\,sin\,\varphi}{r+m}$, $y_2 = -\dfrac{n\,y_1}{r}$ et

$$T^{n+r} = t^{n+r}\left\{1 + \frac{m\,t^{r+m}}{r\,tg\,\varphi}\right\} : \left\{1 - \frac{(n+r+m)\,t^{r+m}}{n\,tg\,\varphi}\right\}$$

ou obtient facilement,

$$y_2 = T^{n+r},\ x_2 = T^{n+r+m} - \frac{m\,(n+r+m)}{n\,r\,tg\,\varphi}\,T^{n+2r+2m} + \text{etc.}\ .$$

La section $S_2$ présente donc au point $M_1$ un cycle $(n+r, m)$, qui est équivalent à

$$\delta_2 = \{(n+r-1)\,(n+r+m-3) + (m+r)\,(q_3 - 1)\} : 2$$

noeuds de la section $S_2$. Le plan sécant $z = x\,tg\,\varphi$, n'étant pas tangent au point $M_1$ à la développable $D$ ou à l'arête de rebroussement $C(n, r, m)$, les noeuds $\delta_2$, équivalent au cycle $M_1\,(n+r, m)$, sont dûs à la rencontre de $\delta_2$ branches de courbes nodales ou de génératrices doubles Le plan $z = x\,tg\,\varphi$ rencontre au point $M_1$ les courbes nodales $S_x$, $S_y$, $S_z$ et $\xi'$ et la génératrice singulière $g_1$. Comme au § précédant on trouve que la courbe $S_2$ possède au point $M_1$ les nombres suivants de noeuds dûs à la rencontre des lignes $g_1$, $S_z$ et $S_y$

$$\{(r-1)\,(r+m-3) + n\,(q_2 - 1)\} : 2,\ n\,(q_1 - 1) : 2,\ n\,(q_4 - 1) : 2.$$

L'équation de la section $S_r$ étant (§ 12)

$$\left\{\frac{-n\,y}{r}\right\}^{\frac{n+r+m}{q_3}} = \left\{\frac{-n\,z}{r+m}\right\}^{\frac{n+r}{q_3}}$$

l'axe des $y$ est la tangente au point $M_1$ à la section $S_r$. Cette tangente y a de commun avec la section $S_x\,(n+r+m) : q_3$ points

consécutifs. Chaque point de la section $S_x$, laquelle est une courbe nodale dont le degré de multiplicité est $q_3$, équivaut à $q_3(q_3-1):2$ points doubles. Les points que l'axe des $y$, donc également le plan sécant $z = x\,tg\,\varphi$, a de commun avec la courbe nodale $S_x$ sont donc équivalents à $(n+r+m)(q_3-1):2$ noeuds de la section $S_2$. En diminuant le nombre des noeuds

$$\delta_2 = \{(n+r-1)(n+r+m-3)+(r+m)(q_3-1)\}:2,$$

équivalent au cycle $M_1(n+r, m)$, des nombres de noeuds dûs à la rencontre des lignes nodales $g_1$, $S_z$, $S_y$ et $S_x$ il reste encore $n\,N$ noeuds, qui sont dûs à la rencontre de branches de la nodale $\xi'$.

Le plan $z = x\,tg\,\varphi$ rencontre donc au point $M_1$ la courbe $\xi'$ autant de fois que le fait le plan $y = x\,tg\,\varphi$ (§ 15). Le plan $z = x\,tg\,\varphi$ n'est donc pas tangent à la courbe $\xi'$ au point $M_1$. Par conséquent, l'axe des $y$ ne peut pas être tangent au point $M_1$ à une ou à plusieurs branches de la courbe $\xi'$. *Les $n\,N$ branches de la courbe $\xi'$ lesquelles passent par le point $M_1$, $y$ sont donc tangentes à l'axe des $x$* (§ 15), *c'est à dire sont tangentes au point $M_1$ à la courbe $C(n, r, m)$*. De même on trouve que les $m\,N$ branches de la courbe $\xi'$, lesquelles passent par le point $M_2$, ne sont pas tangentes à la droite de l'infini du plan $y = 0$ et que, par conséquent, ces $m\,N$ branches y sont tangentes à la génératrice $g_2$.

Nous venons de voir que les coordonnées d'un point de la section $S_2$ s'expriment en fonction du paramètre $t$ de la manière suivante

$$x_1 = -\frac{(r+m)\,t^{n+r+m}}{n\,sin\,\varphi} : \left\{1 - \frac{(n+r+m)\,t^{r+m}}{n\,tg\,\varphi}\right\},$$

$$y_1 = -\frac{r\,t^{n+r}}{n}\left\{1 + \frac{m\,t^{r+m}}{r\,tg\,\varphi}\right\} : \left\{1 - \frac{(n+r+m)\,t^{r+m}}{n\,tg\,\varphi}\right\}.$$

Rendons les coordonnées homogènes et posons après $y_1 = 1$ on obtient:

$$u_1 = -\frac{n}{r\,t^{n+r}}\left\{1 - \frac{(n+r+m\,t^{r+m}}{n\,tg\,\varphi}\right\} : \left\{1 + \frac{m\,t^{r+m}}{r\,tg\,\varphi}\right\},$$

$$x_1 = \frac{(r+m)\,t^m}{r\,sin\,\varphi} : \left\{1 + \frac{m\,t^{r+m}}{r\,tg\,\varphi}\right\}.$$

En remplaçant $t$ par $1:t$ ces expressions deviennent

$$u_1 = \frac{+(n+r+m)\,t^{n+r}}{m}\left\{1 - \frac{n\,tg\,\varphi\,t^{r+m}}{n+r+m}\right\} : \left\{1 + \frac{r\,tg\,\varphi\,t^{r+m}}{m}\right\},$$

$$x_1 = \frac{(r+m)\,t^r}{m\cos\varphi} : \left\{1 + \frac{r\,tg\,\varphi\,t^{r+m}}{m}\right\},$$

dont on déduit facilement

$$x_2 = T^r,\ u_2 = T^{n+r} + \frac{n\,(r+m)\,tg\,\varphi}{m\,(n+r+m}\,T^{n+2r+m} + \text{etc.}\ .$$

Le point $M_4$ $(x = u = z = 0)$, c'est à dire le point à l'infini de l'axe des $y$ est donc un point singulier de la section $S_2$. Les $r$ branches de la section $S_2$ lesquelles passent par le point $M_4$ y constituent un cycle $M_4\,(r, n)$. Le cycle $M_4\,(r, n)$ est équivalent à $r - 1$ points stationnaires, qui sont dûs au passage par le point $M_4$ de la génératrice singulière $g_2$, tangente à la courbe $C(n, r, m)$ au point $M_2\,(m, r, n)$ (§ 10). Le cycle $M_4\,(r, n)$ est équivalent au nombre de noeuds suivant

$$\delta_2' = \{(r-1)\,(n+r-3) + (r+m)\,(q_3 - 1)\} : 2.$$

Par le point $M_4$ il passe la génératrice $g_2$ et la section $S_z$, qui sont des lignes nodales et peut-être encore des branches de la courbe nodale $\xi'$. L'équation de la section $S_z$ étant (§ 12) :

$$\left\{\frac{(n+r+m)\,x}{r+m}\right\}^{\frac{n+r}{q_1}} = \left\{\frac{(n+r+m)\,y}{m}\right\}^{\frac{n}{q_1}}$$

le point $M_4$ $(x = z = u = 0)$ est un point singulier de la section $S_z$ où passent $r : q_1$ branches formant un cycle $\left(\frac{r}{q_1}, \frac{n}{q_1}\right)$. Le degré de multiplicité de la section $S_z$ étant $q_1$, les $r : q_1$ branches de la section $S_z$ sont équivalentes à $r\,(q_1 - 1) : 2$ branches de courbes doubles. La section $S_2$ possède donc au point $M_4$, $r\,(q_1 - 1) : 2$ noeuds dûs au passage par le point $M_4$ des $r : q_1$ branches de la section $S_z$. La section $S_2$ possède au point $M_4$ encore

$$\omega_2' = \{(r-1)\,(n+r-3) + m\,(q_1 - 1)\} : 2$$

noeuds dûs au passage par le point $M_4$ de la génératrice singulière $g_2$ (§ 10). La somme des nombres de noeuds dûs à $g_2$ et $S_z$ étant précisément $\delta_2'$, il ne passe pas par le point $M_4$ des branches de la courbe nodale $\xi'$.

On peut conclure par analogie, ou démontrer de la même

manière, qu'il ne passe pas des branches de la courbe nodale $\xi'$ par le point $M_3$ $(y = z = u = 0)$, c'est à dire, par le point à l'infini de la génératrice $g_1$.

§ 17. *Des points d'intersection de la courbe $\xi'$ avec le plan $y = 0$.*

Nous avons vu que par le point $M_1$ il passe $nN$ branches de la courbe nodale $\xi'$ (§ 15). En changeant $n$ en $m$ et vice-versa, on trouve que par le point singulier $M_2$ il passe

$$m(m + 2r + n - q_1 - q_2 - q_3 - q_4) : 2 = mN$$

branches de la courbe nodale $\xi'$, et que ces branches sont toutes tangentes à la génératrice $g_2$ (la droite de l'infini du plan $x = 0$) ou bien à la courbe $C(n, r, m)$. Maintenant je dis que la courbe nodale $\xi'$ rencontre le plan $y = 0$ seulement aux points singuliers $M_1$ et $M_2$.

En effet, l'intersection de la développable $D$ avec le plan $y = 0$ consiste en l'axe des $x$ qui est une génératrice multiple $g_1$ et en une courbe $S_y$ (§ 12). La génératrice $g_1$ rencontrera des branches de courbes nodales en les points $R$ où la génératrice $g_1$ coupe une nappe de la développable $D$ et en les points $Q$ où les nappes passant par la génératrice $g_1$ se pénètrent. Nous avons vu au § 10 que les seuls points $Q$, qui peuvent se trouver sur la génératrice $g_1$ sont les points $M_1$ et $M_3$ et nous avons vu au § 12 que le seul point $R$ où la génératrice $g_1$ peut rencontrer des nappes de la développable $D$ est le point $M_1$. Les branches nodales que l'axe des $x$ rencontre en son point à l'infini $M_3$ appartiennent à la section plane $S_\infty$ (§ 16). La génératrice $g_1$ (l'axe des $x$) rencontre donc seulement la courbe nodale $\xi'$ au point $M_1$.

La section plane $S_y$ est une courbe multiple dont le degré de multiplicité est $q_4$ et dont l'équation est (§ 12)

$$\left(\frac{(n + r)x}{r}\right)^{\frac{n+r+m}{q_4}} = \left(\frac{-(n + r)z}{m}\right)^{\frac{n}{q_4}}.$$

Si $q_4 = 1$ la section $S_y$ est une courbe simple, qui ne possède d'autres points singuliers que les points $M_1$ et $M_2$. Chaque point de rencontre du plan $y = 0$ avec la courbe nodale $\xi'$ étant un noeud de la section totale, la courbe nodale $\xi'$ ne peut rencontrer la section $S_y$ que dans ses points de rencontre avec l'axe des $x$ et en ses points singuliers. Les points de rencontre de la section

$S_y$ avec l'axe des $x$ se trouvent tous au point $M_1$. Les seuls points singuliers de la section $S_y$ sont les points $M_1$ et $M_2$, par conséquent, si $q_4 = 1$ la courbe nodale $\xi'$ rencontre la section $S_y'$ seulement aux points $M_1$ et $M_2$.

Quand $q_4 > 1$, tous les points de la section $S_y$ sont des points multiples de la section totale avec le plan $y = 0$ et il serait possible que la courbe nodale $\xi'$ passerait par un point ordinaire $P$ de la courbe $S_y$. Ce point $P$ étant un point ordinaire de la courbe $S_y$, il passe par le point $P$ $q_4$ nappes de la développable $D$. La branche de la courbe nodale $\xi'$ passant par le point $P$, serait l'intersection de 2 de ces $q_4$ nappes. Ces 2 nappes seraient tangentes au point $P$ et le point $P$ serait un point de pincement (pinch-point, klempunt) sur la courbe nodale $S_y$. Un des plans tangents à la développable $D$ au point $P$ serait donc un plan double $G$. Mais nous avons vu au § 8 que les seuls plans doubles $G$ de la courbe $C(n, r, m)$ sont les 2 plans singuliers $z = 0$ et $u = 0$. Par conséquent, sur la section $S_y$ ne se trouvent pas des points de pincement $P$ en dehors des points de conclact $M_1$ et $M_2$ des plans singuliers $z = 0$ et $u = 0$. En résumant, on obtient le théorème:

*Le plan $y = 0$ rencontre seulement la courbe nodale $\xi'$ aux points singuliers $M_1$ et $M_2$.*

De même on trouve que le plan $x = 0$ rencontre la courbe nodale $\xi'$ seulement aux points $M_1$ et $M_2$. La courbe $\xi'$ ne rencontrant les plans $y = 0$ et $x = 0$ qu'aux 2 points $M_1$ et $M_2$ et les tangentes $g_1$ et $g_2$ aux branches de $\xi'$ aux points $M_1$ et $M_2$ n'étant pas dans un plan, il est impossible que la courbe $\xi'$ ou une partie de cette courbe soit plane. On a donc le théorème:

*La courbe $\xi'$ est une courbe gauche.*

La courbe $\xi'$ est du degré $(n + r + m)\,N$ (§ 13). Elle rencontre le plan $y = 0$ au point $M_2$ seulement $m\,N$ fois, puisque la tangente $g_2$ aux $m\,N$ branches de $\xi'$ les quelles passent par le point $M_2$, ne se trouve pas dans le plan $y = 0$ (§ 16). Le plan $y = 0$ rencontre donc la courbe $\xi'$ au point $M_1$ $(n + r)\,N$ fois, tandis qu'un plan quelconque passant par l'axe des $z$ rencontre au point $M_1$ la courbe $\xi'$ seulement $n\,N$ fois (§ 15). Dans le plan $y = 0$ se trouvent donc des tangentes au point $M_1$ à la courbe $\xi'$, et le plan $y = 0$, étant le seul plan du faisceau $y = x\,tg\,\varphi$, jouissant de cette propriété (§§ 15, 16), on peut conclure que toutes les tangentes à la courbe

$\xi'$ au point $M_1$ se trouvent dans le plan $y=0$. Ces tangentes se trouvant également dans le plan tangent de la développable, $z=0$, l'axe des $x$ est la tangente aux $nN$ branches de la courbe nodale $\xi'$, lesquelles passent par le point $M_1$. Nous verrons au § suivant que les $(n+r)N$ points communs de la courbe $\xi'$ et du plan $y=0$, les quels coïncident avec le point $M_1$, se trouvent sur l'axe des $x$.

§ 18. *Des intersections de la courbe nodale $\xi'$ avec un plan $z=y\,tg\,\varphi$.*

Coupons la développable $D$ par un plan $z=y\,tg\,\varphi$. L'intersection totale consiste en la génératrice $g_1$ (l'axe des $x$) et en une courbe $S_3$.

Transformons les coordonnées

$$\begin{aligned} x_1 &= x\,, \\ y_1 &= y\cos\varphi + z\sin\varphi\,, \\ z_1 &= -y\sin\varphi + z\cos\varphi\,. \end{aligned}$$

Les coordonnées nouvelles d'un point quelconque de la développable $D$ sont

$$\begin{aligned} x_1 &= t^n + l\,n\,t^{n-1}, \\ y_1 &= \{t^{n+r} + l(n+r)t^{n+r-1}\}\cos\varphi + \{t^{n+r+m} l(n+r+m)t^{n+r+m-1}\}\sin\varphi, \\ z_1 &= -\{t^{n+r} + l(n+r)t^{n+r-1}\}\sin\varphi + \{t^{n+r+m} l(n+r+m)t^{n+r+m-1}\}\cos\varphi. \end{aligned}$$

Pour tout point de la section $S_3$ on aura $z_1=0$, et les paramètres $l$ et $t$ satisfont à la relation

$$l = -t\,\frac{tg\,\varphi - t^m}{(n+r)\,tg\,\varphi - (n+r+m)\,t^m}\,.$$

Les coordonnées d'un point de la section $S_3$ seront donc

$$x_1 = t^n\,\frac{r\,tg\,\varphi - (r+m)\,t^m}{(n+r)\,tg\,\varphi - (n+r+m)\,t^m}\,,$$

$$y_1 = -\,t^{n+r+m}\,\frac{m\sec\varphi}{(n+r)\,tg\,\varphi - (n+r+m)\,t^m}\,.$$

En posant $x_2 = \dfrac{n+r}{r}\,x_1 = t^n\left\{1 + \left(\dfrac{n+r+m}{n+r} - \dfrac{r+m}{r}\right)\dfrac{t^m}{tg\,\varphi} + \text{etc.}\right\}$,

$$y_2 = -\frac{(n+r)\sin\varphi}{m}\,y_1 = t^{n+r+m}\left\{1 + \frac{(n+r+m)\,t^m}{(n+r)\,tg\,\varphi} + \text{etc.}\right\}\,,$$

on trouve facilement que les coordonnées d'un point de la section $S_3$, situé dans le voisinage du point $M_1$, sont exprimées par les développements

$$x_2 = T^n,\ y_2 = T^{n+r+m} + \frac{(m+r)(n+r+m)}{r(n+r)\,tg\,\varphi} T^{n+r+2m} + \text{etc.}\ .$$

Les $n$ branches de la courbe $S_3$, passant par le point singulier $M_1$ (correspondant au paramètre $T=0$), forment donc un cycle $(n, r+m)$. Ce cycle $(n, r+m)$ est équivalent à $n-1$ points stationnaires de la section $S_3$ tandis que l'arête de rebroussement $C(n,r,m)$ a de commun au point $M_1$ $n+r$ points consécutifs avec le plan sécant (§ 3). En général, chaque point de l'arête de rebroussement est un point stationnaire d'une section, sauf dans le cas que le plan sécant est tangente à l'arête de rebroussement, les 2 points consécutifs communs donnant 3 noeuds de la section totale. Le plan sécant $z = y\,tg\,\varphi$, passant par la tangente au point $M_1$ à l'arête de rebroussement $C(n,r,m)$, nous nous trouvons dans le cas d'exception et des points de l'arête de rebroussement donnent lieu à des noeuds de la section $S_3 + g_1$. Le cycle $M_1$ $(n, r+m)$ est équivalent (§ 7) à le nombre de noeuds

$$\delta_3 = \{(n-1)(n+r+m-3) + m(q_4 - 1)\} : 2.$$

Remarquons qu'on trouve la même valeur de $\delta_3$ pour toute valeur de $\varphi$ sauf pour les 2 valeurs $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi : 2$. Les seuls plans du faisceau $z = y\,tg\,\varphi$ qui peuvent donner un nombre supérieur de noeuds sont donc les plans $z=0$ et $y=0$ et en effet ces 2 plans contiennent les courbes multiples $S_z$ et $S_y$ et contiennent des nombres infinis de noeuds. Les plans $z=0$ et $y=0$ sont donc les seuls plans du faisceau $z = y\,tg\,\varphi$ qui peuvent être des plans osculateurs des $nN$ branches de la courbe $\xi'$ tangentes au point $M_1$ à l'axe des $x$ (§ 17).

Afin de connaître le nombre de points communs de la courbe $\xi'$ avec le plan sécant $z = y\,tg\,\varphi$ lesquels coïncident avec le point $M_1$, déterminons de 2 manières le nombre des noeuds de la courbe $S_3$ [1]).

La section totale consiste en la courbe $S_3$ et en l'axe des $x$ compté $r$ fois (§ 10). La courbe $S_3$ est donc du degré $\varrho - r$,

---

[1]) Cremona – Curtze, *Oberflächen.* § 97 – § 109.

résultat qu'on avait pu tirer aussi de l'expression en fonction de $t$ des coordonnées $x_1$ et $y_1$ d'un point de la courbe $S_3$. Le plan sécant $z = y\, tg\, \varphi$ n'étant pas un plan osculateur de la courbe $C(n, r, m)$, pour $\varphi$ quelconque, la classe de la section $S_3$ sera égale à la classe $\mu$ de la courbe $C(n, r, m)$ (§ 4). Les points stationnaires de la section $S_3$ seront : 1° $n - 1$ au point singulier $M_1$ $(n, r + m)$, 2° les intersections avec l'arête de rebroussement non-coïncidantes avec le point $M_1$. Le plan $z = y\, tg\, \varphi$ passant par la tangente à la courbe $C(n, r, m)$ au point $M_1$, y rencontre la courbe $C(n, r, m)$, $n + r$ fois (§ 3). Le plan sécant rencontre donc l'arête de rebroussement $(n + r + m) - (n + r) = m$ fois en dehors du point $M_1$. Pour $\varphi$ quelconque ces $m$ points seront des points séparés, et seront donc des points stationnaires de la section $S_3$ ; 3° les intersections avec la génératrice singulière $g_2$, laquelle compte pour $r - 1$ génératrices stationnaires $\theta$ (§ 10). Le nombre des points stationnaires de la section $S_3$ est donc

$$n - 1 + m + r - 1 = n + r + m - 2 = \nu - 2.$$

Le nombre des noeuds de la section est donc

$$\delta = \{ (\varrho - r)(\varrho - r - 1) - \mu - 3(\nu - 2) \} : 2,$$
$$\delta = \{ \varrho(\varrho - 1) - \mu - 3(\nu + 2r - 2) + r^2 + 7r - 2r\varrho \} : 2,$$
$$\delta = \xi + \omega' - r\varrho + \frac{r^2 + 7r}{2} \quad \text{(A)}$$

Le plan sécant $z = y\, tg\, \varphi$ n'étant pas, pour $\varphi$ quelconque, tangent à la développable $D$, et en dehors du point $M_1$, n'étant pas tangent à l'arête de rebroussement, les noeuds de la section $S_3$ seront le point $M_1$ et les intersections avec les lignes nodales $\xi$ et $\omega'$. Le plan sécant $z = y\, tg\, \varphi$ passe par l'axe des $x$, qui compte pour $\{(r - 1)(r + m - 3) + n(q_2 - 1)\} : 2$ génératrices doubles (§ 10). Le plan sécant ne peut rencontrer, par conséquent, que

$$\omega' - \{(r - 1)(r + m - 3) + n(q_2 - 1)\} : 2$$

autres génératrices doubles.

Le plan sécant $z = y\, tg\, \varphi$ rencontre la courbe nodale $\xi$ au point $M_1$ un nombre inconnu de fois. Soit $M_1$ ce nombre inconnu. Le plan sécant rencontre la courbe nodale $S_\infty$ au point à l'infini de l'axe des $x$. Par ce point $M_3$ il passe $r : q_2$ branches de la section $S_\infty$ et pas d'autres branches nodales (§ 16). La courbe $S_\infty$ étant une courbe nodale dont le degré de multiplicité est $q_2$, ces $r : q_2$

branches comptent pour $r(q_2 - 1) : 2$ branches doubles. En dehors de l'axe des $x$, le plan sécant rencontre donc la courbe nodale $\xi$ le nombre de fois suivant

$$\xi - M_1 - r(q_2 - 1) : 2.$$

Le point à l'infini $M_3$ de l'axe des $x$ n'est pas un point de la section $S_3$ et nous venons de voir que le point $M_1$ compte pour

$$\delta_3 = \{(n-1)(n+r+m-3) + m(q_4 - 1)\} : 2$$

noeuds de la section $S_3$.

Le nombre des noeuds de la section $S_3$ est donc

$$\delta = \xi + \omega' - M_1 - r(q_2 - 1) : 2 - \{(r-1)(r+m-3) + n(q_2 - 1)\} : 2 + \\ + \{(n-1)(n+r+m-3) + m(q_4 - 1)\} : 2 \ldots\ldots \text{(B)}$$

En égalisant les 2 valeurs $A$ et $B$ de $\delta$ on trouve facilement

$$M_1 = \{(n+r)(n+2r+m-q_2-3) + m(q_4 - 1)\} : 2.$$

Les $M_1$ points d'intersection du plan sécant avec la courbe nodale $\xi$ sont des points appartenant aux courbes $\xi'$, $S_x$, $S_y$ et $S_z$. Par le point $M_1$ du plan sécant, il passe $(n+r) : q_3$ branches de la courbe nodale $S_x$ laquelle est une courbe d'un degré de multiplicité $q_3$ (§ 12). Des $M_1$ points d'intersection il y a donc $(n+r)(q_3 - 1) : 2$ qui appartiennent à la section plane $S_x$.

Par le point $M_1$ il passe $n : q_4$ branches de la courbe $S_y$, lesquelles sont tangentes à l'axe des $x$ et qui sont donc également tangentes au plan sécant $z = y\, tg\, \varphi$. Le plan sécant a de commun, au point $M_1$, $(n+r+m) : q_4$ points consécutifs avec la courbe $S_y$. Chacun de ces points compte pour $q_4(q_4 - 1) : 2$ points d'une courbe double Du nombre d'intersections $M_1$, il y a donc $(n+r+m)(q_4 - 1) : 2$ qui appartiennent à courbe $S_y$.

Par le point $M_1$ il passe $n : q_1$ branches de la section plane $S_z$. Ces branches, étant tangentes à l'axe des $x$, sont tangentes au plan sécant. Ce plan a de commun avec la section $S_z$ $(n+r) : q_1$ points coïncidant avec le point $M_1$ (§ 12). Chacun de ces points compte pour $q_1(q_1 - 1) : 2$ points d'une courbe double. Des $M_1$ points d'intersection avec des courbes nodales il y a donc $(n+r)(q_1 - 1) : 2$ qui appartiennent à la courbe $S_z$.

En diminuant

$$M_1 = \{(n+r)(n+2r+m-q_2-3) + m(q_4 - 1)\} : 2$$

des nombres

$$(n+r)(q_3-1):2,\ (n+r+m)(q_4-1):2,\ (n+r)(q_1-1):2$$

on trouve le nombre des intersections réunies au point $M_1$, du plan $z = y\,tg\,\varphi$ avec la courbe nodale $\xi'$. La différence est

$$(n+r)(n+2r+m-q_1-q_2-q_3-q_4):2 = (n+r)N.$$

Ce résultat étant exact pour tout plan passant par l'axe des $x$, sauf pour les plans $z=0$ et $y=0$, on obtient le théorème:

*L'axe des $x$ a de commun au point $M_1$ avec la courbe nodale $\xi'$ le nombre de $(n+r)N$ points.*

De même on trouve que la génératrice $g_2$ tangente à la courbe $C(n, r, m)$ au point $M_2$ a de commun au point $M_2$ avec la courbe nodale $\xi'$ le nombre de $(r+m)N$ points.

§ 19. *Du plan osculateur à la courbe nodale $\xi'$ au point $M_1$.*

Nous venons de voir au § 18 que chaque plan $z = y\,tg\,\varphi$ du faisceau, dont la génératrice $g_1$, tangente à la courbe nodale $\xi'$ au point $M_1$, est l'axe, rencontre la courbe $\xi'$ au point $M_1$ le nombre de fois $(n+r)N$. La démonstration tombe en défaut pour les plans $z=0$ et $y=0$ (§ 18). Au § 17 nous avons vu que le plan $y=0$ rencontre au point $M_1$ la courbe $\xi'$ seulement $(n+r)N$ fois. Ce plan $y=0$ n'est donc pas un plan osculateur de quelques unes des $nN$ branches de la courbe $\xi'$. Le plan $z=0$ est donc le plan osculateur au point $M_1$ de toutes les $nN$ branches de la courbe $\xi'$ passant par le point $M_1$.

Déterminons le nombre des intersections du plan $z=0$ avec la courbe $\xi'$, coïncidant avec le point $M_1$. Par un raisonnement analogue à celui du § 17 nous trouverons que le plan $z=0$ rencontre la courbe $\xi'$ seulement au point $M_1$. En effet, l'intersection totale du plan $z=0$ avec la développable $D$ consiste en l'axe des $x$ compté $r+m$ fois et en la courbe $S_z$, dont l'équation est

$$\left|\frac{(n+r+m)\,x}{r+m}\right|^{\frac{n+r}{q_1}} = \left|\frac{(n+r+m)\,y}{m}\right|^{\frac{n}{q_1}},$$

et qui est une courbe nodale dont le degré de multiplicité est $q_1$.

L'axe des $x$ rencontre la courbe $\xi'$ seulement au point $M_1$ (§ 17).

La section $S_z$ ne peut rencontrer la courbe $\xi'$ qu'aux 2 points singuliers $M_1$ et $M_4$ de cette courbe (§ 17) et en ses points de rencontre avec l'axe des $x$, puisque les seuls plans doubles $G$ sont les plans $z=0$ et $u=0$. Par le point singulier $M_4$ de la courbe $S_z$ il ne passe d'autres lignes nodales que la génératrice singulière $g_2$ et les branches de la courbe nodale $S_z$ elle même (§ 16). La génératrice $g_1$ rencontre la courbe $S_z$ seulement au point $M_1$, par conséquent, la courbe $S_z$ ne rencontre le plan $z=0$ qu'au point $M_1$. La courbe $\xi'$ étant du degré $\xi'=(n+r+m)N$, la courbe $\xi'$ a de commun au point $M_1$ ce nombre $\xi'$ de points avec le plan $z=0$ (§ 13).

De même on trouve que les $mN$ branches de la courbe $\xi'$ passant par le point $M_2$, y ont de commun $\xi'$ points avec le plan $u=0$ osculateur à ces $mN$ branches et à les branches de la courbe $C(n,r,m)$.

En résumant les résultats obtenus aux §§ 15—19 ou obtient:

*Par le point singulier $M_1$ $(n,r,m)$ il passe $nN$ branches de la courbe nodale gauche $\xi'$. Ces branches y sont tangentes à la tangente $g_1$ de la courbe $C(n,r,m)$ et y ont de commun avec cette tangente $(n+r)N$ points. Le plan osculateur de la courbe $C(n,r,m)$ au point $M_1$, y est également le plan osculateur de toutes les branches de la courbe $\xi'$. Ces branches y ont de commun avec ce plan osculateur $(n+r+m)N$ points.*

Pour le second point singulier $M_2$ on trouve les mêmes résultats sauf le changement de $n$ en $m$ et vice-versa.

§ 20. *Des intersections des courbes $S_y$ et $S_x$ avec $\Delta^2 D$.*

Quand les courbes d'intersection $S_x$, $S_y$, $S_z$ et $S_\infty$ de la développable $D$ avec les faces du tétraèdre de référence (§ 12) sont des courbes triples ou sont d'une multiplicité supérieure à 3 ces courbes nodales se trouvent toutes entierès sur la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$ de la développable $D$ prise par rapport à un point quelconque $P$ (§ 11). Tout point d'une de ces courbes multiples est alors équivalent à un ou à plusieurs points triples $\tau$ [1]) de la développable $D$ et de la courbe nodale, et le nombre $\tau$ de ces points triples est alors infiniment grand. Les projections $P_x$, $P_y$

---

[1]) CREMONA—CURTZE, *Oberflächen*, § 97.

$P_z$ et $P_\infty$ de la courbe $C(n, r, m)$ sur les faces du tétraèdre de référence (§ 13) sont en même temps des courbes triples ou des courbes d'une multiplicité supérieure à 3, les nombres $q_3$, $q_4$, $q_1$ et $q_2$ étant les degrés de ces multiplicités. Les plans tangents aux cônes projetants sont alors des plans tritangents $\tau'$ [1]) de la courbe $C(n, r, m)$, et le nombre des plans tritangents $\tau'$ sera donc également infiniment grand.

Quand une des courbes $S_x$, $S_y$, $S_z$ on $S_\infty$ est un courbe double, c'est à dire, quand un des nombres $q_3$, $q_4$, $q_1$ et $q_2$ est égal à 2, cette courbe double ne se trouve plus sur la surface $\Delta^2 D$, mais elle rencontrera cette surface en quelques points. Une courbe double rencontre la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$, prise par rapport au points $P$, en ses points $Q$ où la droite $PQ$ rencontre la développable $D$ en 3 points coïncidants, cequi arrivera quand le point $Q$ est un point triple de la développable $D$ ou bien quand la droite $PQ$ est tangente à une, au moins, des 2 nappes de la développable $D$ passant par le point $Q$.

Examinons donc de plus près les intersections des 4 courbes $S$ avec la surface $\Delta^2 D$.

Supposons $q_4 = 2$, l'intersection totale du plan $y = 0$ avec la développable $D$ consiste en la courbe

$$S_y = \left\{\frac{(n+r)x}{r}\right\}^{\frac{n+r+m}{2}} - \left\{\frac{-(n+r)z}{m}\right\}^{\frac{n}{2}} = 0,$$

qui est une courbe double et en l'axe des $x$ compté $r$ fois. Soit $\Delta^2 D$ la deuxième surface polaire de la développable $D$ prise par rapport au point $P$. Provisoirement le point $P$ est pris dans le plan $y = 0$, et je déterminerai d'abord pour cette position particulière le nombre des intersections de la courbe $S_y$ avec la surface $\Delta^2 D$ lesquelles se trouvent aux points singuliers $M_1$ et $M_2$.

Les points communs de la courbe plane $S_y$ et de la surface $\Delta^2 D$ seront des points communs de la courbe $S_y$ et de la section de la surface $\Delta^2 D$ par le plan $y = 0$ de la courbe $S_y$, et réciproquement. La section de la surface $\Delta^2 D$ par le plan $y = 0$ est la deuxième polaire de la section totale de la développable $D$ par le plan $y = 0$, prise par rapport au point $P$, puisque le point $P$ se trouve dans le plan sécant $y = 0$.

---

[1]) CREMONA—CURTZE, *Oberflächen*, § 109.

La section totale $S$ de la développable $D$ par le plan $y=0$ est représentée par l'équation

$$S = z^r S_y^2 = 0.$$

La deuxième polaire $\Delta^2 S$ contient quelques termes dont $S_y$ est un facteur et le terme

$$2 z^r (\Delta S_y)^2.$$

Pour déterminer les intersections de la courbe $S_y = 0$ avec $\Delta^2 S$ on peut donc remplacer la section $\Delta^2 S$ par le terme $2 z^r (\Delta S_y)^2$.

L'équation de la première polaire $\Delta S_y$ est de la forme

$$A z^{\frac{n}{2}} + B x^{\frac{n+r+m}{2}-1} + C z^{\frac{n}{2}} = 0,$$

$A$, $B$ et $C$ étant des constantes.

Les coordonnées d'un point de la courbe $S_y$ sont exprimées par (§ 12)

$$x = \frac{r}{n+r} t^{\frac{n}{2}}, \quad z = -\frac{m}{n+r} t^{\frac{n+r+m}{2}}.$$

En substituant ces expressions dans l'équation de la section $\Delta^2 S$, on obtient une équation en $t$, donnant les paramètres des points d'intersection des courbes $S_y$ et $\Delta^2 S$. Par cette substitution $\Delta S_y$ devient une forme en $t$ dont le terme du degré le moins élevé est du degré

$$\left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(\frac{n+r+m}{2}\right).$$

Le terme du degré le moins elevé en $t$ dans l'équation pour $\Delta^2 S$ ou bien dans le terme $2 z^r (\Delta S_y)^2$ sera donc du degré

$$r \times \frac{n+r+m}{2} + 2\left(\frac{n}{2} - 1\right)\left(\frac{n+r+m}{2}\right) = (n+r-2)(n+r+m) : 2.$$

Par conséquent, de l'équation en $t$, donnant les paramètres des points d'intersection des courbes $S_y$ et $\Delta^2 S$, $(n+r-2)(n+r+m):2$ racines sont nulles. Le point $M_1$, correspondant au paramétre $t=0$ compte donc pour

$$(n+r-2)(n+r+m) : 2$$

intersections de la surface $\Delta^2 D$ avec la courbe $S_y$.

En remplaçant dans les expressions pour $x$ et $z$ le paramètre $t$ par $1:t$, on trouve facilement que le second point singulier $M_2$ de la courbe $S_y$ compte pour

$$(m+r-2)(n+r+m):2$$

intersections de la courbe $S_y$ avec la surface $\Delta^2 D$.

La courbe $S_y$ rencontre la surface $\Delta^2 D$ en dehors des points singuliers $M_1$ et $M_2$ en les points $C$ où la courbe $S_y$ rencontre les génératrices de la développable $D$ suivant lesquelles, des plans passant par le point $P$, sont tangentes à la développable $D$. Les points $C$ sont les points de contact des tangentes à la courbe $S_y$ menées du point $P$. La courbe autopolaire $S_y$ étant de la classe $(n+r+m):2$, le nombre des points $C$ est $(n+r+m):2$. Ou bien, autrement, les courbes $S_y$ et $\Delta S_y = 0$ se rencontrent

$$\frac{n+r+m}{2} \times \left(\frac{n+r+m}{2} - 1\right)$$

fois; de ces intersections $\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n+r+m}{2}\right)$ et $\left(\frac{r+m}{2}-1\right)\left(\frac{n+r+m}{2}\right)$ se trouvent respectivement aux points singuliers $M_1$ et $M_2$. Il reste encore $\frac{n+r+m}{2}$ intersections des courbes $S_y$ et $\Delta S_y = 0$; la courbe $S_y$ ne possédant d'autres points singuliers que les points $M_1$ et $M_2$ ces $(n+r+m):2$ points restants sont des points de contact $C$. La forme $\Delta S_y$ entrant 2 fois comme facteur dans l'expression $2z^r(\Delta S_y)^2$ chacun de ces points $C$ compte 2 fois pour une intersection de la courbe $S_y$ avec la section $\Delta^2 S$ ou bien avec la surface $\Delta^2 D$. Ou bien, autrement, des intersections d'un droite $PC$ avec la développable $D$ ou bien avec la section $S$, il y a 4 qui coïncident avec le point $C$. La droite $PC$ a donc au point $C$ 2 points coïncidants de commun avec la surface $\Delta^2 D$, et la droite $PC$ est donc au point $C$ tangente à la surface $\Delta^2 D$ ou bien le point $C$ est un point double de la surface $\Delta^2 D$. La droite $PC$ étant au point $C$ tangente à la courbe $S_y$, cette courbe $S_y$ a au point $C$ 2 points de commun avec la surface $\Delta^2 D$.

Chaque point triple de la développable $D$, qui se trouve sur la courbe $S_y$ est un point triple au moins de la section $S$. La courbe $S_y$ ne possédant d'autres points multiples que les 2 points

$M_1$ et $M_2$ et la génératrice $g_1$ ne rencontrant la courbe $S_y$ qu'au point $M_1$, les seuls points de la courbe $S_y$ qui sont des points triples de la développable $D$ sont les 2 points $M_1$ et $M_2$. La courbe $S_y$ ne rencontre donc la surface $\Delta^2 D$ qu'aux points $M_1$, $M_2$ et $C$. La développable $D$ étant du degré $\varrho = n + 2r + m$ (§ 4), la surface $\Delta^2 D$ est du degré $(n + 2r + m - 2)$. La courbe $S_y$ étant du degré $(n + r + m) : 2$, le nombre total des intersections de la courbe $S_y$ avec la surface $\Delta^2 D$ est $(n + 2r + m - 2)(n + r + m) : 2$, cequi doit donc être égal au nombre des intersections réunies aux points $M_1$, $M_2$ et $C$. Le point $M_1$ comptant pour $(n + r - 2)(n + r + m) : 2$, le point $M_2$ comptant pour $(r + m - 2)(n + r + m) : 2$ et les $(n + r + m) : 2$ points $C$ comptant pour $n + r + m$ intersections, les points $M_1$, $M_2$ et $C$ comptent, en effet, pour $(n + 2r + m - 2)$ $(n + r + m) : 2$ intersections de la courbe $S_y$ avec la surface $\Delta^2 D$.

Déplaçons maintenant le point $P$ en dehors du plan $y = 0$. Le nombre total des intersections restera le même. Le nombre des plans tangents à la développable $D$ et passant par le point $P$ sera $\mu = n + r + m$ (§ 4). Une génératrice de contact d'un tel plan $\mu$ rencontrant une fois la courbe plane $S_y$, le nombre des points $C$ sera $n + r + m$; $P$ étant maintenant quelconque, donc ne se trouvant pas dans les plans osculateurs de la courbe $C(n, r, m)$ aux points singuliers $M_1$ on $M_2$, aucun de ces points $C$ ne coïncide avec un des points $M_1$ on $M_2$. D'après CREMONA chacun de ces points $C$ compte pour une intersection de la courbe nodale avec la surface $\Delta^2 D$ [1]).

Le nombre des intersections non-coïncidantes avec un des points $M_1$ et $M_2$ est donc comme pour le cas que $P$ se trouve dans le plan $y = 0$, encore $n + r + m$. La somme des nombres d'intersection $M_1$ et $M_2$ réunies aux points $M_1$ et $M_2$ n'est donc pas changée par le déplacement du point $P$. Je dis que les nombres $M_1$ et $M_2$ ne sont pas changés non plus. En effet, il est impossible que le nombre $M_1$ soit plus grand pour $P$ quelconque que pour le cas que le point $P$ se trouve dans le plan $y = 0$, puisqu'on peut toujours ramener la détermination du nombre $M_1$ à la détermination du nombre des racines nulles d'une équation en $t$, obtenue en substituant dans l'équation de la surface les développements en $t$ donnant les coordonnées d'un point de la courbe. On obtient donc le nombre des intersections cherché en détermi-

---

[1]) CREMONA – CURTZE. *Oberflächen*, § 99.

nant le degré du terme en $t$ du degré le moins élevé. Pour des cas spéciaux le coefficient de ce terme pourra s'annuler et le degré du terme en $t$ du degré le moins élevé sera alors augmenté. Il est donc possible que le nombre $M_1$ est pour un cas spécial plus grand que pour le cas général mais il est impossible que le nombre $M_1$ est pour le cas général plus grand que pour un cas spécial.

Il est également impossible que le nombre $M_1$ soit plus petit pour le cas que $P$ est un point quelconque que pour le cas que le point $P$ se trouve dans le plan $y=0$, puisque la somme $M_1+M_2$ étant constante, le nombre $M_2$ serait alors plus grand pour $P$ quelconque que pour une position spéciale du point $P$, cequi est impossible. Par conséquent, le nombre $M_1$, ne varie pas en changeant la position particulière du point $P$ en une position quelconque.

On a donc le théorème:

*Quand $\Delta^2 D$ est la deuxième surface polaire de la développable $D$, prise par rapport au point quelconque $P$, la courbe nodale (double) $S_y$ rencontre la surface $\Delta^2 D$*

$$(n+r-2)\ (n+r+m):2$$

*fois au point $M_1$ et*

$$(r+m-2)\ (n+r+m):2$$

*fois au point $M_2$.*

On trouve facilement précisément le même résultat pour la courbe nodale $S_x$ quand cette courbe est aussi une courbe double, c'est-à-dire quand $q_3=2$.

Remarquons que des 4 nombres $q$ il n'y a jamais 2 qui soient égaux, des 4 courbes $S$ il n'a y donc jamais 2 qui soient à la fois des courbes doubles (§ 14).

§ 21. *Des intersections des courbes $S_z$ et $S_\infty$ avec $\Delta^2 D$.*

Supposons $q_1=2$, on aura nécessairement $r\geq 2$, puisqui $q_1$ est un diviseur de $r$. L'équation de la courbe nodale $S_z$ est (§ 12)

$$S_z=\left\{\frac{(n+r+m)\,x}{r+m}\right\}^{\frac{n+r}{2}}-\left\{\frac{(n+r+m)\,y}{m}\right\}^{\frac{n}{2}}=0.$$

L'équation de la section totale $S$ de la développable $D$ par le plan $z=0$ sera

$$S = y^{r+m} S_z^2 = 0 .$$

Soit $\Delta^2 D$ la deuxième surface polaire de la développable $D$ prise par rapport au point $P$, que je suppose provisoirement situé dans le plan $z = 0$. La section de la surface $\Delta^2 D$ par le plan $z = 0$ sera alors $\Delta^2 S$, c'est-à-dire, sera la deuxième polaire de la section totale $S$, prise par rapport au point $P$. La forme $\Delta^2 S$ consiste en 2 parties dont l'une contient $S_z$ en facteur, tandis que l'autre partie prend la forme

$$2 y^{r+m} (\Delta S_z)^2 .$$

Pour déterminer les intersections des courbes $\Delta^2 S$ et $S_z$ on peut donc remplacer $\Delta^2 S$ par la courbe décomposée

$$y^{r+m} (\Delta S_z)^2 = 0 .$$

En substituant dans cette dernière équation les expressions

$$x = \frac{(r+m)\, t^{n:2}}{n+r+m} , \quad y = \frac{m\, t^{(n+r):2}}{n+r+m}$$

donnant les coordonnées d'un point de la courbe $S_z$ (§ 12), on obtient une équation en $t$ donnant les paramètres des points d'intersection des courbes $S_z$ et $\Delta^2 S$.

L'équation de la première polaire $\Delta S$ étant de la forme

$$A x^{\frac{n+r}{2}-1} + B y^{\frac{n}{2}-1} + C y^{\frac{n}{2}} = 0,$$

le terme du degré le moins élevé de l'équation en $t$ sera du degré

$$(r+m)(n+r):2 + 2\left(\frac{n}{2} - 1\right)(n+r):2 = (n+r)(n+r+m-2):2.$$

Au point $M_1$, correspondant au paramètre $t = 0$, coïncident donc $(n+r)(n+r+m-2)$ intersections de la courbe nodale $S_z$ avec la courbe $\Delta^2 S$ ou bien avec la surface $\Delta^2 D$.

En remplaçant $x$, $y$ et $t$ par $\frac{x}{u}$, $y$ et $\frac{1}{t}$ et en posant ensuite $y = 1$ on trouve facilement qu'au point $M_4$ $(0, 1, 0, 0)$ se trouvent

$$M_4 = (r-2)(n+r):2$$

intersections de la courbe nodale $S_z$ avec la surface $\Delta^2 D$. Ce nombre $M_4$ n'est jamais négatif puisque $r$ ne peut devenir plus

petit que 2. Ce nombre $M_4$ s'annule quand $r = 2$. Le point $M_4$ est alors un point d'une génératrice double $g_2$, où passe une branche de la courbe double $S_z$ suivant laquelle se pénètrent les 2 nappes de la développable $D$ passant par la génératrice double $g_2$ Le point $M_4$ étant pour $r = 2$, un point double de la développable $D$ ne se trouve pas sur la surface $\Delta^2 D$.

La courbe $S_z$ rencontre encore la surface $\Delta^2 D$ aux $(n + r) : 2$ points de contact $C$ de tangentes à la courbe $S_z$, les quelles passant par le point $P$. Chacun de ces points $C$ compte pour 2 intersections, $\Delta S_z$ entrant au carré dans l'expression $y^{r+m} (\Delta S_z)^2$.

Le nombre total des intersections de la courbe $S_z$ du degré $(n + r) : 2$ avec la surface $\Delta^2 D$ du degré $n + 2r + m - 2$ est donc

$$(n + r)(n + r + m - 2) + (r - 2)(n + r) : 2 + (n + r) = \\ = (n + r)(n + 2r + m - r) : 2,$$

cequi est le nombre qu'il fallait trouver. Plaçons maintenant le point $P$, par rapport anquel est prise la deuxième polaire $\Delta^2 D$, en dehors du plan $z = 0$. Quand le point $P$ se trouve en dehors du plan osculateur singulier $z = 0$, il passe par ce point $\mu = n + r + m$ (§ 4) plans osculateurs de la courbe $C(n, r, m)$, desquels les points d'osculation sont différents du point $M_1$. Les génératrices de la développable $D$ lelong desquelles ces $n + r + m$ plans sont tangentes à la développable $D$ rencontrent la courbe $S_z$ en $n + r + m$ points $C$ distincts des points singuliers $M_1$ et $M_4$. Le nombre des intersections de la courbe $S_z$ avec la surface $\Delta^2 D$, correspondant aux points $C$, nombre qui était $n + r$ est donc maintenant $n + r + m$. Le nombre total des intersections de la courbe $S_z$ avec la surface $\Delta^2 D$ restant le même en changeant la position du point $P$, il faut que la somme $M_1 + M_4$ soit diminuée de $m$. Je dis que le terme $M_4$ reste le même et que c'est le terme $M_1$ qui est diminué de $m$ par le déplacement du point $P$ en dehors du plan $z = 0$.

Pour le démontrer, coupons une courbe gauche par un plan $V$ infiniment voisin d'un point singulier $(m, r, n)$, le plan $V$ faisant un angle fini avec le plan osculateur et avec la tangente au point singulier $(n, r, m)$. Sous ces conditions le plan $V$ rencontre la courbe gauche en $m$ points infiniment voisins du point singulier $(n, r, m)$. En considérant la figure corrélative on trouve que par un point $P$ infiniment voisin du plan osculateur et à distance finie du point singulier $(n, r, m)$ et à distance finie de la tangente

en ce point singulier, il passe $m$ plans osculateurs de la courbe faisant des angles infiniment petits avec le plan osculateur singulier. Supposons donc que le point $P$ soit quelconque mais infiniment voisin du plan osculateur singulier $z=0$, il passe par le point $P$ $m$ plans osculateurs tangents à la développable $D$ lelong de génératrices infiniment voisines de la tangente $g_1$. Ces $m$ génératrices rencontrent la courbe $S_z$ en $m$ points $C$ infiniment voisins du point singulier $M_1$. Quand le point $P$ s'approche du plan $z=0$ ces $m$ points $C$ s'approcheront du point singulier $M_1$ et quand le point $P$ sera arrivé dans le plan $z=0$, ces $m$ points $C$ coïncident avec le point $M_1$. Par conséquent, quand le point $P$ se trouve dans le plan $z=0$, le nombre des intersections de la courbe $S_z$ avec la surface $\Delta^2 D$ surpasse de $m$ le nombre de ces intersections pour le cas que le point $P$ ne se trouve pas dans le plan $z=0$.

Ce nombre d'intersections étant

$$M_1 = (n+r)(n+r+m-2):2$$

pour le cas que le point $P$ est un point quelconque du plan $z=0$ est donc

$$M_1 - m = (n+r-2)(n+r+m):2$$

pour le cas que le point $P$ est un point quelconque de l'espace.

On a donc le théorème:

*La deuxième surface polaire $\Delta^2 D$ de la développable $D$, prise par rapport au point quelconque $P$, rencontre la courbe nodale double $S_z$, située dans le plan osculateur, au point singulier $M_1$ $(n, r, m)$ un nombre de fois*

$$(n+r-2)(n+r+m):2,$$

*et au point $M_4$ le nombre de fois*

$$(r-2)(n+r):2.$$

De même on démontre le théorème:

*La deuxième surface polaire $\Delta^2 D$ de la développable $D$, prise par rapport au point quelconque $P$, rencontre la courbe nodale double $S_\infty$ au point $M_2$ $(m, r, n)$ le nombre de fois*

$$(r+m-2)(n+r+m):2,$$

*et au point $M_3$ le nombre de fois*

$$(r-2)(r+m):2.$$

---

## CHAPITRE III.

### De la décomposition de la courbe nodale gauche $\xi'$.

§ 22. *Des génératrices se rencontrant en un point de la courbe nodale.*

La question suivante se pose: ces $nN$ branches de la courbe nodale gauche $\xi'$ passant par le point $M_1$ (§ 15), font elles partie d'une seule courbe non-décomposée ou est ce que ces $nN$ branches appartiennent à quelques courbes séparées.

Je démontrerai que les $nN$ branches de la courbe $\xi'$ appartiennent à $N$ courbes séparées, qui sont chacune de même espèce (§ 2) que la courbe $C(n, r, m)$.

Les coordonnées d'un point de la développable $D$ sont données par les équations

$$\begin{aligned} x &= t^n + l\,n\,t^{n-1}, \\ y &= t^{n+r} + l\,(n+r)\,t^{n+r-1}, \\ z &= t^{n+r+m} + l\,(n+r+m)\,t^{n+r+m-1}. \end{aligned}$$

Les coordonnées d'un point de la courbe nodale correspondent à 2 systèmes distincts de valeurs des paramètres $t$ et $l$. Pour un point de la courbe nodale correspondant aux 2 systèmes $t, l$ et $t_1, l_1$ on aura donc les relations,

$$\begin{aligned} t^n + l\,n\,t^{n-1} &= t_1^{\,n} + l_1\,n\,t_1^{\,n-1}, \\ t^{n+r} + l\,(n+r)\,t^{n+r-1} &= t_1^{\,n+r} + l_1\,(n+r)\,t_1^{\,n+r-1}, \quad \ldots\ldots\ldots (A) \\ t^{n+r+m} + l\,(n+r+m)\,t^{n+r+m-1} &= t_1^{\,n+r+m}\,l_1\,(n+r+m)\,t_1^{\,n+r+m-1}. \end{aligned}$$

Ces 3 équations suffisent pour exprimer les paramètres $l$, $l_1$ et $t_1$ en fonction du paramètre $t$.

En éliminant $l$ en $l_1$ on obtient, entre les paramètres $t$ et $t_1$ de 2 point $P(t)$ et $P_1(t_1)$ de la courbe $C(n, r, m)$, dont les tangentes se rencontrent en un point de la courbe nodale, l'équation suivante

$$\begin{vmatrix} t^n - t_1^{\,n} & n\,t^{n-1} & n\,t_1^{\,n-1} \\ t^{n+r} - t_1^{\,n+r} & (n+r)t^{n+r-1} & (n+r)t_1^{\,n+r-1} \\ t^{n+r+m} - t_1^{\,n+r+m} & (n+r+m)t^{n+r+m-1} & (n+r+m)t_1^{\,n+r+m-1} \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} 1-\left(\frac{t_1}{t}\right)^n & n & n\left(\frac{t_1}{t}\right)^n \\ 1-\left(\frac{t_1}{t}\right)^{n+r} & n+r & (n+r\left(\frac{t_1}{t}\right)^{n+r} \\ 1-\left(\frac{t_1}{t}\right)^{n+r+m} & n+r+m & (n+r+m)\left(\frac{t_1}{t}\right)^{n+r+m} \end{vmatrix} = 0.$$

En posant $v = \frac{t_1}{t}$, on obtient pour déterminer le rapport $v$, l'équation numérique suivante,

$$\begin{vmatrix} 1-v^n & n & n\,v^n \\ 1-v^{n+r} & n+r & (n+r)\,v^{n+r} \\ 1-v^{n+m} & n+r+m & (n+r+m)\,v^{n+r+m} \end{vmatrix} = 0,$$

qu'on réduit facilement à l'équation

$$\begin{vmatrix} 0 & n & 0 \\ r\,(v^{n+r}-1) & n+r & (n+r)\,(v^r-1) \\ (r+m)\,(v^{n+r+m}-1) & n+r+m & (n+r+m)(v^{r+m}-1) \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien,

$$(n+r)\,(r+m)\,(v^{n+r+m}-1)\,(v^r-1) - r\,(n+r+m)\,(v^{n+r}-1)\,(v^{r+m}-1) = 0,$$

ou bien,

$$m\,n\,v^{n+2r+m} - (n+r)\,(r+m)\,v^{n+r+m} + r\,(n+r+m)\,v^{n+r} + \\ + r\,(n+r+m)\,v^{r+m} - (n+r)\,(r+m)\,v^r + m\,n = 0\,, \quad (B)$$

ou bien encore,

$$m\,n\,(v^r-1)\,(v^{n+r+m}-1) - r\,(n+r+m)\,v^r\,(v^m-1)\,(v^n-1) = 0.$$

L'équation $B$ étant du degré $n+2r+m$ on obtiendra pour $v$ $n+2r+m$ valeurs. Pour $v=1$ on aurait $t=t_1$ et les 2 points $P(t)$ et $P_1(t_1)$ de l'arête de rebroussement $C(n, r, m)$, donc également les tangentes en ces 2 points, coïncident. Pour une racine $v=1$ de l'équation $B$ on n'obtient donc pas un point de la courbe nodale; il faut donc écarter les racines $v=1$.

En différentiant par rapport à $v$ l'équation $B$ et divisant le résultat par $v^{r-1}$ on obtient:

$$m\,n\,(n+2r+m)\,v^{n+r+m}-(n+r+m)\,(n+r)\,(r+m)\,v^{n+m}+$$
$$+r\,(n+r)\,(n+r+m)\,v^{n}+r\,(r+m)\,(n+rm)\,v^{m}-$$
$$r\,(n+r)\,(r+m)=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad (C)$$

En différentiant l'équation $C$ et divisant le résultat par $(n+r+m)v^{m-1}$ on obtient, en supposant $n>m$ :

$$m\,n\,(n+2r+m)\,v^{n+r}-(n+m)\,(n+r)\,(r+m)\,v^{n}+$$
$$+n\,r\,(n+r)\,v^{n-m}+r\,m\,(r+m)=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad (D)$$

En différentiant l'équation $D$ et divisant après par $n\,(n+r)\,v^{n-m-1}$ on obtient:

$$m\,(n+2r+m)\,v^{r+m}-(n+m)\,(r+m)\,v^{m}+r\,(n-m)=0\,.\,.\quad (E)$$

En différentiant l'équation $E$ et divisant après par $m\,(r+m)\,v^{m-1}$ on obtient:

$$(n+2r+m)\,v^{r}-(n+m)=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\quad (F)$$

On vérifie facilement que $v=1$ est une racine des équations $B$, $C$, $D$ et $E$ et que $v=1$ ne l'est pas de l'équation $F$. Par conséquent $v=1$ est une racine quadruple de l'équation $B$.

Dans la démonstration précédante $n$ est supposé plus grand que $m$. Pour le cas que $n=m$ la démonstration se simplifie un peu, mais on obtient le même résultat. Quand $m>n$, on obtient évidemment encore le même résultat, l'équation $B$ étant symétrique par rapport à $n$ et $m$.

L'équation $B$ a donc $n+2r+m-4=\varrho-4$ (§ 4) racines différentes de l'unité. Chacune de ces $\varrho-4$ valeurs du rapport $v$ donne une valeur du paramètre $t$, correspondant à un point $P_1\,(t_1)$ de la courbe $C\,(n,r,m)$, la tangente à cette courbe au point $P_1\,(t_1)$ rencontrant la tangente au point $P\,(t)$. Ou bien la tangente à la courbe $C\,(n,r,m)$ au point $P\,(t)$ rencontre $\varrho-4$ nappes de la développable $D$; résultat connu.

§ 23. *Des racines $v_1$ correspondant aux sections planes $S_x$, $S_y$, $S_z$ et $S_\infty$.*

Considérons la forme suivante de l'équation $B$ (§ 22)

$$m\,n\,(v^{r}-1)\,(v^{n+r+m}-1)-r\,(n+r+m)\,v^{r}\,(v^{m}-1)\,(v^{n}-1)=0.$$

Le plus grand commun diviseur des nombres $n$ et $r$ étant $q_1$, $(v^r - 1)$ et $(v^n - 1)$ sont divisibles par $(v^{q_1} - 1)$. Les $q_1$ racines de l'équation $v^{q_1} = 1$ sont donc des racines de l'équation $B$.

Le plus grand commun diviseur des nombres $n$ et $n + r + m$ étant $q_4$, les binomes $(v^n - 1)$ et $(v^{n+r+m} - 1)$ sont divisibles par $(v^{q_4} - 1)$. Les $q_4$ racines de l'équation $v^{q_4} = 1$ sont donc des racines de l'équation $B$. De même pour les $q_3$ et $q_2$ racines des équations $v^{q_3} = 1$ et $v^{q_2} = 1$.

Parmi les $\varrho - 4$ racines de l'équation $B$ différentes de l'unité se trouvent donc les $(q_1 - 1)$, $(q_2 - 1)$, $(q_3 - 1)$ et $(q_4 - 1)$ racines différentes de l'unité des 4 équations

$$v^{q_1} = 1,\ v^{q_2} = 1,\ v^{q_3} = 1,\ v^{q_4} = 1.$$

Les nombres $q_1$, $q_2$, $q_3$ et $q_4$ ne possédant des diviseurs communs à 2 de ces 4 nombres (§ 14) les $(q_1 - 1)$, $(q_2 - 1)$, $(q_3 - 1)$ et $(q_4 - 1)$ racines sont toutes inégales.

Soit $v_1$ une racine de l'équation $B$. En remplaçant dans les équations $A$ (§ 22) $t_1$ par sa valeur $v_1 t$ les 3 équations $A$ deviennent dépendantes et 2 d'entre elles suffisent pour déterminer les valeurs des paramètres $l$ et $l_1$ correspondant à la racine $v_1$. Par cette substitution les équations $A$ (§ 22) deviennent après une petite reduction,

$$\begin{aligned} &n\,l - n\,l_1\,v_1^{\,n-1} = t\,(v_1^{\,n} - 1)\,, \\ &(n + r)\,l - (n + r)\,l_1\,v_1^{\,n+r-1} = t\,(v_1^{\,n+r} - 1)\,, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A') \\ &(n + r + m)\,l - (n + r + m)\,l_1\,v_1^{\,n+r+m-1} = t\,(v_1^{\,n+r+m} - 1)\,. \end{aligned}$$

Des 2 premières on tire

$$l = \frac{-t}{n\,(n + r)}\left\{n - r\,v_1^{\,r}\,\frac{v_1^{\,n} - 1}{v_1^{\,r} - 1}\right\}.$$

Soit $v_1$ une des $(q_4 - 1)$ racines, différentes de l'unité, de l'équation $v^{q_4} = 1$; $q_4$ étant par définition le plus grand commun diviseur des nombres $n$ et $r + m$, n'a pas un facteur de commun avec le nombre $r$, puisque, $n$, $r$ et $m$ ne possèdent pas de facteur commun (§ 2) Par conséquent, $v_1$ n'annulera pas le dénominateur $v_1^{\,r} - 1$ et annulera le numérateur $v_1^{\,n} - 1$ de la partie fraction-

naire $r v_1^r \frac{v_1^n - 1}{v_1^r - 1}$ de l'expression pour $l$. La valeur de $l$ se réduit donc à:

$$l = -t : (n + r).$$

Nous avons vu au § 12 que cette valeur de $l$ correspond à la section plane $S_y$ qui est une courbe nodale d'un degré de multiplicité $q_1$. Les $q_1 - 1$ racines, différentes de l'unité, de l'équation $B$, qui satisfont à la fois à la relation $v^{q_1} = 1$ correspondent donc aux $q_1 - 1$ nappes de la développable $D$ qu'une génératrice quelconque rencontre sur la section plane $S_y$.

Soit maintenant $v_1$ une des racines, différentes de l'unité de l'équation $v^{q_2} = 1$; $q_2$ étant le plus grand commun diviseur des nombres $r$ et $m$, ne peut avoir un facteur de commun avec le nombre $n$. Pour une telle valeur de la racine $v_1$ la fraction $(v_1^n - 1) : (v_1^r - 1)$ devient infini, il en sera de même de la valeur de $l$ correspondante. Quand $l$ est infini les points de la courbe nodale correspondante se trouvent à l'infini et on obtient donc la section plane $S_\infty$ (§ 12) qui est une courbe nodale dont le degré de multiplicité et $q_2$. Les $q_2 - 1$ racines, différentes de l'unité, de l'équation $B$, qui satisfont à la relation $v^{q_2} = 1$, correspondent donc aux $q_2 - 1$ nappes de la développable $D$ qu'une génératrice quelconque rencontre sur la courbe à l'infini $S_\infty$.

De la première et de la troisième équation $A'$ on tire

$$l = -\frac{t}{n(n + r + m)} \left\{ n - (r + m) v_1^{r+m} \frac{v_1^n - 1}{v_1^{r+m} - 1} \right\}.$$

Pour chacune des $q_1 - 1$ racines $v_1$, différentes de l'unité, qui satisfont à la relation $v^{q_1} = 1$, cette équation pour $l$ se réduit à

$$l = -t : (n + r + m).$$

C'est précisément la valeur de $l$ correspondante à la section plane $S_z$ (§ 12). Les $q_1 - 1$ racines $v_1$, différentes de l'unité, qui satisfont à la relation $v^{q_1} = 1$ correspondent donc au $q_1 - 1$ nappes de la développable $D$, que rencontre une génératrice quelconque sur la section plane $S_z$.

De même on démontre, à l'aide de la valeur de $l$ tirée des 2 dernières équations $A'$, le résultat suivant:

Les $q_3 - 1$ racines $v_1$, différentes de l'unité, qui satisfont à la relation $v^{q_3} = 1$, correspondent aux $q_3 - 1$ nappes de la développable $D$, que rencontre une génératrice quelconque sur la section plane $S_x$.

En diminuant le nombre $n + 2r + m - 4$ des racines $v_1$, différentes de l'unité, de l'équation $B$ (§ 22), des nombres $(q_1 - 1)$, $(q_2 - 1)$, $(q_3 - 1)$ et $(q_4 - 1)$ de ces racines correspondantes aux sections planes multiples $S_z$, $S_\infty$, $S_x$ et $S_y$, il reste encore

$$n + 2r + m - q_1 - q_2 - q_3 - q_4 = 2N \text{ (§ 13)},$$

racines correspondantes aux branches de la courbe nodale gauche $\xi'$.

§ 24. *Des racines $v_1$ correspondant aux branches de la courbe $\xi'$.*

Soit $P(t)$ le point de l'arête de rebroussement $C(n, r, m)$, correspondant au paramètre $t$. Soit $v_1$ une des 2 $N$ racines de l'équation $B$ (§ 23) correspondant à une branche de la courbe nodale gauche $\xi'$. La tangente au point $P(t)$ rencontrera, en un point $Q$ de la courbe nodale $\xi'$, la tangente à la courbe $C(n, r, m)$ au point $P_1(t_1)$ où $t_1 = v_1 t$. Si le point $P(t)$ se déplace sur la courbe $C(n, r, m)$ pour arriver au point $P_1(t_1)$, la tangente passera de nouveau par le point $Q$ de la courbe nodale $\xi'$. Parmi les tangentes à la courbe $C(n, r, m)$, rencontrant la tangente au point $P_1(t_1)$ se trouve donc la tangente au point $P(t)$. Il existe donc une valeur $v_2$ de la racine $v$ qui donne $t = v_2 t_1$. Des relations $t = v_2 t_1$ et $t_1 = v_1 t$, il résulte $v_1 v_2 = 1$. Les $2N$ racines de l'équation $B$ correspondant aux branches de la courbe nodale $\xi'$ se combinent donc deux à deux en paires, le produit de 2 racines formant une paire étant l'unité. Il faut donc que l'équation $B$ (§ 22) est une équation réciproque, cequi est en effet le cas

Les 2 racines $v_1$ et $v_2$ formant une paire, correspondent à une même branche de la courbe nodale $\xi'$. Par conséquent, la tangente à la courbe $C(n, r, m)$ au point $P(t)$ rencontre cette branche 2 fois en les points où elle rencontre les tangentes à la courbe $C(n, r, m)$ aux points correspondant aux paramètres $v_1 t$ et $v_2 t$.

Les équations $A$ (§ 22) étant du premier degré en $l$, il correspond

à chaque valeur de $v$ une seule valeur du paramètre $l$. Soit $l_1$ une valeur de $l$ correspondant à une des $2N$ racines de l'équation $B$ correspondant à une branche de la courbe $\xi'$. Le point $Q$ dont les coordonnées sont

$$x = t^n + l_1 n t^{n-1},$$
$$y = t^{n+r} + l_1 (n+r) t^{n+r-1},$$
$$z = t^{n+r+m} + l_1 (n+r+m) t^{n+r+m-1},$$

sera donc un point la courbe $\xi'$.

En faisant varier $t$ ce point $Q$ décrit une courbe nodale faisant partie de la courbe $\xi'$. En remplaçant $l_1$ par une autre valeur du paramètre $l$ correspondant à une autre valeur du rapport $v$, racine de l'équation $B$, on obtient pour une seule valeur de $l$ la même courbe et pour toutes les autres valeurs on obtient une autre courbe nodale faisant partie de la courbe $\xi'$. On obtient donc autant de courbes nodales séparées, faisant partie de la courbe $\xi'$, qu'il y a de paires de racines $v_1$ de l'équation $B$ correspondant à des points de la courbe $\xi'$ et satisfaisant à la relation $v_i v_j = 1$.

Le nombre de ces paires de racines étant $N$, *la courbe $\xi'$ se décompose en $N$ courbes séparées.*

En remplaçant dans les expressions donnant les coordonnées d'un point $Q$ de la courbe nodale $\xi'$ le paramètre $l_1$ par sa valeur

$$l_1 = \frac{-t}{n(n+r)} \left\{ n - r v_1^r \frac{v_1^n - 1}{v_1^r - 1} \right\}$$

tirée des 2 premières équations $A'$ (§ 23), et en tenant compte de l'équation $B$ (§ 22), ces expressions deviennent:

$$x = \frac{r t^n}{n+r} \left\{ \frac{v_1^{n+r} - 1}{v_1^r - 1} \right\},$$
$$y = \frac{r t^{n+r}}{n} \left\{ v_1^r \frac{v_1^n - 1}{v_1^r - 1} \right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$
$$z = \frac{m t^{n+r+m}}{n+r} \left\{ v_1^m \frac{v_1^{n+r} - 1}{v_1^m - 1} \right\}.$$

Les coordonnées d'un point $Q$ de la courbe nodale $\xi'$ prennent donc la forme $x = A t^n$, $y = B t^{n+r}$, $z = C t^{n+r+m}$, par conséquent, on a le théorème (§ 2).

*La courbe nodale $\xi'$ se décompose en $N$ courbes distinctes de même espèce que la courbe $C(n, r, m)$.*

Ce théorème tombe en défaut si pour une racine $v_1$ de l'équation $B$ les coefficients $A$, $B$ et $C$ sont infinis ou nulles. On vérifie facilement que ceci ne sera le cas que pour les racines $v_1$ qui satisfont à une des 4 équations

$$v^{q_1} = 1,\ v^{q_2} = 1,\ v^{q_3} = 1 \text{ et } v^{q_4} = 1,$$

et ces racines de l'équation $B$ ne correspondent pas à des branches de la courbe $\xi'$ mais correspondent aux sections planes $S_z$, $S_\infty$, $S_x$ et $S_y$.

La courbe $\xi'$, qui se décompose en $N$ courbes $\xi_i$ de même espèce que la courbe $C(n, r, m)$, est donc une courbe gauche (§ 17), la courbe $C(n, r, m)$ étant une courbe gauche (§ 6).

De chacune des $N$ courbes $\xi_i$ il passe $n$ branches par le point $M_1$. Ces $n$ branches y ont de commun $n + r$ points consécutifs avec leur tangente commune, l'axe des $x$, qui est également la tangente au point $M_1$ à la courbe $C(n, r, m)$. Ces $n$ branches ont chacune de commun, au point $M_1$, $n + r + m$ points consécutifs avec le plan osculateur commun $z = 0$, qui est aussi le plan osculateur de la courbe $C(n, r, m)$. On retrouve donc le théorème du § 19:

*Par le point $M_1$ il passe $n N$ branches de la courbe nodale $\xi'$. Ces $n N$ branches sont tangentes au point $M_1$ à la courbe $C(n, r, m)$ et ont de commun avec la tangente commune $(n + r) N$ points. Le plan osculateur de la courbe $C(n, r, m)$ est également le plan osculateur des $n N$ branches de la courbe $\xi'$ et ces $n N$ branches ont de commun avec ce plan osculateur $(n + r + m) N$ points.*

§ 25. *Des intersections de la courbe nodale $\xi'$ avec la surface $\Delta^2 D$.*

Soit $\xi_1$ une des $N$ courbes $\xi_i$ qui composent la courbe nodale $\xi'$. Déterminons le nombre des intersections de la courbe nodale $\xi_1$ avec la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$ de la développable $D$, prise par rapport au point quelconque $P$, lesquelles se réunissent au point singulier $M_1$.

Comme au § 11 on trouve que les termes de l'équation $\Delta^2 D = 0$, du poids le moins élevé sont les termes obtenus en différentiant 2 fois par rapport à $z$. Ces termes sont du poids $(n + r - 2) \times \times (n + r + m)$, ou bien en remplaçant dans l'équation de la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$, les variables $x$, $y$ et $z$ respectivement par les expressions en $t$ donnant les coordonnées d'un point de la courbe $\xi_1$

$$x = A t^n, \; y = B t^{n+r}, \; z = C t^{n+r+m}, \; (\S\ 24)$$

on obtient une équation en $t$ dont les termes du degré le moins élevé sont du degré $(n + r - 2)(n + r + m)$. Il est encore possible que s'annule, pour les valeurs spéciales $A$, $B$ et $C$ correspondant à un point de la courbe nodale $\xi_1$, le coefficient du terme en $t^{(n+r-2)(n+r+m)}$.

De l'équation en $t$ donnant les paramètres des points d'intersection de la courbe $\xi_1$ avec la surface $\Delta^2 D$, $(n + r - 2)(n + r + m)$ racines, au moins, sont nulles. Le point singulier $M_1$ correspondant au paramètre $t = 0$, compte donc pour $(n + r - 2)(n + r + m) + R_1$ intersections de la courbe nodale $\xi_1$ avec la surface $\Delta^2 D$; $R_1$ représente un entier positif ou nulle.

De même la courbe nodale $\xi_1$ rencontre au point $M_2$ la surface $\Delta^2 D$ le nombre de fois suivant

$$(n + r - 2)(n + r + m) + R_2 ,$$

où $R_2$ est un entier positif ou nulle.

La courbe $\xi_1$ étant du degré $n + r + m$ rencontre la surface $\Delta^2 D$, laquelle est du degré $n + 2r + m - 2$, le nombre de fois suivant

$$(n + r + m)(n + 2r + m - 2).$$

Ces intersections sont, d'après CREMONA [1]):

1° Les points singuliers $M_1$ et $M_2$.

2° Les points triples $\tau$ de la développable $D$, lesquels sont aussi des points triples de la nodale totale, et où passent une, deux ou trois branches de la courbe $\xi_1$. Soit $\tau$ le nombre des intersections aux points $\tau$.

3° Les points singuliers de l'arête de rebroussement $C(n, r, m)$,

[1]) CREMOMA–CURTZE, *Oberflächen*, Cap. IV.

$\lambda$, $\beta$, $H$, $\theta$ et $\omega'$, autres que les points $M_1$ et $M_2$. Nous avons vu aux §§ 6, 8, 10 et 11 que la courbe $C(n,r,m)$ ne possède pas d'autres singularités que les 2 points $M_1$ et $M_2$, on a donc ici $\lambda = \beta = H = \theta = \omega' = 0$.

4° Les points où la courbe $\xi_1$ rencontre une génératrice multiple $\omega'$ on $\theta$. Nous avons vu aux §§ 6 et 10 que la développable $D$ ne possède pas d'autres génératrices multiples que les 2 génératrices $g_1$ et $g_2$. Nous avons vu au § 17 que la courbe $\xi'$ rencontre ces génératrices seulement aux points $M_1$ et $M_2$. De même pour la courbe $\xi_1$ qui fait partie de la courbe $\xi'$.

5° Les points où la courbe $\xi_1$ rencontre les $\mu = n + r + m$ (§ 4) génératrices de la développable $D$, qui se trouvent dans des plans osculateurs de la courbe $C(n, r, m)$, passant par le point $P$. Chaque génératrice de la développable $D$ rencontre 2 fois la courbe nodale $\xi_1$ (§ 24). Le nombre de ces intersections $C$ de la courbe $\xi_1$ avec la surface $\Delta^2 D$ est donc $2 \times (n + r + m)$. Cremona donne le résultat, que chacune de ces intersections $C$ doit compter pour un seul point commun [1]) de la nodale et de la deuxième polaire $\Delta^2 D$.

On obtient donc la relation:

$$(n+r+m)(n+2r+m-2) = (n+r-2)(n+r+m) + R_1 + (m+r-2) \times \\ \times (n+r+m) + R_2 + \tau + 2(n+r+m);$$

d'où
$$R_1 + R_2 + \tau = 0.$$

$R_1$, $R_2$ et $\tau$ ne pouvant pas être des nombres négatifs on a le résultat,

$$R_1 = 0,\ R_2 = 0,\ \tau = 0,$$

on en tire facilement:

1° Le point singulier $M_1$ compte pour $(n + r - 2) \times (n + r + m)$ points communs de la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$ avec la courbe $\xi_1$, par conséquent, *le point $M_1$ compte pour*

$$N(n + r - 2)(n + r + m)$$

*intersections de la courbe nodale $\xi'$ avec la surface $\Delta^2 D$.*

2° Le point singulier $M_2$ compte pour $(m + r - 2)(n + r + m)$ points communs de la courbe nodale $\xi_1$ avec la surface $\Delta^2 D$, par conséquent, *le point singulier $M_2$ compte pour*

---

[1]) Cremona – Curtze, *Oberflächen.* § 99.

$$N(r+m-2)(n+r+m)$$

*intersections de la courbe nodale $\xi'$ avec la surface $\Delta^2 D$.*

3° En dehors des points singuliers $M_1$ et $M_2$, la courbe nodale $\xi_1$ ne passe pas par des points triples de la développable $D$. Par conséquent: 1° La courbe $\xi_1$ ne possède pas de points triples $\tau$. 2° La courbe $\xi_1$ ne rencontre pas une des sections planes $S_x$, $S_y$, $S_z$ et $S_\infty$. 3° Deux des $N$ courbes $\xi_i$ ne se rencontrent pas en un point $\tau$, en dehors des points $M_1$ et $M_2$.

La courbe $C(n, r, m)$ ne possédant des plans bitangents $G$ (§ 8) il n'existent pas non plus des noeuds $G$ de la nodale $\xi'$ où 2 courbes $\xi_i$ se rencontrent [1]). On a donc le théorème:

*Deux courbes $\xi_i$ ne se rencontrent pas en dehors des points singuliers $M_1$ et $M_2$.*

§ 26. *Des courbes nodales triples.*

Les conclusions précédantes tombent en défaut dès que quelques unes des courbes nodales $\xi_i$ coïncident en formant ainsi des courbes triples ou multiples. En effet, une courbe triple ou multiple est située sur la surface $\Delta^2 D$ et le nombre des intersections de la courbe multiple avec la surface $\Delta^2 D$ est infiniment grand. De même le nombre $\tau$ des points triples de la développable $D$ et des courbes nodales $\xi_i$ devient infiniment grand.

Supposons que 3 des courbes nodales $\xi_i$ coïncident pour former une courbe triple $\xi_3$ et que la courbe $\xi'$ ne possède pas une partie, qui est d'une multiplicité plus grande que 3. Soit $Q$ un point de la courbe $\xi_3$, situé sur la tangente $t$ de la courbe $C(n, r, m)$ au point $P(t)$. Cette tangente $t$ rencontre au point $Q$ de la courbe triple 2 autres génératrices $t_1$ et $t_2$ de la développable $D$, tangentes à la courbe $C(n, r, m)$ aux points $P_1(t_1)$ et $P_2(t_2)$ correspondant au paramètres $t_1$ et $t_2$. On aura $t_1 = v_1 t$, $t_2 = v_2 t$ où $v_1$ et $v_2$ sont 2 des 2 $N$ racines de l'équation $B$ (§ 22) correspondant à des points de la nodale gauche $\xi'$. La génératrice $t_1$ rencontre au point $Q$ les génératrices $t$ et $t_2$ tangentes à la courbe $C(n, r, m)$ aux points correspondant aux paramètres $t$ et $t_2$. On aura donc $t_2 = v_3 t_1$, $t = v_4 t_1$, $v_3$ et $v_4$ étant des racines de l'équation $B$. La génératrice $t_2$ rencontre au point $Q$ les génératrices $t$ et $t_1$. On

[1]) CREMONA—CURTZE, *Oberflächen*, § 112.

aura donc $t = v_5 t_2$, $t_1 = v_6 t_2$, $v_5$ et $v_6$ étant encore des racines de l'équation $B$ correspondant à des branches de la nodale gauche $\xi'$.

Des relations $v_1 t = t_1$, $v_4 t_1 = t$ on tire $v_1 v_4 = 1$. Des relations $v_3 t_1 = t_2$, $v_1 t = t_1$, $v_2 t = t_2$ on déduit $v_1 v_3 = v_2$. En tout on trouve facilement les relations suivantes:

$$\begin{array}{lll} v_1 v_4 = 1\,, & v_2 v_5 = 1\,, & v_3 v_6 = 1\,, \\ v_1 v_3 = v_2, & v_2 v_4 = v_3, & v_3 v_5 = v_4, \ldots\ldots \quad (C) \\ v_4 v_6 = v_5, & v_5 v_1 = v_6, & v_6 v_2 = v_1, \\ \multicolumn{3}{c}{v_1 v_3 v_5 = 1, \quad v_2 v_4 v_6 = 1.} \end{array}$$

Ces relations permettent d'exprimer les six racines $v_1, v_2 \cdots v_6$ en fonction de 2 d'entre elles.

Les six valeurs $v_1, v_2 \cdots v_6$ sont distinctes. En effet, supposons $v_1 = v_2$ on aura par l'équation $v_1 v_3 = v_2$ le résultat $v_3 = 1$. Parmi les $2N$ racines correspondant aux branches nodales gauches il ne se trouve plus l'unité (§ 22), on ne peut donc admettre $v_1 = v_2$. Supposons $v_1 = v_3$ on aurait par l'équation $v_1 v_3 = v_2$, le résultat $v_1^2 = v_2$ et l'équation $B$ admettrait les racines $v_1$ et $v_1^2$. On aurait donc

$$(n+r)(r+m)(v_1^{2r}-1)(v_1^{2(n+r+m)}-1) = r(n+r+m)(v_1^{2(r+m)}-1)(v_1^{2(n+r)}-1),$$
$$(n+r)(r+m)(v_1^{r}-1)(v_1^{n+r+m}-1) = r(n+r+m)(v_1^{r+m}-1)(v_1^{n+r}-1).$$

En divisant membre par membre,

$$(v_1^r + 1)(v_1^{n+r+m} + 1) = (v_1^{r+m} + 1)(v_1^{n+r} + 1)$$
$$v_1^{n+r+m} + v_1^r = v_1^{r+m} + v_1^{n+r},$$
$$v_1^r (v_1^m - 1)(v_1^n - 1) = 0.$$

Parmi les racines de l'équation $B$ ne se trouve par $v = 0$. Les valeurs de $v$ qui annulent $(v^m - 1)$ et $(v^n - 1)$ et qui satisfont à l'équation $B$, correspondent aux sections planes $S_x$, $S_y$, $S_z$ et $S_\infty$ et ne correspondent pas aux courbes nodales gauches $\xi_i$. On ne peut donc pas admettre $v_1 = v_3$.

Supposons $v_1 = v_4$; on a $v_1 v_4 = 1$, donc $v_1^2 = 1$ d'où $v_1 = \pm 1$. Parmi les $2N$ racines de l'équation $B$, correspondant aux courbes $\xi_i$ il ne se trouve pas la racine $v = 1$. Le nombre $2N$ des racines correspondant aux courbes $\xi_i$ étant pair (§ 14) et se présentant en paires satisfaisant à la relation $v_i v_j = 1$ la présence d'une racine $v_1 = -1$ entraînerait une seconde racine $v_4 = -1$. La

tangente $t$ rencontrerait donc en deux points coïncidants la nappe de la développable $D$ passant par la génératrice $t_1 = -t$, cequi exigerait que la génératrice $t_1$ fut une génératrice double ou que la génératrice $t$ fut tangente à la nappe passant par la génératric $t_1$. La génératrice $t$ étant quelconque il en est de même de la génératrice $t_1$ on $-t$, par conséquent, toutes les génératrices de la développable $D$ seraient des génératrices doubles ou toutes les génératrices de la développable $D$ seraient encore tangentes à cette développable. Ces 2 suppositions étant absurdes on ne peut pas admettre la supposition $v_1 = v_4$.

Supposons $v_1 = v_5$, on aurait par l'équation $v_1 v_5 = v_6$ le résultat $v_1^2 = v_6$. Nous venons de démontrer que parmi les racines de l'équation $B$ correspondant aux branches nodales gauches $\xi_i$ il ne se trouve pas 2 racines $v_1$ et $v_1^2$, donc la supposition $v_1 = v_5$ ne peut pas être admise.

Supposons $v_1 = v_6$, l'équation $v_1 v_5 = v_6$ donne $v_5 = 1$, cequi est impossible. En résumant, on ne peut pas avoir que la racine $v_1$ soit égale à une des racines $v_2, v_3 \cdots v_6$. Les 6 racines ne se distinguant en rien il est impossible que parmi ces 6 racines 2 soient égales. Ces 6 racines sont donc distinctes. La tangente $t$ rencontre donc 6 nappes distinctes de la développable $D$ en des points de la même courbe triple $\xi_3$. En chaque point de la courbe $\xi_3$ la tangente $t$ rencontre 2 nappes, il faut donc que la tangente $t$ rencontre 3 fois la courbe triple $\xi_3$.

De la relation $v_3 v_6 = 1$ on tire $v_3 v_6 t = t$ ou $v_3 t_6 = t$. Donc la tangente $t_6$ rencontre la tangente $t$.

De la relation $v_2 v_6 = v_1$ on tire $v_2 v_6 t = v_1 t$ ou $v_2 t_6 = t_1$. Donc la tangente $t_6$ rencontre la tangente $t_1$. La tangente $t_6$ rencontrant les tangentes $t$ et $t_1$, doit passer par le point de rencontre $Q$ des droites $t$ et $t_1$, ou bien doit se trouver dans le plan des droites $t$ et $t_1$. La courbe $\xi_3$ étant, par supposition, une courbe triple, il ne passe par le point $Q$ que les 3 génératrices $t$, $t_1$ et $t_2$. La génératrice $t_6$ ne passe donc pas par le point $Q$, par conséquent, les 3 tangentes $t$, $t_1$ et $t_6$ se trouvent dans un plan. Ce plan $(t, t_1, t_6)$ est un plan tritangent $\tau'$ de la courbe $C(n, r, m)$.

De la même manière on démontre que les 3 tangentes $t$, $t_2$ et $t_3$ se trouvent dans un plan. Ce plan $(t, t_2, t_3)$ est donc aussi un plan tritangent $\tau'$ de la courbe $C(n, r, m)$. De la relation

$v_2 v_4 = v_3$ on tire que la tangente $t_4$ rencontre la tangente $t_3$; $t_4$ rencontrant aussi la tangente $t$, il faut que la tangente $t_4$ passe par le point de rencontre des tangentes $t$ et $t_3$ ou bien se trouve dans le plan déterminé par les droites $t$ et $t_3$. Dans le plan $(t, t_3)$ se trouve déjà la tangente $t_2$. Dans ce plan $(t, t_2, t_3)$ se trouveraient alors 4 tangentes et ce plan serait donc un plan quadritangent de la courbe $C(n, r, m)$. La développable $D'$, qui est la figure corrélative de la courbe $C(n, r, m)$ possèderait alors une courbe quadruple. L'arête de rebroussement $C'$ de cette développable $D'$ étant une courbe de même espèce (§ 4) que la courbe $C(n, r, m)$, la développable $D$ possèderait aussi une courbe quadruple faisant partie de la courbe gauche $\xi'$. Par supposition, la courbe $\xi'$ ne se décompose pas en courbes multiples dont le degré de multiplicité est supérieur à 3. On ne peut donc pas admettre la supposition que la droite $t_4$ se trouverait dans le plan $(t, t_2, t_3)$. Par conséquent, la tangente $t_4$ passe par le point de rencontre des tangentes $t$ et $t_3$.

De même on démontre que les tangentes $t$, $t_4$ et $t_5$ se trouvent dans un plan et que les tangentes $t$, $t_5$ et $t_6$ passent par un point. En résumant on obtient le théorème:

*Quand la développable $D$ possède une courbe nodale triple $\xi_3$, cette courbe correspond à 6 racines distinctes $v_1$. Une génératrice quelconque $t$ rencontre 3 fois la courbe $\xi_3$. Par les 3 points de rencontre passent les triples de génératrices $(t, t_1, t_2)$, $(t, t_3, t_4)$ et $(t, t_5, t_6)$. Par la génératrice $t$ il passe trois plans tritangents de la courbe $C(n, r, m)$, savoir les plans $(t, t_2, t_3)$, $(t, t_4, t_5)$ et $(t, t_6, t_1)$.*

La courbe $\xi_3$ possédant une infinité de trisécantes $t$ formant la développable $D$, la courbe $C(n, r, m)$, laquelle est une courbe de même espèce (§ 24) que la courbe $\xi_3$ possède également une infinité de trisécantes, toutes tangentes à une courbe de même espèce que la courbe $C(n, r, m)$.

Et réciproquement, quand la surface réglée formée des trisécantes de la courbe $C(n, r, m)$ consiste en entier ou en partie d'une développable $T$, la développable $D$ possède une nodale triple. En effet, chaque plan tangent de la développable $T$ est un plan tritangent de la courbe $C(n, r, m)$, par conséquent, la développable $D'$ qui est la figure corrélative de la courbe $C(n, r, m)$ possède une courbe triple. L'arête de rebroussement $C'$ de la développable $D'$ étant une courbe de même espèce que la courbe $C(n, r, m)$, la

développable $D$ possède également une courbe triple $\xi_3$. Quand la développable $T$ est un cône la courbe $\xi_3$ est une courbe plane; c'est le cas considéré au § 13, où nous avons vu qu'il correspond à chaque section plane multiple $S_x$, $S_y$, $S_z$ ou $S_\infty$ un cône projetant multiple. Quand la développable $T$ n'est pas un cône, la courbe $\xi_3$ est gauche.

On a donc le théorème suivant:

*La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une courbe gauche triple sur la développable $D$, est qu'une infinité de trisécantes de la courbe $C(n, r, m)$ soit tangente à une courbe de même espèce que la courbe $C(n, r, m)$.*

Ce théorème suffira en beaucoup de cas à écarter la possibilité de l'existence de courbes gauches triples. Par exemple quand la courbe $C(n, r, m)$ se trouve sur une surface du second degré, ses trisécantes sont les génératrices de cette surface et, par conséquent, ne sont pas tangentes à une courbe de même espèce que la courbe $C(n, r, m)$. On a donc le corollaire:

*Quand la courbe $C(n, r, m)$ se trouve sur une surface du second degré sa développable $D$ ne présente pas de courbes gauches triples.*

Nous avons vu que le plan $(t, t_2, t_3)$ est tangent à la courbe $C(n, r, m)$ aux points de paramètre $t$, $t_3$ et $t_2$. Quand la tangente $t$ décrit la développable $D$, le plan $(t, t_2, t_3)$ enveloppe une développable $T$ (de même espèce que $D$). Le plan tritangent consécutif passe par les tangentes consécutives aux tangentes $t$, $t_2$, $t_3$, donc passe par les points de paramètre $t$, $t_2$, $t_3$. La génératrice du développable $T$ située dans le plan $(t, t_2, t_3)$ est donc une droite passant par les points $P$, $P_2$, $P_3$ de paramètre $t$, $t_2$ et $t_3$, cequi donne le théorème:

*Les six points de contact $P_1$, $P_2 \cdots P_6$, des tangentes à la courbe $C(n, r, m)$, qui rencontrent la tangente au point $P$, dans 3 points d'une courbe gauche triple, se trouvent deux à deux sur 3 droites passant par le point $P$.*

§ 27. *Des racines réelles de l'équation $B$.*

Envisageons de nouveau l'équation $B$ du § 22

$$m\,n\,v^{n+2r+m} - (n+r)(r+m)\,v^{n+r+m} + r(n+r+m)\,v^{n+r} + \\ + r(n+r+m)\,v^{r+m} - (n+r)(r+m)\,v^{r} + m\,n = 0 \quad . \; . \; . \quad (B)$$

On peut toujours supposer $n \geq m$, car les courbes pour lesquelles

$n < m$ se réduisent à des courbes pour lesquelles $n > m$ en choisissant pour origine des coordonnées le point singulier $M_2$ $(m, r, n)$ au lieu du point $M_1$ $(n, r, m)$ (§ 3).

Le nombre des variations de signe des termes du premier membre de l'équation $B$ étant 4, le nombre des racines réelles positives est au plus 4. Nous avons déjà vu au § 22 que $+1$ est une racine quadruple de l'équation $B$, par conséquent, aucune des racines, correspondant aux courbes nodales $S$ et $\xi_i$ n'est positive. Si donc une racine $v_1$ de l'équation $B$, correspondant à une courbe $\xi_1$ ou $S$ est un nombre réel cette racine est négative. Les paramètres $t$ et $t_1$ des points $P$ et $P_1$ de la courbe $C(n, r, m)$ dont les tangentes se rencontrent dans un point de la courbe $\xi_1$ ou $S$ sont donc de signe contraire, ou bien les points $P$ et $P_1$ se trouvent sur la courbe $C(n, r, m)$ de part et d'autre du point $M_1$. De même les points $P$ et $P_1$ se trouvent de part et d'autre du second point singulier $M_2$.

Le nombre des racines réelles négatives de l'équation $B$ ne surpasse pas le nombre des variations de la transformée en $-v$. Soit $B(-v)$ la transformée en $-v$. Nous aurons à considérer plusieurs cas.

1°. $n$, $r$ et $m$ sont impairs; la transformée en $-v$, $B(-v)$, ne présente que des permanences. Le nombre des racines négatives de l'équation $B$ est nulle (§ 34, 40).

2°. $n$ et $m$ impairs, $r$ est pair; $B(-v)$ présente 2 variations, donc l'équation $B$ peut posséder 2 racines négatives (§ 45).

3°. $r$ et $m$ sont impairs, $n$ est pair; $B(-v)$ présente une variation, donc une racine de l'équation $B$ est réelle et négative, c'est la racine $-1$, correspondant à la courbe nodale plane $S_y$ (§§ 35, 41).

4°. $r$ et $n$ sont impairs, $m$ est pair; $B(-v)$ présente 3 variations, donc 3 ou 1 racine de l'équation $B$ sont réelles et négatives; $-1$ est une racine de l'équation $B$ cette racine correspond à la courbe nodale plane $S_x$.

5°. $r$ est impair, $n$ et $m$ sont pairs; $B(-v)$ présente 2 variations de signe, 2 ou 0 racines de l'équation $B$ sont réelles et négatives (§ 38).

6°. $n$ est impair, $r$ et $m$ sont pairs; $B(-v)$ présente 5 variations 5, 3 ou 1 racine de l'équation $B$ sont réelles et négatives.

Une de ces racines est $-1$, cette racine correspond à la courbe nodale plane $S_\infty$.

7°. $m$ est impair, $n$ et $r$ sont pairs; $B(-v)$ présente 3 variations donc 3 ou 1 racines de l'équation $B$ sont réelles et négatives; $-1$ est une de ces racines, cette racine correspond à la courbe nodale plane $S_z$ (§ 39).

Des racines $v_1$ correspondant à des courbes nodales gauches il y a donc au plus 4 qui sont réelles

Les racines $v_1$ de l'équation $B$ correspondant aux génératrices que la tangente au point $P(t)$ rencontre sur la courbe nodale $S_z$ sont les racines de l'équation $v^{q_1} = 1$ (§ 23). Quand $q_1$ est pair une de ces racines est $-1$ et les autres racines sont imaginaires; la tangente au point $P(t)$ rencontre donc sur la courbe $S_z$ la tangente au point $P(-t)$.

Des 4 nombres $q_1$, $q_2$, $q_3$ et $q_4$ il n'y a jamais plus qu' un seul qui soit pair (§ 14). Des racines différentes de $+1$ des équations $v^{q_1} = 1$, $v^{q_2} = 1$, $v^{q_3} = 1$, $v^{q_4} = 1$ il n'y a donc qu'une seule qui est $-1$, toutes les autres racines sont imaginaires.

Quand $t$ est réel, le point $P(t)$ et la langente $t$ au point $P(t)$ à la courbe $C(n, r, m)$, sont réels.

Quand la racine $v_1$ de l'équation $B$ est imaginaire $t_1 = v_1 t$ sera imaginaire. Le point $P_1(t_1)$ et la tangente au point $P_1(t_1)$ seront également imaginaires. Par conséquent, des nappes que la génératrice $t$ rencontre sur les 4 courbes nodales planes $S$, il y a au plus une qui soit réelle, toutes les autres nappes sont imaginaires. Pour fixer les idées, soit $v_1$ une racine imaginaire de l'équation $v^{q_1} = 1$; la génératrice $t$ rencontre donc sur la courbe $S_z$ la génératrice imaginaire $t_1$. La courbe $S_z$ est une courbe réelle et le point de rencontre de la génératrice $t$ avec le plan réel $z = 0$ est un point réel de la courbe $S_z$, où passe la droite imaginaire $t_1$. La génératrice $t_1$ est donc une droite imaginaire possédant un point réel, c'est donc une droite imaginaire ponctuée, ou pour simplifier, $t_1$ est une droite ponctuée. Je réserverai comme le fait R. STURM [1]) le nom de droite imaginaire pour ces droites imaginaires qui sont dépourvues d'un point réel. On a donc le théorème:

*Des génératrices que la tangente réelle t rencontre sur les 4 courbes*

[1]) R. STURM, *Flächen dritter Ordnung*. Kap 6.

*nodales planes $S$ il y a au plus une qui soit réelle, et les autres génératrices sont des droites ponctuées.*

Quand une racine $v_1$ de l'équation $B$, correspondant à une courbe nodale gauche $\xi_1$ est réelle, la génératrice $t$ rencontre sur la courbe $\xi_1$ une nappe réelle et la courbe $\xi_1$ est alors une courbe nodale où passent 2 nappes réelles. Nous avons vu que des racines $v_1$, correspondant à des courbes nodales gauches, il y a au plus 4 qui soient réelles. Deux racines $v_1$, correspondant à une même courbe $\xi_1$, satisfont à la relation $v_i v_j = 1$ (§ 24). Les 4 racines réelles correspondent donc à 2 courbes nodales gauches. On a donc le théorème:

*Des courbes nodales gauches $\xi_i$, il y a au plus 2 qui sont l'intersection de 2 nappes réelles.*

Quand une racine $v_1$ de l'équation $B$, correspondant à une courbe nodale gauche $\xi_1$ est imaginaire, il passe par la courbe $\xi_1$ une nappe réelle et une nappe imaginaire. En général, le point d'intersection de la génératrice réelle $t$ et de la génératrice imaginaire $t_1$ est un point imaginaire et la partie de la courbe $\xi_1$ située sur une nappe réelle de la développable $D$ est imaginaire. Si la courbe $\xi_1$ possède alors une partie réelle, cette partie réelle sera l'intersection de 2 nappes imaginaires, donc cette partie de la courbe $\xi_1$ sera une courbe nodale isolée. Les points réels de cette partie réelle étant les intersections de génératrices non réelles, ces génératrices sont des droites ponctuées.

La partie de la courbe $\xi_1$ où passent une nappe réelle et une nappe imaginaire peut encore être réelle si la nappe imaginaire est formée de génératrices ponctuées et quand la génératrice réelle passe par le point réel de la génératrice ponctuée. Trois des 4 courbes nodales planes $S$ sont des exemples d'une courbe nodale réelle où ne passe qu'une seule nappe réelle. Remarquons que quand la droite ponctuée $t_1$ est une génératrice de la développable $D$, il en sera de même de la génératrice imaginaire conjuguée $t_1'$. Chaque droite ponctuée rencontre sa conjuguée en son point réel. Un point réel d'une génératrice ponctuée est donc toujours un point d'une courbe nodale de la développable $D$. Quand par le point réel des génératrices ponctuées conjuguées $t_1$ et $t_1'$, il passe encore la génératrice réelle $t$, la courbe $\xi_1$ est une courbe triple ou est une courbe nodale d'un degré de multiplicité supérieur à 3.

Nous aurous donc à considérer de plus près les génératrices de la développable $D$ qui sont des droites ponctuées.

§ 28. *Des génératrices ponctuées.*

Quand $A$, $B$, $C$ et $D$ sont des formes linéaires en les coordonnées $x$, $y$, $z$ et $u$, l'équation $A + Bi = 0$ représente un plan imaginaire et les 2 équations $A + Bi = 0$ et $C + Di = 0$, représent, en général une droite imaginaire.

Quand la droite réelle $A = 0$, $B = 0$ du plan imaginaire $A + Bi = 0$, rencontre la droite réelle du plan $C + Di = 0$, la droite $A + Bi = 0$, $C + Di = 0$ sera une droite ponctuée. La droite $A + Bi = 0$, $C + Di = 0$ est donc une droite ponctuée quand les 4 plans $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ passent par un point.

La tangente $t$ à la courbe $C(n, r, m)$ au point $P(t)$ de paramètre $t$ dont les équations sont (§ 4)

$$r t^{n+r} - (n + r) t^r x + n y = 0,$$
$$(r + m) t^{n+r+m} - (n + r + m) t^{r+m} x + n z = 0,$$

sera une droite imaginaire quand $t = M(\cos\alpha + i \sin\alpha) = M e^{i\alpha}$ et sera une droite ponctuée quand les quantités réelles $M$ et $\alpha$ sont telles que passent par un point les 4 plans suivants

$$r M^{n+r} \cos(n + r)\alpha - x(n + r) M^r \cos r\alpha + n y = 0,$$
$$r M^{n+r} \sin(n + r)\alpha - x(n + r) M^r \sin r\alpha = 0,$$
$$(r+m) M^{n+r+m} \cos(n+r+m)\alpha - x(n+r+m) M^{r+m} \cos(r+m)\alpha + n z = 0,$$
$$(r+m) M^{n+r+m} \sin(n+r+m)\alpha - x(n+r+m) M^{r+m} \sin(r+m)\alpha = 0.$$

$M$ et $\alpha$ doivent donc satisfaire à la condition que s'annule

$$\begin{vmatrix} -(n+r)M^r \cos r\alpha & n & 0 & r M^{n+r} \cos(n+r)\alpha \\ -(n+r)M^r \sin r\alpha & 0 & 0 & r M^{n+r} \sin(n+r)\alpha \\ -(n+r+m)M^{r+m} \cos(r+m)\alpha & 0 & n & (r+m)M^{n+r+m} \cos(n+r+m)\alpha \\ -(n+r+m)M^{r+m} \sin(r+m)\alpha & 0 & 0 & (r+m)M^{n+r+m} \sin(n+r+m)\alpha \end{vmatrix}$$

Cette condition se réduit à

$$M^{n+2r+m} \{(n + r)(r + m) \sin r\alpha \sin(n + r + m)\alpha$$
$$- r(n + r + m) \sin(n + r)\alpha \sin(r + m)\alpha\} = 0.$$

Quand $M=0$ on a $t=0$ et la tangente $t$ est la génératrice réelle singulière $g_1$ et la droite $t$ n'est donc pas une droite ponctuée. La droite $t$ est donc seulement une droite ponctuée quand la quantité réelle $\alpha$ satisfait à la condition

$$(n+r)(r+m)\sin r\alpha \sin(n+r+m)\alpha$$
$$-r(n+r+m)\sin(n+r)\alpha\sin(r+m)\alpha=0.$$

En remplaçant $\sin r\alpha$ par $(e^{r\alpha i}-e^{-r\alpha i}):2i$ etc. et multipliant après par $-4e^{(n+2r+m)\alpha i}$ cette dernière condition se réduit à

$$(n+r)(r+m)(e^{2r\alpha i}-1)(e^{2(n+r+m)\alpha i}-1)$$
$$-r(n+r+m)(e^{2(n+r)\alpha i}-1)(e^{2(r+m)\alpha i}-1)=0.$$

Par la substitution $e^{2\alpha i}=v$, cette condition devient

$$(n+r)(r+m)(v^r-1)(v^{n+r+m}-1)-r(n+r+m)(v^{n+r}-1)(v^{r+m}-1)=0,$$

c'est une des formes que prend l'équation $B$ (§ 22).

Soit $v_1=e^{2\varphi i}$ une racine de l'équation $B$, alors $\alpha=\varphi$ sera une racine de l'équation en $\alpha$ précédente, et la tangente à la courbe $C(n,r,m)$ sera donc une droite ponctuée, quand le paramètre du point de contact est $t=Me^{\varphi i}$, $M$ étant quelconque.

L'angle $\alpha$ étant une quantité réelle on ne peut pas avoir $\alpha=\varphi$ que sous la condition que $\varphi$ est une quantité réelle. Quand $\varphi$ est réelle le module de $v_1$ est l'unité.

On a donc le théorème:

*A chaque racine imaginaire $v_1=e^{2\varphi i}$ de l'équation $B$, dont le module est l'unité il correspond une infinité de points imaginaires de la courbe $C(n,r,m)$ dont les paramètres $t$ ont le même argument $\varphi$ et qui sont les points de contact de tangentes ponctuées.*

Je démontrerai ce résultat encore une fois d'une autre manière.

Soit $e^{2\varphi i}$ une racine $v_1$ de l'équation $B$, c'est à dire, la tangente $t$ au point de paramètre $t$ rencontrera, en un point $Q$, de la courbe nodale, la tangente $t_1$ au point de paramètre $t_1=v_1 t$. Soit $t=Me^{-\varphi i}$ on aura $t_1=Me^{\varphi i}$. A la condition que $\varphi$ est un nombre réel, $t$ et $t_1$ sont 2 imaginaires conjuguées, et les 2 tangentes $t$ et $t_1$ sont 2 droites imaginaires conjuguées. Quand 2 droites imaginaires con-

juguées se rencontrent leur point de rencontre $Q$ est un point réel et les 2 droites sont des droites ponctuées.

Quand $\varphi$ est un nombre imaginaire $a + bi$ les paramètres des points de contact des tangentes $t$ et $t_1$ sont

$$t = Me^b e^{-ai}, \; t_1 = M e^{-b} e^{ai},$$

$t$ et $t_1$ n'ont plus le même module donc ne sont pas des imaginaires conjuguées.

Le résultat précédant est indépendant de la valeur du module $M$ de $t$, en faisant varier $M$ de $+\infty$ à $-\infty$ on obtient donc une infinité de points réels $Q$ sur la courbe nodale correspondant à la racine $v_1$, toujours à la condition que $\varphi$ est un angle réel. On a donc le théorème:

*Une courbe nodale gauche $\xi_i$, correspondant à une racine imaginaire $v_i$ de l'équation $B$, est une courbe nodale isolée, quand le module de $v_i$ est egal à l'unité.*

En particulier, quand l'équation $B$ ne possède que 2 racines imaginaires $v_1$ et $v_2$ correspondant à des courbes nodales gauches ces 2 racines correspondent à une même courbe nodale gauche $\xi_1$ et leur produit est donc $v_1 v_2 = 1$ (§ 24). Quand le produit de deux imaginaires conjuguées est l'unité leur module est l'unité et la courbe $\xi_1$ est donc une courbe nodale réelle isolée (§§ 37, 38, 41).

Supposons que la génératrice réelle $t$ rencontre une génératrice ponctuée $t_1$, je dis que la développable $D$ possède alors une courbe nodale réelle, triple ou d'un degré de multiplicité supérieur à 3. Quand la génératrice $t$ rencontre la génératrice ponctuée $t_1$, elle rencontre également la génératrice $t_2$, laquelle est la conjuguée de $t_1$. Il y a 2 cas possibles, ou bien la génératrice $t$ passe par le point réel commun aux 2 génératrices ponctuées $t_1$ et $t_2$ et ce point est alors un point triple de la développable $D$ ou bien la génératrice $t$ rencontre la génératrice $t_1$ en un point imaginaire, $t$ se trouve alors dans le plan réel passant par $t_1$. Ce plan réel passe également par $t_2$ et dans ce plan se trouvent donc 3 tangentes $t$, $t_1$ et $t_2$ à la courbe $C(n, r, m)$, ce plan est donc un plan tritangent réel. La figure corrélative de la courbe $C(n, r, m)$, c'est à dire la développable $D$, possèdera une courbe triple réelle.

Supposons que $t$ et $t_1 = Mte^{ai}$ sont les parametres des points de contact des génératrices $t$ et $t_1$. Le paramètre $t_2$ du point de

contact de la génératrice conjuguée $t_2$ sera $t_2 = Mte^{-\alpha i}$. La génératrice $t$ rencontre les génératrices $t_1$ et $t_2$ on a donc $t_1 = vt$, $t_2 = v_2 t$ où $v_1$ et $v_2$ sont des racines de l'équation $B$. Des équations $t_1 = v_1 t$ et $t_1 = Mte^{\alpha i}$ il résulte $v_1 = Me^{\alpha i}$, de même on a $v_2 = Me^{-\alpha i}$ donc $v_1 : v_2 = e^{2\alpha i}$.

Les génératrices ponctuées $t_1$ et $t_2$ se rencontrent donc $t_1 = v_3 t_2$ où $v_3$ est une racine de l'équation $B$. On a donc $Me^{-\alpha i} = v_3 Me^{\alpha i}$, d'où $v_3 = e^{-2\alpha i}$.

Il y a 2 cas à considérer:

1° Supposons $M = 1$, par conséquent, $v_2 = e^{-\alpha i}$, donc $v_3 = v_2^2$. Nous avons vu an § 26 que la racine $v_2$ de l'équation $B$ est une racine d'une des 2 équations $v^n = 1$ ou $v^m = 1$, quand sa deuxième puissance est aussi une racine de l'équation $B$. La racine $v_2$ correspond alors à une des 4 sections planes $S$. La génératrice $t$ rencontre alors les 2 génératrices $t_2$ et $t_1$ en son point de rencontre avec la courbe $S$, et peut-être encore quelques autres génératrices. On a donc le théorème.

*Quand une génératrice réelle t rencontre une génératrice ponctuée, le module du rapport v correspondant étant l'unité, le point de rencontre est un point d'unedes section planes S laquelle est alors une courbe multiple dont le degré de multiplicité est au moins trois.*

2° Supposons $M$ différent de 1. Le point de rencontre $Q_1$ des génératrices $t$ et $t_1$ n'appartient pas à une des 4 sections planes $S$, puisque les racines $v$ correspondant à une section plane sont les racines d'une des 4 équations $v^q = 1$, desquelles les modules sont toujours égaux à l'unité, tandis que le module $M$ de $v_1 = Me^{\alpha i}$ est par supposition différent de l'unité. Le point $Q_1$ appartient donc à une des courbes nodales gauches $\xi_i$. L'équation $B$ étant une équation réciproque l'existence d'une racine $v_1$ nécessite l'existence d'une racine $1 : v_1$ et la génératrice $t$ doit rencontrer 6 génératrices $t_1$, $t_2 \cdots t_6$, les paramètres des points de contact étant

$$t_1 = v_1 t = Mte^{\alpha i},\ t_2 = v_2 t = Mte^{-\alpha i},\ t_3 = v_3 t = te^{-2\alpha i},$$
$$t_4 = v_4 t = te^{-\alpha i} : M,\ t_5 = v_5 t = te^{\alpha i} : M,\ t_6 = v_6 t = te^{2\alpha i}.$$

On vérifie facilement qu'il existe entre les racines $v$ les relations $C$ du § 26

$$\begin{array}{lll} v_1 v_4 = 1\ , & v_2 v_5 = 1\ , & v_3 v_6 = 1\ , \\ v_1 v_3 = v_2, & v_2 v_4 = v_3, & v_3 v_5 = v_4, \\ v_4 v_6 = v_5, & v_5 v_1 = v_6, & v_6 v_2 = v_1, \\ \multicolumn{2}{c}{v_1 v_3 v_5 = 1\ ,} & v_2 v_4 v_6 = 1\ . \end{array} \qquad (C)$$

Supposons que $t_3$ soit une droite réelle, il faut que $v_3$ soit réelle donc $v_3 = -1$ (§ 27), $v_3 v_6 = 1$, donc $v_6 = -1$ et les 2 génératrices $t_3$ et $t_6$ coïncident. Quand $v_3 = -1$ le point de rencontre $Q_3$ des génératrices $t$ et $t_3$ est un point d'une des 4 sections planes $S$ (§ 27). Le point de rencontre $Q_{12}$ des génératrices $t_1$ et $t_2$ est également un point de cette courbe $S$, puisque $t_2 = v_3 t_1$; de même le point de rencontre $Q_{45}$ des génératrices $t_4$ et $t_5$ est un point réel de cette courbe $S$. Il est impossible qu'un des 2 points $Q_{12}$ et $Q_{45}$ se trouve sur la génératrice $t$, puisqu'alors la droite $t$ se trouverait dans le plan de la courbe $S$, cequi est impossible, les seules génératrices se trouvant dans un des plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ou $u = 0$ étant les génératrices $g_1$ et $g_2$. Des relations $v_2 v_4 = v_3$, $v_5 v_1 = v_6$ on tire que les droites $t_2, t_4, t_1$ et $t_5$ rencontrent la droite $t_3 = t_6$. Les 4 droites $t_1$,, $t_2$, $t_4$ et $t_5$ rencontrent aussi la droite $t$, donc elles se trouvent dans le plan $(t, t_3)$ ou elles passant par le point $Q_3$. Il est impossible que les droites $t_1$, $t_2$, $t_4$ et $t_5$ passent par le point $Q_3$, puisque ce point se trouve sur une courbe $S$ et les modules des rapports $v_1$, $v_2$, $v_4$ et $v_5$ devraient alors être l'unité. Il est également impossible que les 4 droites se trouvent dans le plan $(t, t_3)$ puisque dans ce plan se trouvaient alors les 3 points réels $Q_3$, $Q_{12}$ et $Q_{45}$, par conséquent, le plan $(t, t_3)$ coïnciderait avec le plan de la courbe $S$, ou les 3 points réels $Q_3$, $Q_{12}$, $Q_{45}$ se trouveraient en ligne droite. On vérifie facilement qu'il est impossible qu'une droite rencontre la courbe $S(x = t^p,\ y = t^q)$ en 3 points réels distincts. Quand le plan $(t, t_3)$ coïncide avec le plan de la courbe $S$ les génératrices réelles $t$ et $t_3$ seraient dans le plan de la courbe $S$ cequi est aussi impossible.

Il est donc impossible que la droite $t_3$ est une droite réelle.

Supposons que la génératrice $t_3$ soit une droite ponctuée. Le paramètre du point de contact de la droite $t_3$ est $t_3 = te^{-2\alpha i}$, par conséquent, $e^{-4\alpha i}$ est une racine de l'équation $B$. Donc $v_3$ et $v_3^2$ sont 2 racines de l'équation $B$, par conséquent, $Q_3$ est un point d'une des 4 courbes nodales planes $S$ (§ 26). Comme pour le cas que $t_3$

est une génératrice réelle, on démontre maintenant facilement que cette droite $t_3$ ne peut pas être une droite ponctuée.

La génératrice $t_3$ est donc une droite imaginaire.

Supposons que la droite $t$, qui rencontre les 2 droites ponctuées conjuguées $t_1$ et $t_2$ ne passe pas par leur point réel commun, mais se trouve dans leur plan commun réel $(t, t_1, t_2)$. Parce qu'on a $v_2 = v_1 v_3$, ou bien $v_2 t = v_1 v_3 t$, ou $t_2 = v_1 t_3$, la droite $t_3$ rencontre la droite $t_2$. La droite $t_3$ laquelle rencontre aussi la droite $t$ doit donc se trouver dans le plan $(t, t_2)$ ou passer par le point de rencontre $Q_2$ des droites $t$ et $t_2$. La droite imaginaire $t_3$ ne peut se trouver dans le plan réel $(t, t_2)$, donc elle passe par le point $Q_2$. Le point $Q_2$ est donc un point triple de la développable $D$. De même ou démontre que la droite imaginaire $t_6$ passe par le point de rencontre $Q_1$ des droites $t$ et $t_1$. Parce qu'on a $v_3 = v_2 v_4$ la droite $t_3$ rencontre la droite $t_4$, donc la droite $t_4$, laquelle rencontre aussi la droite $t$, passe par le point $Q_2$ ou se trouve dans le plan $(t, t_3)$. Quand la droite $t_4$ passe par le point $Q_2$, ce point est un point multiple dont le degré de multiplicité est supérieur à *3*. Supposons maintenant que la droite $t_4$ ce trouve dans le plan imaginaire $(t, t_3)$. La droite réelle $t$ rencontre la droite ponctuée $t_4$ et le plan $(t, t_3, t_4)$ des droites $t$ et $t_4$ est un plan imaginaire, la droite $t$ passe donc par le point réel de la droite $t_4$; par ce point $Q_4$ il passe également la droite ponctuée conjuguée $t_5$. Le point $Q_4$ est donc une point triple de la développable $D$. Des relations $v_1 v_4 = 1$, $v_2 v_5 = 1$, $v_3 v_6 = 1$ il s'ensuit que les 3 points triples $Q_1$, $Q_2$ et $Q_4$ se trouvent sur une même courbe nodale. Des trois points de rencontre de la génératrice $t$ avec cette courbe nodale il n'y a qu'un seul qui est réel.

Quand la droite $t$ ne se trouve pas dans le plan reél des droites ponctuées conjuguées $t_1$ et $t_2$ mais passe par leur point réel commun on trouve aussi que ce point est un point multiple dont le degré est supérieur à 3 ou que ce point est un point triple. Dans ce dernièr cas la droite $t$ rencontre les 6 droites $t_1$, $t_2 \cdots t_6$ en 3 points d'une même courbe nodale triple. Les génératrices $t$ étant des trisécantes de la courbe nodale triple cette courbe ne peut pas être une courbe plane. On a donc le théorème:

*Quand une génératrice réelle rencontre une génératrice ponctuée dont le module n'est pas l'unité, le point de rencontre est un point multiple dont le degré de multiplicité est supérieur à 3 ou est un*

*point d'une courbe triple réelle. Par cette courbe triple réelle il ne passe qu'une seule nappe réelle. Cette courbe triple est une courbe gauche.*

---

## CHAPITRE IV.

### Exemples et cas particuliers.

§ 29. *Résumé des résultats obtenus.*

Le point singulier $M_1$ compte pour

$$\beta_1 = n - 1 \text{ points stationnaires } \beta \ (\S\ 7),$$
$$H_1 = \{(n-1)(n+r-3) + m(q_1 - 1)\} : 2 \text{ noeuds } H \ (\S\ 7).$$

Le plan osculateur au point $M_1$ compte pour

$$\alpha_1 = m - 1 \text{ plans stationnaires } \alpha \ (\S\ 7,\ \S\ 10)$$
$$G_1 = \{(m-1)(m+r-3) + n(q_2 - 1)\} : 2 \text{ plans doubles } G \ (\S\ 7).$$

La tangente au point $M_1$ compte pour

$$\theta_1 = r - 1 \text{ tangentes stationnaires } \theta \ (\S\ 9,\ \S\ 10),$$
$$\omega_1 = \{(r-1)(n+r-3) + m(q_1 - 1)\} : 2 \text{ tangentes doubles } (\S\ 9),$$
$$\omega'_1 = \{(r-1)(r+m-3) + n(q_2 - 1)\} : 2 \text{ génératrices doubles } (\S\ 10).$$

Le paramètre correspondant au point $M_1$ est une racine multiple de l'équation donnant les paramètres des points par lesquels passent 4 plans osculateurs consécutifs. Le degré de multiplicité de cette racine est (§ 6)

$$3m + 2r + n - 6 = 3(m-1) + 2(r-1) + (n-1) = 3\alpha_1 + 2\theta_1 + \beta_1.$$

Le paramètre correspondant au point $M_1$ est une racine multiple de l'équation donnant les paramètres des points de contact des plans osculateurs contenant 4 points consécutifs. Le degré de multiplicité de cette racine est

$$3n + 2r + m - 6 = 3(n-1) + 2(r-1) + (m-1) = 3\beta_1 + 2\theta_1 + \alpha_1 \ (\S 6).$$

Les singularités de la courbe $C(n, r, m)$ sont:

$$\text{degré } \nu = n + r + m \ (\S\ 4),$$
$$\text{classe } \mu = n + r + m \ (\S\ 4),$$
$$\text{rang } \varrho = n + 2r + m \ (\S\ 4),$$

nombre de points stationnaires $\beta = n + m - 2$ (§ 5),
" " plans " $\alpha = n + m - 2$ (§ 5),
" " tangentes " $\theta = 2r - 2$ (§ 5, § 9),
" " " doubles $\omega = \{(r-1)(n+2r+m-6) + m(q_1 - 1) + n(q_2 - 1)\} : 2$ (§ 9),
" " génératrices " $\omega' = \omega$ (§ 10),
" " noeuds effectifs $H = \{(n+r+m-3)(n+m-2) - m(n-q_1) - n(m-q_2)\} : 2$ (§ 8),
" " " apparants $h = \{r(n+r+m-1) + m(n-q_1) + n(m-q_2)\} : 2$ (§ 8),
" " plans doubles $G = H$ (§ 8),
" " droites dans 2 plans du système se trouvant dans un plan quelconque $g = h$,

degré de la courbe nodale $\xi = \{(n+2r+m-4)(n+r+m) - m(q_1 - 1) - n(q_2 - 1)\} : 2$ (§ 13),
la classe de la développable titangente $\eta = \xi$ (§ 13).

La courbe nodale $\xi$ se décompose en une courbe gauche $\xi'$ et en 4 courbes nodales planes (§ 13). Ces courbes nodales planes sont les sections $S_x$, $S_y$, $S_z$ et $S_u$ ou $S_\infty$ de la développable $D$ par les faces du tétraèdre de référence $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $u = 0$. Ces courbes nodales planes sont respectivement du degré $(n+r+m) : q_3$, $(n+r+m) : q_4$, $(n+r) : q_1$, $(r+m) : q_2$ (§ 12). Par ces 4 courbes nodales planes passent respectivement $q_3$, $q_4$, $q_1$, $q_2$ nappes de la développable $D$ (§ 12, § 23). La courbe nodale gauche $\xi'$ se décompose en $N$ courbes nodales $\xi_i$ où

$$N = (n + 2r + m - q_1 - q_2 - q_3 - q_4) : 2 \text{ (§ 24).}$$

Chaque courbe nodale gauche $\xi_i$ est une courbe de même espèce (§ 2) et de même position que la courbe $C(n, r, m)$ (§ 24).

Par le point $M_1$ il passent $Nn$ branches de courbes nodales gauches (§ 15, § 24). Ces branches y ont de commun avec la tangente à la courbe $C(n, r, m)$ $N(n+r)$ points (§ 18, § 24).

Ces branches y ont de commun $N(n+r+m)$ points avec le plan osculateur de la courbe $C(n, r, m)$ (§ 19, § 24).

Le rang de la courbe nodale $R = N(n + 2r + m) + \{(n+r)(q_1 - 1) + (n+r+m)(q_3 + q_4 - 2) + (m+r)(q_2 - 1)\} : 2$.

Le point $M_1$ compte pour $(n+r+m)(n+r-2)$ intersections de l'arête de rebroussement $C(n, r, m)$ (§ 11) et pour $N(n+r+m)(n+r-2)$ intersections de la courbe nodale gauche (§ 25) avec la

deuxième surface polaire $\Delta^2 D$ prise par rapport au point quelconque $P$.

Le point $M_1$ compte pour $(n+r-2)(n+r+m):2$ intersections de la surface $\Delta^2 D$ avec la courbe $S_z$, quand cette courbe nodale est une courbe double (§ 21).

Le point $M_1$ compte pour $(n+r-2)(n+r+m):2$ intersections de la surface $\Delta^2 D$ avec une des 2 courbes $S_x$ ou $S_y$, quand cette courbe est une courbe double (§ 20).

Les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$ sont les seuls points singuliers des courbes nodales planes $S$ et des courbes nodales gauches $\xi_i$, pourvu que tous les points d'une de ces courbes ne sont pas des points multiples de la développable $D$, le degré de multiplicité étant supérieur à 2.

En dehors des points $M_1$ et $M_2$ les courbes nodales gauches $\xi_i$ et les courbes nodales planes $S_x$ et $S_y$ ne possèdent pas de points stationnaires $\lambda$.

En dehors des points $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$ les courbes nodales planes $S_z$ et $S_\infty$ ne possèdent pas de points stationnaires.

Le nombre des points triples $\tau$ des courbes $S_x$, $S_y$ et $\xi_i$, non-coïncidant avec les points $M_1$ et $M_2$ est nulle ou est infiniment grand.

Le nombre des points triples $\tau$ des courbes $S_z$ et $S_\infty$, non-coïncidant avec les points $M_1$, $M_2$, $M_3$ et $M_4$ est nulle ou est infiniment grand.

§ 30. *Résultats pour le cas que* $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1$.

Les résultats précédants (§ 29) se simplifient notablement quand les nombres

$$\begin{aligned} &n \text{ et } r, \\ &n \text{ et } r+m, \\ &m \text{ et } n+r, \\ &m \text{ et } n, \end{aligned}$$

sont premiers entre eux, c'est à dire quand

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

Les résultats obtenus pour le point singulier $M_1(n, r, m)$, en étudiant la courbe speciale $C(n, r, m)$ sont dans le cas que les conditions $(A)$ sont satisfaites encore vrais pour un point singu-

lier $M(n, r, m)$ d'une courbe quelconque. En effet, quand une courbe quelconque $C_1$ possède un point singulier $M_1(n, r, m)$ on peut développer en série les coordonnées des points de la courbe $C_1$ dans le voisinage du point $M$ de la manière suivante: [1])

$$\begin{aligned} x &= a\,t^n, \\ y &= b\,t^{n+r} + b_1\,t^{n+r+p_1} + b_2\,t^{n+r+p_2} + \text{etc.}, \\ z &= c\,t^{n+r+m} + c_1\,t^{n+r+l_1} + c_2\,t^{n+r+l_2} + \text{etc.}. \end{aligned}$$

De ces développements en série on peut déduire des séries donnant les coordonnées des points des projections de la courbe $C_1$ et des sections de la développable correspondante, les points se trouvant dans le voisinage du point singulier $M$. On trouve les nombres des singularités équivalentes au point singulier $M$ $(n, r, m)$ en comptant les singularités équivalentes au point singulier, correspondant au point $M$, des projections et des sections, (§§ 7, 9, 10). Le nombre des points ou des tangentes stationnaires équivalents à un cycle

$$\xi = t^N, \quad \eta = t^M + A\,t^{M+\varphi} + \text{etc.}$$

dépend seulement des 2 exposants $N$ et $M$. En général, le nombre des noeuds et des tangentes doubles équivalents au point singulier dépendra de plusieurs termes du développement pour $\eta$. [2]) Mais dans le cas spécial que les exposants $N$ et $M$ sont premiers entre eux, le nombre des noeuds et des tangentes doubles dépend seulement des 2 exposants $N$ et $M$ et est indépendant des exposants suivants. Dans le cas que les exposants $N$ et $M$ sont premiers entre eux, c'est à dire quand les conditions $(A)$ sont satisfaites, l'absence ou la présence de cas termes suivants ne peut pas influencer le nombre des noeuds ou des tangentes doubles et on devra donc trouver les mêmes résultats pour le point singulier $M_1(n, r, m)$ de la courbe spéciale $C(n, r, m)$ que pour le point singulier $M(n, r, m)$ de la courbe générale. On obtient donc, quand $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1$, que le point singulier $M_1(n, r, m)$ de la courbe spéciale $C(n, r, m)$ ou d'une courbe quelconque est équivalent à [3])

---

[1]) HALPHEN. *Bulletin de l. Soc. Mat. d. France*, t. VI p. 10.

[2]) HALPHEN. *Mém. d. l. Ac. de Paris.* T. 26.

[3]) W. A. VERSLUYS. *K. A. v. W. te Amsterdam.* Verslag 25 Nov. 1905.

$(n-1)$ points stationnaires $\beta$,
$(n-1)(n+r-3):2$ noeuds effectifs $H$.

Le plan osculateur au point singulier $M_1(n,r,m)$ est équivalent à

$(m-1)$ plans stationnaires $\alpha$,
$(m-1)(r+m-3):2$ plans doubles $G$.

La tangente au point singulier est équivalent à

$(r-1)$ tangentes stationnaires $\theta$,
$(r-1)(r+n-3):2$ tangentes doubles $\omega$,
$(r-1)(r+m-3):2$ génératrices doubles $\omega'$.

Par le point $M_1(n,r,m)$ il passe $Nn$ branches de la courbe nodale, $N$ étant $(n+2r+m-4):2$. Ces branches y ont la même tangente que l'arête de rebroussement $C$ et elles ont de commun avec cette tangente $N(n+r)$ points. Ces $nN$ branches y ont le même plan osculateur que l'arête de rebroussement $C$ et ont commun avec ce plan osculateur commun $N(n+r+m)$ points.

Le point $M_1$ compte pour $(n+r-2)(n+r+m)$ intersections de l'arête de rebroussement $C$ et pour $N(n+r-2)(n+r+m)$ intersections de la courbe nodale $\xi$ avec la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$ de la développable $D$, prise par rapport au point quelconque $P$.

Je me propose de donner bientôt de ces résultats une démonstration directe indépendante de la considération de la courbe $C(n,r,m)$. Je fais suivre quelques applications à des courbes spéciales.

§ 31. *Cas que* $n=m$.

Considérons le cas spécial que les coordonnées d'un point de la courbe $C(n,r,m)$ sont

$$x=t^n,\ y=t^{n+r},\ z=t^{2n+r},$$

ou bien supposons $n=m$.

Il faut supposer que $r$ et $n$ sont premiers entre eux, les 3 nombres $n$, $r$ et $m$ n'admettant pas de facteur commun (§ 2). On aura donc $q_1=q_2=q_3=q_4=1$ et $N=n+r-2$, par conséquent, les 4 sections $S$ ne sont pas des courbes nodales et la

courbe nodale consiste en $(n+r-2)$ courbes gauches de même espèce que la courbe $C(n,r,n)$ (§ 24).

La courbe $C(n,r,n)$ présente aux points $M_1$ et $M_2$ la même singularité. En chacun de ces 2 points se sont réunies les singularités suivantes:

$$M_1 = M_2 = (n-1)\beta + (n-1)\alpha + (r-1)\theta + \frac{(n-1)(n+r-3)}{2} H + \\ + \frac{(n-1)(n+r-3)}{2} G + \frac{(r-1)(n+r-3)}{2} \omega .$$

$M_1$ et $M_2$ comptent chacun pour $(n+r-2)(2n+r)$ intersections de l'arête de rebroussement et pour $(n+r-2)^2(2n+r)$ intersections de la courbe nodale $\xi$ avec la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$ (§ 25, § 11).

Les singularités de la courbe $C(n,r,n)$ sont:

$$\begin{aligned}
\mu = \nu &= 2n + r , \\
\varrho &= 2(n+r) , \\
\alpha = \beta &= 2(n-1) , \\
H = G &= (n-1)(n+r-3) , \\
\omega = \omega' &= (r-1)(n+r-3) , \\
\theta &= 2(r-1) , \\
h = g &= n(n-1) + r(2n+r-1) : 2 , \\
\xi = \eta &= (n+r-2)(2n+r) , \\
R &= 2(n+r-2)(n+r) , \\
p = \lambda = \lambda' = \tau = \tau' &= 0 ,
\end{aligned}$$

où $\lambda$, $\lambda'$, $\tau$, $\tau'$ sont les nombres des points, et des plans stationnaires, des points triples et des plans tritangents de la courbe nodale $\xi$, se trouvant en dehors des singularités $M_1$ et $M_2$.

Des expressions donnant les coordonnées d'un point de la courbe $C(n,r,n)$ on déduit facilement $xy = z$. La courbe $C(n,r,n)$ se trouve donc sur un paraboloïde hyperbolique $P^2$. Chaque trisécante de la courbe $C(n,r,n)$ rencontrant le paraboloïde $P^2$ en 3 points, chaque trisécante est une génératrice du paraboloïde $P^2$. Les trisécantes de la courbe $C(n,r,m)$ ne formant pas une développable $D$, parmi les $N$ courbes nodales gauches $\xi_i$ il n'existe pas 3 qui coïncident et forment une courbe triple. Les $N$ courbes $\xi_i$ sont donc des courbes distinctes. Des $2N$ racines $v_1$ de l'équation $B$ (§ 22) il y a au plus 2 qui sont réelles et négatives (§ 27),

des $N$ courbes $\xi_i$ il y a donc au plus une qui est l'intersection de 2 nappes réelles.

Chaque plan $V$ passant par la génératrice $g_1$ ($y=0$, $z=0$) rencontre la courbe $C(n,r,n)$ en $2n+r$ points, dont $n+r$ se trouvent sur la génératrice $g_1$ (§ 3). Le plan $V$ coupe le paraboloïde $xy=z$ suivant la droite $g_1$ et suivant une seconde génératrice $g$. Les points de rencontre du plan $V$ avec la courbe $C(n,r,n)$ doivent se trouver sur les 2 droites $g_1$ et $g$. Des $2n+r$ points de rencontre il y a $n+r$ qui se trouvent sur la droite $g_1$, donc il reste encore $n$ qui se trouvent sur la droite $g$. La droite $g$ est parallèle au plan $x=0$, si donc on coupe la courbe $C(n,r,n)$ par un plan $x=p$, ce plan rencontre la courbe $C(n,r,n)$ au point $M_2$ $(n+r)$ fois et encore en $n$ points qui sont en ligne droite.

En coupant la courbe $C(n,r,n)$ et le paraboloïde par un plan quelconque passant par la génératrice $g$, on démontre facilement que les génératrices de l'autre système que $g$ rencontrent la courbe $C(n,r,n)$ en $n+r$ points.

§ 32. *Cas que* $n=m$ et $r=1$.

Spécialisons encore un peu le cas du § 31 et supposons $n=m$, $r=1$. Les expressions des coordonnées d'un point de la courbe $C(n,1,n)$ sont

$$x=t^n,\ y=t^{n+1},\ z=t^{2n+1}.$$

On aura encore $q_1=q_2=q_3=q_4=1$, donc $N=n-1$. La courbe nodale $\xi$ consiste donc en $n-1$ courbes $\xi_i$ distinctes et de même espèce que la courbe $C(n,1,n)$.

En remplaçant, dans les résultats du § 31, $r$ par 1 on trouve facilement,

$$M_1=M_2=(n-1)\beta+(n-1)\alpha+\{(n-1)(n-2):2\}H+ \\ +\{(n-1)(n-2):2\}G.$$

Les points $M_1$ et $M_2$ comptent chacun pour $(n-1)(2n+1)$ intersections de l'arête de rebroussement $C(n,1,n)$ et pour $(n-1)^2$ $(2n+1)$ intersections de la courbe nodale $\xi$ avec la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$.

Les singularités de la courbe $C(n,1,n)$ sont:

$$\nu = \mu = 2n + 1, \qquad h = g = n^2,$$
$$\varrho = 2(n+1), \qquad \eta = \xi = (n-1)(2n+1),$$
$$\beta = \alpha = 2(n-1), \qquad R = 2(n^2-1),$$
$$H = G = (n-1)(n-2), \qquad p = \lambda = \lambda' = \tau = \tau' = 0.$$
$$\omega = \omega' = \theta = 0,$$

§ 33. *Cas que* $n = m = 1$.

Considérons le cas spécial que les coordonnées d'un point de la courbe $C(1, r, 1)$ sont données par les expressions:

$$x = t, \; y = t^{r+1}, \; z = t^{r+2}.$$

Le point $M_1$ $(1, r, 1)$ est un point ordinaire et le plan osculateur est un plan ordinaire, tandis que la tangente au point $M_1$ est une tangente singulière. On trouve de nouveau $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1$; $N = r - 1$. La courbe nodale consiste en $(r-1)$ courbes de même espèce que la courbe $C(1, r, 1)$; ces $r-1$ courbes sont des courbes distinctes (§ 31).

Aux points $M_1$ et $M_2$ se sont réunies les singularités suivantes:

$$M_1 = M_2 = (r-1)\,\theta + \{(r-1)(r-2):2\}\,\omega + \{(r-1)(r-2):2\}\,\omega'.$$

Les points $M_1$ et $M_2$ comptent chacun pour $(r-1)(r+2)$ intersections de l'arête de rebroussement $C(1, r, 1)$ et pour $(r-1)^2(r+2)$ intersections de la courbe nodale $\xi$ avec la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$.

Les singularités de la courbe $C(1, r, 1)$ sont:

$$\mu = \nu = r + 2, \qquad \beta = \alpha = 0,$$
$$\varrho = 2(r+1), \qquad \theta = 2(r-1),$$
$$H = G = 0, \qquad \omega = \omega' = (r-1)(r-2),$$
$$h = g = r(r+1):2, \qquad \xi = \eta = (r-1)(r+2),$$
$$p = \lambda = \lambda' = \tau' = \tau = 0, \qquad R = 2(r^2-1).$$

Chaque plan passant par la droite $g_1$, tangente à la courbe $C(1, r, 1)$ au point $M_1$, rencontre la courbe encore une seule fois en dehors du point singulier $M_1$. De même pour les plans passant par la seconde tangente singulière $g_2$. Les 2 faisceaux de plans, dont les tangentes singulières $g_1$ et $g_2$ sont les axes, sont projectifs, 2 plans correspondants passant par le même point de la courbe $C(1, r, 1)$. Les droites d'intersection des plans correspodants sont

les génératrices d'une surface quadratique. Chaque génératrice de ce système rencontre la courbe $C(1, r, 1)$ une seule fois. Les génératrices du second système ont donc chacune $(r + 1)$ points de commun avec la courbe $C(1, r, 1)$.

§ 34. *Cas que $r = m = 1$, $n$ est un nombre impair.*

Considérons la courbe $C(n, 1, 1)$ dont les expressions donnant les coordonnées d'un de ses points sont

$$x = t^n, \; y = t^{n+1}, \; z = t^{n+2}.$$

Quand $n$ est un nombre impair, la courbe $C(n, 1, 1)$ appartient aux courbes traitées au § 30 pour lesquelles on a $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1$. Les résultats obtenus pour le point singulier $M_1(n, 1, 1)$ situé sur la courbe spéciale $C(n, 1, 1)$ sont donc applicables à un point singulier $(n, 1, 1)$ d'une courbe quelconque. Le point $M_1(n, 1, 1)$ est un point singulier tandis que la tangente au point $M_1$ est une tangente ordinaire et le plan osculateur au point $M_1$ est un plan osculateur ordinaire.

Le plan $M_2$ est un point ordinaire, la tangente au point $M_2$ est une tangente ordinaire, tandis que le plan osculateur au point $M_2$ est un plan osculateur singulier.

Aux points $M_1$ et $M_2$ se sont réunies les singularités suivantes:

$$M_1 = (n-1)\beta + \{(n-1)(n-2):2\} H,$$
$$M_2 = (n-1)\alpha + \{(n-1)(n-2):2\} G.$$

Les sections planes $S$ sont des courbes simples et la courbe nodale consiste en $N = (n-1):2$ courbes $\xi_i$ de même espèce que la courbe $C(n, 1, 1)$.

Par le point $M_1$ il passe $n(n-1):2$ branches de la courbe nodale. Par le point $M_2$ il passe $(n-1):2$ branches de la courbe nodale.

Le point $M_1$ compte pour $(n-1)(n+2)$ intersections de l'arête de rebroussement et pour $(n-1)^2(n+2):2$ intersections de la courbe nodale avec la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$.

Le point $M_2$ ne se trouve pas sur la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$.

Les singularités de la courbe $C(n, 1, 1)$ sont:

$$\begin{aligned} &\nu = \mu = n + 2, && \beta = \alpha = n - 1, \\ &\varrho = n + 3, && \omega = \omega' = \theta = 0, \\ &H = G = (n-1)(n-2):2, && \xi = \eta = (n-1)(n+2):2, \\ &h = g = n, && R = (n-1)(n+3):2, \\ &p = \lambda = \lambda' = \tau = \tau' = 0. \end{aligned}$$

Des expressions pour les coordonnées d'un point de la courbe $C(n, 1, 1)$ on déduit $y^2 = xz$, la courbe $C(n, 1, 1)$ se trouve donc sur un cône quadratique $K^2$. Par conséquent, la courbe $C(n, 1, 1)$ ne possède pas de trisécantes, chaque droite rencontrant la courbe $C(n, 1, 1)$ en 3 points devant être une génératrice du cône quadratique, et chaque génératrice du cône $K^2$ rencontrant la courbe $C(n, 1, 1)$ au point $M_1$ et en un seul autre point. Les $(n-1):2$ courbes nodales sont donc des courbes distinctes (§ 26).

Les nombres $n$, $r$ et $m$ étant tous les 3 impairs le nombre des racines réelles négatives est nulle (§ 27). Aucune des $(n-1):2$ courbes nodales est l'intersection de 2 nappes réelles.

§ 35. *Cas que $r = m = 1$, $n$ est un nombre pair.*

Considérons le cas que les coordonnées d'un point de la courbe sont comme au § 34

$$x = t^n,\ y = t^{n+1},\ z = t^{n+2},$$

mais supposons maintenant que $n$ soit un nombre pair. On aura $q_1 = q_2 = q_3 = 1$, mais $q_4 = 2$, les résultats trouvés pour un cycle $(n, 1, 1)$ moyennant la courbe spéciale $C(n, 1, 1)$ ne sont plus nécessairement vrais pour un cycle $(n, 1, 1)$ d'une courbe quelconque (§ 30). Pourtant les résultats obtenus pour un cycle appartenant à une courbe $C(n, 1, 1)$ peuvent être encore applicables à un cycle d'une courbe plus générale. Par exemple, quand $n = 2$ on retrouve pour le point stationnaire $\beta$ de la courbe $C(2, 1, 1)$ les résultats obtenus par Cremona pour un point stationnaire ordinaire d'une courbe quelconque (§ 36 I).

On trouve $N = (n-2):2$. La courbe nodale se décompose donc en une courbe nodale plane $S_y$ (§ 12) du degré $(n+2):2$ et en $(n-2):2$ courbes gauches $\xi_i$, de même espèce que la courbe $C(n, 1, 1)$. Par le point singulier $M_1$ il passe donc $n(n-2):2$ branches nodales tangentes à la courbe $C(n, 1, 1)$ au point $M_1$ et y ayant même plan osculateur. En outre il passe par le point $M_1$ encore $n:2$ branches tangentes au point $M_1$ à la courbe $C(n, 1, 1)$ mais ayant un autre plan osculateur que la courbe $C(n, 1, 1)$. Par le point $M_2$ il passe $(n-2):2$ branches nodales qui y sont tangentes à la courbe $C(n, 1, 1)$ et y possèdent le même plan osculateur. En outre il passe par le point $M_2$ une branche nodale non tangente à la courbe $C(n, 1, 1)$ mais dont la tangente se trouve dans le plan osculateur de l'arête de rebroussement $C(n, 1, 1)$, tandis que les plans osculateurs des courbes

$C(n, 1, 1)$ et $S_y$ (la courbe nodale) au point $M_2$ sont différents.

Les points $M_1$ et $M_2$ sont équivalents aux singularités ordinaires suivantes:

$$M_1 = (n-1)\beta + \{(n-1)(n-2):2\} H,$$
$$M_2 = (n-1)\alpha + \{(n-1)(n-2):2\} G.$$

Le point $M_1$ compte pour $(n-1)(n+2)$ intersections de l'arête de rebroussement et pour

$$\frac{(n-1)(n-2)(n+2)}{2} + \frac{(n-1)(n+2)}{2} = \frac{(n-1)^2(n+2)}{2}$$

intersections de la courbe nodale $\xi' + S_y$ avec la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$ (§§ 20, 25). Le point $M_2$ ne se trouve pas sur la surface $\Delta^2 D$.

Les singularités de la courbe $C(n, 1, 1)$ sont:

$$\nu = \mu = n+2, \qquad \beta = \alpha = n-1,$$
$$\varrho = n+3, \qquad \omega = \omega' = \theta = 0,$$
$$H = G = (n-1)(n-2):2, \qquad \xi = \eta = (n-1)(n+2):2,$$
$$h = g = n, \qquad R = \frac{(n-2)(n+3)}{2} + \frac{n+2}{2},$$
$$p = \lambda = \lambda' = \tau = \tau' = 0.$$

Les $(n-2):2$ courbes nodales gauches $\xi_i$ ne peuvent pas coïncider pour former des courbes triples, puisque la courbe $C(n, 1, 1)$ est située sur le cône quadratique $y^2 = xz$ (§ 26).

L'équation $B$ (§ 22) ne possède pas de racines réelles $v_i$ correspondant à des courbes nodales gauches $\xi_i$, donc aucune des $(n-2):2$ courbes $\xi_i$ est l'intersection de 2 nappes réelles (§ 27).

§ 36. *Application aux quartiques gauches.*

Pour contrôler mes résultats je les appliquerai d'abord aux quartiques gauches, dont les singularités ont été déjà déterminées à plusieurs reprises par des voies différentes.

I Posons $n = 2$, $r = m = 1$. la courbe $C(n, r, m)$ devient la quartique de première espèce $C^4(2, 1, 1)$ déterminée par les équations:

$$x = t^2, \; y = t^3, \; z = t^4.$$

On se trouve dans le cas du § 35 et on a donc: $q_1 = q_2 = q_3 = 1$, $q_4 = 2$, $N = 0$. La courbe nodale se réduit donc à la courbe plane $S_y$. L'équation de la courbe nodale $S_y$ est (§ 12) $3x^2 + z = 0$. Le point $M_1(2, 1, 1)$ est un point stationnaire ordinaire $\beta$. Le

point stationnaire $M_1$ compte pour 4 intersections de l'arête de rebroussement et pour 2 intersections de la courbe nodale $S_y$ avec la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$ (§ 35).

Ce sont les valeurs trouvées par CREMONA [1]) pour un point stationnaire $\beta$ d'une courbe quelconque. Le point $M_2$ (1, 1, 2) est un point de contact d'un plan stationnaire $\alpha$.

En appliquant les formules générales (§ 29) ou les formules du § précédant on trouve les valeurs connues [2]):

$$\nu=\mu=4,\ \varrho=5,\ \beta=\alpha=1,\ H=G=0,\ h=g=2,\ \xi=\eta=2,$$
$$\omega=\omega'=\theta=\lambda=\lambda'=\tau=\tau'=p=0,\ R=2.$$

II Prenons $n=m=1$, $r=2$, la courbe $C(n,r,m)$ est la quartique de seconde espèce $C^4$ (1, 2, 1) déterminée par les équations:

$$x=t,\ y=t^3,\ z=t^4.$$

En appliquant les formules du § 33 on trouve:

$$q_1=q_2=q_3=q_4=1;\ N=1,\ M_1=M_2=\theta,\ \nu=\mu=4,$$
$$\varrho=6,\ H=G=0,\ h=g=3,\ \alpha=\beta=0,\ \theta=2,\ \xi=\eta=4,$$
$$\omega=\omega'=\lambda=\lambda'=\tau=\tau'=p=0,\ R=6.\ ^{3})$$

Les points $M_1$ et $M_2$ comptent chacun pour 4 intersections de l'arête de rebroussement et de la courbe nodale avec la surface $\Delta^2 D$ [4]).

L'équation $B$ (§ 22) est:

$$v^6-9v^4+16v^3-9v^2+1=0,\quad \text{ou bien}$$
$$(v-1)^4(v^2+4v+1)=0.$$

L'équation donnant les racines $v_i$ correspondant aux courbes nodales gauches est donc

$$v^2+4v+1=0$$

d'où $$v_1=-2+\sqrt{3},\ v_2=-2-\sqrt{3}.$$

On a $v_1 v_2=1$ donc les racines $v_1$ et $v_2$ correspondent à une une même courbe nodale gauche $\xi_1$; $v_1$ et $v_2$ sont réelles donc la courbe $\xi_1$ est une courbe nodale réelle qui est l'intersection de 2 nappes réelles.

---

[1]) CREMONA—CURTZE, *Oberflächen*, §§ 103, 107.

[2]) E. PASCAL, *Rep. d. Mat. Sup. II*, p. 363, p. 499—502.

[3]) E. PASCAL, *Rep. d. Mat. Sup. II*, p. 370, 511.

[4]) CREMONA—CURTZE, *Oberflächen*, § 100.

La tangente à la courbe $C^4(1,2,1)$ au point $P(t)$ de paramètre $t$ rencontre sur la courbe $\xi_1$ les tangentes aux points $P_1(t_1)$ et $P_2(t_2)$ dont les paramètres sont

$$t_1 = (-2+\sqrt{3})\,t,\ t_2 = (-2-\sqrt{3})\,t\ (\S\ 24).$$

Les coordonnées du point $Q_1$ de la courbe $\xi_1$, où se rencontrent les tangentes aux points $P(t)$ et $P_1(t_1)$ sont (§ 24 formules $A$):

$$x = \frac{r\,t^n}{n+r}\left|\frac{v_1^{n+r}-1}{v_1^r-1}\right| = \frac{2}{3}\,t \times \frac{v^3-1}{v_1^2-1} = \frac{2\,t}{3} \times \frac{v_1^2+v_1+1}{v_1+1} = \frac{2\,t}{3} \times$$

$$\times \frac{-3\,v_1}{\sqrt{-2\,v_1}} = t\,v_1^{1/2}\sqrt{-2},$$

$$y = \frac{r\,t^{n+r}}{n} \times v_1^r \times \frac{v_1^n-1}{v_1^r-1} = 2\,t^3\,v_1^2 \times \frac{v_1-1}{v_1^2-1} = \frac{2\,t^3\,v_1^2}{\sqrt{-2\,v_1}} = -t^3\,v_1^{3/2}\sqrt{-2},$$

$$z = \frac{m\,t^{n+r+m}}{n+r} \times v_1^m \times \frac{v_1^{n+r}-1}{v_1^m-1} = \frac{t^4}{3} \times v_1 \times \frac{v_1^3-1}{v_1-1} = \frac{t^4\,v_1}{3}\,(v_1^2+v_1+1) =$$

$$\frac{t^4\,v_1}{3} \times -3\,v_1 = -t^4\,v_1^2.$$

Posons $t' = t\sqrt{-2v}$, les coordonnées du point $Q_1$ de la courbe nodale $\xi_1$ sont:

$$x = t',\ y = t'^3 : 2,\ z = -t'^4 : 4.$$

La courbe nodale est une courbe de même espèce que la courbe $C^4(1,2,1)$ (§§ 2, 24). La courbe nodale et l'arête de rebroussement $C^4(1,2,1)$ se trouvent de part et d'autre du plan $z=0$.

Sur la développable engendrée par les tangentes à la courbe nodale $\xi_1$ se trouve une courbe nodale $\xi_2$, laquelle est une courbe de même espèce que la courbe $C^4(1,2,1)$. Sur la développable engendrée par les tangentes à la courbe $\xi_2$ se trouve de nouveau une courbe nodale $\xi_3$, qui est une courbe de même espèce que la courbe $C^4(1,2,1)$. En continuant de la sorte on forme un système de courbes $C^4(1,2,1)$ dont chacune est la courbe nodale de la développable engendrée par les tangentes à la courbe précédante. Les coordonnées d'un point de la courbe $\xi_p$ de cette série (suite intérative [1])) seront:

$$x = t,\ y = t^3 : 2^p,\ z = t^4 : (-4)^p.$$

---

[1]) J. Neuberg, Sur les lieux discontinus; *Ann. d. l. Soc. Scient. de Bruxelles.* T. XXX, 2e Partie, 1906.

En éliminant $p$ et $t$ on obtient l'équation d'une surface sur laquelle se trouvent toutes les courbes $\xi_p$. Cette surface est:

$$(y^2 + x^2 z)\,(y^2 - x^2 z) = 0.$$

Les quartiques $\xi_p$, pour lesquelles $p$ est un nombre pair, se trouvent sur la réglée cubique $y^2 - x^2 z = 0$.

Les quartiques $\xi_p$, pour lesquelles $p$ est un nombre impair, se trouvent sur la réglée cubique $y^2 + x^2 z = 0$.

La courbe primitive $C^4\,(1, 2, 1)$ est l'intersection partielle des 2 surfaces $xy = z$ et $y^2 = x^2 z$.

§ 37. *Application à la courbe* $C^5\,(3, 1, 1)$.

Prenons $n = 3$, $r = m = 1$, la courbe $C(n, m, r)$ sera la courbe $C^5\,(3, 1, 1)$

$$x = t^3,\ y = t^4,\ z = t^5.$$

On aura $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1$ et on peut appliquer les formules du § 34. On trouve $N = 1$, $M_1 = 2\beta + H$, $M_2 = 2\alpha + G$. Le point $M_1$ compte pour 10 intersections de l'arête de rebroussement et de la courbe nodale avec la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$. Par le point $M_1$ il passe 3 branches de la courbe nodale; ces 3 branches forment un cycle $(3, 1, 1)$, elles sont tangentes au point $M_1$ à l'arête de rebroussement $C^5\,(3, 1, 1)$ et y possèdent le même plan osculateur. Le point $M_2$ ne se trouve pas sur la surface $\Delta^2 D$. Par le point $M_2$ il passe une branche de la courbe nodale, qui y est tangente à l'arête de rebroussement $C^5\,(3, 1, 1)$ et y possède le même plan osculateur singulier.

Les singularités de la courbe $C^5\,(3, 1, 1)$, et aussi celles de la courbe nodale, sont:

$\nu = \mu = 5$, $\varrho = 6$, $\alpha = \beta = 2$, $H = G = 1$, $h = g = 3$, $\xi = \eta = 5$, $\theta = \omega = \omega' = 0$, $p = \lambda = \lambda' = \tau = \tau' = 0$, $R = 6$ [1]).

L'équation $B$ du § 22 est:

$$3v^6 - 8v^5 + 5v^4 + 5v^2 - 8v + 3 = 0,$$

ou bien, $$(v - 1)^4\,(3v^2 + 4v + 3) = 0.$$

L'équation donnant les racines $v_1$, correspondant aux courbes nodales gauches est donc

---

[1]) E. Pascal. *Rep. d. Mat. Sup.* II, p. 511.

$$3v^2 + 4v + 3 = 0,$$

d'où $v_1 = (-2 + \sqrt{-5}) : 3$, $v_2 = (-2 - \sqrt{-5}) : 3$.

La génératrice $t$ tangente à la courbe $C^5$ (3, 1, 1) au point $P(t)$ de paramètre $t$ rencontre aux points $Q_1$ et $Q_2$ les génératrices $t_1$ et $t_2$ tangentes à la courbe $C^5$ (3, 1, 1) aux points $P_1(v_1 t)$, $P_2(v_2 t)$ dont les paramètres sont

$$t_1 = t(-2 + \sqrt{-5}) : 3 \text{ et } t_2 = t(-2 - \sqrt{-5}) : 3.$$

Les paramètres $t_1$ et $t_2$ étant imaginaires, les points $P_1$ et $P_2$ et les tangentes en ces points sont également imaginaires. Le rapport $t_1 : t_2 = (-1 - 4\sqrt{-5}) : 9$ n'étant pas une racine de l'équation $B$ (§ 22), les deux génératrices $t_1$ et $t_2$ ne se rencontrent pas, donc les génératrices $t_1$ et $t_2$ ne sont pas des droites ponctuées (§ 27).

Les points $Q_1$ et $Q_2$ sont donc des points imaginaires et la partie de la courbe nodale qui se trouve sur la nappe réelle de la développable $D$ est donc imaginaire. Le module de $v_1$ étant l'unité la courbe nodale est d'après § 28 une courbe isolée, c'est ce que nous allons vérifier en déterminant les coordonnées du point $Q_1$ de la courbe nodale. Ces coordonnées sont, d'après les formules $A$ du § 24,

$$x = \frac{rt^n}{n+r} \times \frac{v_1^{n+r} - 1}{v_1^r - 1} = \frac{t^3}{4} \times \frac{v_1^4 - 1}{v_1 - 1} = \frac{t^3}{4}(v_1^2 + 1)(v_1 + 1) =$$

$$= \frac{t^3}{4} \times \frac{-4v_1}{3} \times \frac{\sqrt{6}v_1}{3} = -t^3 \left\{\sqrt{\frac{v_1}{3}}\right\}^3 \sqrt{2},$$

$$y = \frac{rt^{n+r}}{n} \times \frac{v_1^n - 1}{v_1^r - 1} v_1^r = \frac{t^4}{3} \frac{v_1^3 - 1}{v_1 - 1} \times v_1 = \frac{t^4}{3}(v_1^2 + v_1 + 1)v_1 = \frac{t^4}{3} \times \frac{-v_1^2}{3} =$$

$$= -t^4 \left\{\sqrt{\frac{v_1}{3}}\right\}^4,$$

$$z = \frac{mt^{n+r+m}}{n+r} \times \frac{v_1^{n+r} - 1}{v_1^m - 1} v_1^m = \frac{t^5}{4} \times \frac{v_1^4 - 1}{v_1 - 1} = \frac{t^5}{4}(v_1^2 + 1)(v_1 + 1)v_1 =$$

$$= \frac{t^5}{4} \times \frac{-4v_1^2}{3} \times \frac{\sqrt{6}v_1}{3} = -t^5 \left\{\sqrt{\frac{v_1}{3}}\right\}^5 3\sqrt{2}.$$

En remplaçant $-t\sqrt{\frac{v_1}{3}}$ par $t$ les expressions pour les coordonnées d'un point de la courbe nodale $\xi_1^5$ deviennent

$$x = t^3\sqrt{2},\ y = -t^4,\ z = t^5 3\sqrt{2}.$$

La courbe nodale $\xi_1$ est donc une courbe réelle. Elle ne se trouve pas sur la nappe réelle de la développable $D$, par conséquent, la courbe nodale $\xi_1$ est une courbe isolée.

Les tangentes à la courbe $\xi_1$ engendrent une développable $D_1$ sur la quelle se trouve une courbe nodale $\xi_2$, qui est une courbe de même espèce que les courbes $C^5(3,1,1)$ et $\xi_1$. En continuant de la sorte on détermine une série de courbes du degré cinq et de même espèce que la courbe $C^5(3,1,1)$. Chaque courbe de cette série est la nodale sur la développable dont la précédante est l'arête de rebroussement. Les coordonnées d'un point d'une quelconque $\xi_p$ de ces courbes sont:

$$x = t^3 (\sqrt{2})^p, \; y = t^4 (-1)^p, \; z = t^5 (3\sqrt{2})^p.$$

La courbe $C^5(3,1,1)$ est l'intersection partielle des 2 surfaces $y^2 = xz$ et $yx^2 = z^2$. Les génératrices du cône $y^2 = xz$ sont des quadrisécantes de la courbe $C^5(3,1,1)$, 3 des points de rencontre coïncidant avec le point $M_1(3,1,1)$.

En déterminant le rang $R$ de la courbe nodale $\xi_1$ on trouve, en appliquant une des formules ordinaires suivantes

$$R = \varrho\mu + 6\varrho - 3\nu - 9\mu - 3\theta - 2G \text{ [1]},$$
$$R = \varrho(\mu - 3) - 3\alpha - 2G \text{ [2]},$$

pour $R$ la valeur 4, résultat qui est évidemment faux. Le désacord est dû à l'introduction de la singularité $G$ pour chaque noeud ordinaire $k$ de la courbe nodale. Quand la développable $D$ ne présente aucune singularité supérieure, chaque plan double $G$ donne en effet un noeud $k$ sur la courbe nodale et réciproquement. Le plan osculateur singulier au point $M_2$ est pour notre courbe $C^5(3,1,1)$ un plan double $G$ tandis que le point $M_2$ n'est pas un noeud $k$ de la courbe nodale.

## § 38. *Application à la courbe* $C^5(2,1,2)$.

Posons $n = m = 2$, $r = 1$ la courbe $C(n,r,m)$ devient la courbe $C^5(2,1,2)$. Les coordonnées d'un point de cette courbe sont:

$$x = t^2, \; y = t^3, \; z = t^5.$$

[1]) E. Pascal. *Rep. d. Mat. Sup.* II, p. 322.

[2]) Cremona—Curtze. *Oberflächen*, § 112.

On aura $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1$ et en appliquant les formules du § 32 on trouve: $N = 1$, $M_1 = M_2 = \alpha + \beta$. Les points singuliers $M_1$ (2, 1, 2) et $M_2$ (2, 1, 2) comptent chacun pour 5 intersections de l'arête de rebroussement et de la courbe nodale avec la surface $\Delta^2 D$. Par chacun des points $M_1$ et $M_2$ il passe 2 branches de la courbe nodale $\xi_1$. Ces 2 branches nodales forment un cycle (2, 1, 2), elles sont tangentes à la courbe $C^5$ (2, 1, 2), et ont le même plan osculateur.

Les singularités de la courbe $C^5$ (2, 1, 2) et également celles de la courbe nodale $\xi_1$ sont:

$\nu = \mu = 5$, $\varrho = 6$, $\alpha = \beta = 2$, $H = G = 0$, $h = g = 4$, $\xi = \eta = 5$, $\theta = \omega = \omega' = 0$, $\lambda = \lambda' = \tau = \tau' = p = 0$, $R = 6$ [1]).

L'équation $B$ du § 22 est:

$$4v^6 - 9v^5 + 10v^3 - 9v + 4 = 0\,,$$

ou bien $(v-1)^4 (4v^2 + 7v + 4) = 0$.

L'équation donnant les valeurs du rapport $v_1$, correspondant aux branches nodales gauches, est donc:

$$4v^2 + 7v + 4 = 0,$$

d'où $v_1 = \dfrac{-7 + \sqrt{-15}}{8}$ et $v_2 = \dfrac{-7 - \sqrt{-15}}{8}$.

La tangente au point $P(t)$ de paramètre $t$ rencontre donc les tangentes à la courbe $C^5$ (2, 1, 2) aux points $P_1(t_1)$ et $P_2(t_2)$ de paramètre $t_1$ et $t_2$ où $t_1 = v_1 t$ et $t_2 = v_2 t$. Les rapports $v_1$ et $v_2$ étant imaginaires les tangentes $t_1$ et $t_2$ sont également imaginaires. On vérifie facilement que les 2 droites $t_1$ et $t_2$ ne se rencontrent pas, ces droites ne sont donc pas des droites ponctuées. Les points de rencontre des tangentes $t_1$ et $t_2$ avec la tangente $t$ sont donc des points imaginaires. La courbe $\xi_1$ correspondant aux racines $v_1$ et $v_2$ de l'équation $B$ est une courbe isolée réelle puisque les 2 tangentes aux points de paramètre $tv_1^{1/2}$ et $tv_1^{-\frac{1}{2}}$ sont deux droites imaginaires conjuguées, qui se rencontrent en un point de la courbe $\xi_1$, le rapport $tv_1^{1/2} : tv_1^{-\frac{1}{2}}$ étant $v_1$ et quand 2 droites

[1]) E. Pascal. *Rep. d. Mat. Sup.* II, p. 511.

imaginaires conjuguées se rencontrent ces 2 droites sont nécessairement des droites ponctuées dont le point de rencontre est toujours un point réel. La courbe $\xi_1$ est donc une courbe réelle mais les nappes passant par la partie réelle sont imaginaires.

En appliquant les formules $A$ du § 24 on trouve que les coordonnées d'un point $Q_1$ de la courbe nodale $\xi_1$ sont:

$$x=\frac{rt^n}{n+r}\times\frac{v_1^{n+r}-1}{v_1^r-1}=\frac{t^2}{3}\times\frac{v_1^3-1}{v_1-1}=\frac{t^2}{3}(v_1^2+v_1+1)=\frac{t^2}{3}\times\frac{-3v_1}{4}=\frac{-t^2v_1}{4},$$

$$y=\frac{rt^{n+r}}{n}\times v_1^r\times\frac{v_1^n-1}{v_1^r-1}=\frac{t^3}{2}\times\frac{v_1^2-1}{v_1-1}\times v_1=\frac{t^3}{2}(v_1+1)v_1=\frac{t^3v_1^{3/2}}{4},$$

$$z=\frac{mt^{n+r+m}}{n+r}\times\frac{v_1^{n+r}-1}{v_1^m-1}\times v_1^m=\frac{2t^5}{3}\times\frac{v_1^3-1}{v_1^2-1}\times v_1^2=\frac{2t^5}{3}\times\frac{(v_1^2+v_1+1)v_1^2}{v_1+1}=-t^5v_1^{5/2}.$$

En remplaçant $tv_1^{1/2}$ par $t$ les coordonnées du point $Q_1$ de la courbe nodale $\xi_1$ sont

$$x=\frac{-t^2}{4},\ y=\frac{t^3}{4},\ z=-t^5.$$

Les tangentes à la courbe nodales $\xi_1$ engendrent une surface développable $D_1$ sur laquelle se trouve une courbe nodale $\xi_2$ de même espèce que la courbe $C^5\,(2,1,1)$. En continuant de la sorte on peut former une série de courbes de même espèce que la courbe $C^5\,(2,1,2)$, chaque courbe de la série étant la courbe nodale sur la développable engendrée par les tangentes à la courbe précédante. Les équations donnant la courbe $\xi_p$ de cette série sont:

$$x=t^2\left(\frac{-1}{4}\right)^p,\ y=t^3\left(\frac{1}{4}\right)^p,\ z=t^5\,(-1)^p.$$

En éliminant $t$ et $p$ on trouve facilement que les courbes $\xi_p$ se trouvent sur la surface $x^5z=y^5$.

La courbe $C^5\,(2,1,2)$ est l'intersection partielles des 2 surfaces $xy=z$ et $y^3=x^2z$.

§ 39. *Application à la courbe* $C^5\,(2,2,1)$.

Posons $n=r=2$, $m=1$, la courbe $C\,(n,r,m)$ devient la courbe $C^5\,(2,2,1)$ donnée par les équations:

$$x=t^2,\ y=t^4,\ z=t^5.$$

On aura $q_1 = 2$, $q_2 = q_3 = q_4 = 1$; en appliquant les formules du § 29 on obtient: $N = 1$, $M_1 = \beta + H + \theta + \omega$, $M_2 = \alpha + G + \theta + \omega'$. *La tangente à la courbe $C^5$ (2, 2, 1) au point singulier $M_1$ est donc une tangente singulière double sans être une génératrice double $\omega'$ de la développable $D$, tandis que la tangente au point singulier $M_2$ (1, 2, 2) est une génératrice double sans être une tangente double $\omega$* (§ 10).

La courbe nodale $\xi$ se décompose en une courbe gauche $\xi_1$ de même espèce que la courbe $C^5$ (2, 2, 1) et en une courbe plane $S_z$ située dans le plan $z = 0$. L'équation de la courbe nodale plane $S_z$ est $5\,x^2 = 9y$ (§ 12).

Par le point $M_1$ il passe 3 branches de courbes nodales, dont 2 forment un cycle (2, 2, 1). Les 3 branches sont tangentes au point $M_1$ à la courbe $C^5$ (2, 2, 1) et y ont le même plan osculateur que cette arête de rebroussement.

Par le point $M_2$ (1, 2, 2) il passe une branche d'une courbe nodale, y présentant la même singularité que la courbe $C^5$ (2, 2, 1), cette branche est au point $M_2$ tangente à l'arête de rebroussement $C^5$ (2, 2, 1) et y possède le même plan osculateur.

Le point $M_1$ compte pour 10 intersections de l'arête de rebroussement et de la courbe nodale gauche avec la surface $\Delta^2 D$. Le point $M_1$ compte pour 5 intersections de la nodale plane $S_z$ avec la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$ (§§ 11, 21, 25).

Les singularités de la courbe $C^5$ (2, 2, 1) et de la courbe nodale gauche $\xi_1$ sont:

$$\nu = \mu = 5,\ \varrho = 7,\ \beta = \alpha = 1,\ H = G = 1,\ h = g = 4,\ \xi = \eta = 7$$
$$\theta = 2,\ \omega = \omega' = 1,\ \lambda = \lambda' = \tau = \tau' = p = 0,\ R = 9.$$

L'équation donnant les rapports $v_1$, correspondant aux courbes nodales gauches (§ 22, $B$), est:

$$2v^7 - 12v^5 + 10v^4 + 10v^3 - 12v^2 + 2 = 0$$

ou bien $$(v-1)^3\,(v^2-1)\,(v^2+3v+1) = 0$$

La racine différente de l'unité qui annule le facteur $v^2 - 1$ correspond à la courbe nodale plane $S_z$ (§ 23) Les racines de l'équation $v^2 + 3v + 1 = 0$ correspondent aux branches de la courbe nodale gauche (§ 24).

Ces racines sont $v_1 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $v_2 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$; ces racines

étant réelles la courbe nodale gauche $\xi_1$ est comme la courbe $S_z$ une courbe réelle où passent 2 nappes réelles. Les coordonnées d'un point $Q$ de la courbe $\xi_1$ sont (§ 24. formules $A$)

$$x=\frac{r\,t^n}{n+r}\times\frac{v_1^{n+r}-1}{v_1^r-1}=\frac{2\,t^2}{4}\times\frac{v_1^4-1}{v_4^2-1}=\frac{2\,t^2}{4}(v_1^2+1)=-\frac{3\,t^2\,v_1}{2},$$

$$y=\frac{r\,t^{n+r}}{n}\times\frac{v_1^n-1}{v_1^r-1}\times v_1^r=\frac{2\,t^4}{2}\times\frac{v_1^2-1}{v_1^2-1}\times v_1^2=t^4\,v_1^2,$$

$$z=\frac{m\,t^{n+r+m}}{n+r}\times\frac{v_1^{n+r}-1}{v_1^m-1}\times v_1^m=\frac{t^5}{4}\times\frac{v_1^4-1}{v_1-1}\times v_1=\frac{t^5}{4}v_1\,(v_1^2+1)(v_1+1)=$$

$$=\frac{t^4}{4}\times-3\,v_1\times v_1\times i\,v^{1/2}=-\frac{3\,t^5}{4}v_1^{5/2}\,i$$

En remplaçant $-\,t\,i\,v^{1/2}$ par $t$ ces expressions deviennent:

$$x=\frac{3\,t^2}{2},\ y=t^4,\ z=\frac{3\,t^5}{4}.$$

La courbe $C^5\,(2,2,1)$ est l'intersection partielle des 2 surfaces réglées $z^2=xy^2$ et $y=x^2$.

La développable du degré 7 dont la courbe $C^5\,(2,2,1)$ est l'arête de rebroussement n'est pas donnée par SCHWARZ [1]) dans son énumération des développables du degré 7. Cette énumération des développables $D^7$ possibles est reproduite par E. PASCAL [2]). Problablement la $D^7$ que nous venons de traiter dans ce paragraphe ne figure pas dans l'énumération de M. SCHWARZ parce qu'il n'a pas tenu compte du cas que l'arête de rebroussement présente des tangentes stationaires $\theta$. En effet, quand l'arête de rebroussement possède des tangentes stationnaires $\theta$ on ne peut plus appliquer la règle que le nombre des points stationnaires d'une section par un plan tangent à la développable est le degré de l'arête de rebroussement diminué de 3 [3])

Le résultat tiré par M. SCHWARZ de son énumération que „toutes les développables du degré 7 sont des développables planaires" [4]) reste

---

[1]) SCHWARZ. *Crelle's Journal.* Bd. 64, p. 1.

[2]) E. PASCAL. *Rep, de Mat. Sup.* II, p. 514.

[3]) G. SALMON. *Geometry of 3 Dimensions*, p. 319, § 354.

[4]) G. SALMON, loc. cit. § 353.

vrai, notre développable $D^7$ étant aussi enveloppée par un plan dans l'équation duquel le paramètre entre rationnellement (§ 4).

La développable $D^7$ est l'enveloppe du plan

$$10\,t^3\,x - 15\,t\,y + 8z - 3\,t^5 = 0 \quad (\S\ 4).$$

On en déduit que l'équation de la développable $D^7$ dont $C^5\,(2,2,1)$ est l'arête de rebroussement est:

$$y^3\,(5x^2 - 9y)^2 - 16z^2\,(2x^5 - z^2) - 120xyz^2\,(y - x^2) = 0.$$

La courbe nodale $S_z$ rencontre en son point à l'infini $M_4$ la génératrice $g_2$, tangente à la courbe $C^5\,(2,2,1)$ au point $M_2$. Cette génératrice $g_2$ est une génératrice stationnaire singulière $\theta + \omega'$. Les 2 nappes de la développable $D^7$ tangentes lelong de la génératrice $g_2$ se pénètrent suivant la branche de la courbe $S_z$, qui passe par le point $M_4$. Quand on coupe la développable $D^7$ par un plan quelconque, la courbe de section possède un point de rebroussement de seconde espèce en son point de rencontre avec la génératrice $g_2 = \theta + \omega'$, tandis que le point de rencontre avec une tangente stationnaire ordinaire est un point de rebroussement de première espèce. On pourrait donc donner à la génératrice $g_2 = \theta + \omega'$ le nom de *génératrice stationnaire de seconde espèce.*

Le point $M_1$ est un point stationnaire singulier $\beta + H + \theta + \omega$. La projection du point $M_1$, d'un point quelconque comme centre de projection sur un plan quelconque est un point de rebroussement de seconde espèce, on pourrait donc donner au point $M_1\,(2,2,1)$ le nom de *„point stationnaire de seconde espèce d'une courbe gauche"*.

Considérons une courbe gauche $C^5$ de même degré et rang que la courbe $C^5\,(2,2,1)$ et possédant les mêmes nombres de points et tangentes singuliers, $\beta = 1$, $\theta = 2$, $\omega' = 1$, $H = 1$. Les autres nombres caractéristiques des 2 courbes seront également les mêmes. Cette courbe $C^5$ rencontrerait $5 \times 5$ fois la deuxième surface polaire $\Delta^2 D'$ prise par rapport au point quelconque $P$. D'après Cremona [1]) ces intersections seraient au nombre de $5 \times 2$ aux points de contact des $\mu = 5$ plans osculateurs passant par le point $P$ et au nombre de 4 en chacune des singularités $\beta$, $H$, $\theta$ et $\omega'$. Le nombre total des intersections serait donc $10 + 4 \times 4 = 26$, ce

[1]) Cremona–Curtze, *Oberflächen*, § 104.

qui est impossible. Par conséquent, *il n'existe pas une courbe $C^5$, présentant les mêmes singularités que la courbe $C^5$ (2, 2, 1) mais sur laquelle ces singularités sont séparées.* Quand on transforme la courbe $C^5$ (2, 2, 1) d'une manière continue en une courbe $C^5$ pour laquelle $\mu = 5$, $\varrho = 7$, $p = 0$ et où les singularités $M_1$ et $M_2$ se décomposent en des singularités ordinaires il faut que le noeud effectif $H$ qui se trouve au point $M_1$ se transforme en un noeud apparant $h$. Pour cette courbe $C^5$ on aurait donc $h = 5$, $\lambda = 3$.

§ 40. *Application à la courbe $C^5$ (1, 3, 1).*

Posons $n = m = 1$, $r = 3$, la courbe $C(n, r, m)$ devient la courbe $C^5$ (1, 3, 1) donnée par les équations

$$x = t,\ y = t^4,\ z = t^5.$$

On aura $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1$ et en appliquant les formules du § 33 on trouve: $N = 2$, $M_1 = M_2 = 2\theta + \omega + \omega'$. Par chacun des points $M_1$ et $M_2$ il passe 2 branches de courbes nodales. Chacune de ces 2 branches y présente la singularité (1, 3, 1), y est tangente à l'arête de rebroussement $C^5$ (1, 3, 1) et y possède le même plan osculateur que l'arête de rebroussement.

Chacun des points $M_1$ et $M_2$ compte pour 10 intersections de l'arête de rebroussement et pour 20 intersections des branches nodales avec la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$.

Les singularités de la courbe $C^5$ et également celles de chacune des 2 courbes nodales sont:

$$\nu = \mu = 5,\ \varrho = 8,\ \alpha = \beta = 0,\ H = G = 0,\ h = g = 6,\ \xi = \eta = 10,$$
$$\theta = 4,\ \omega = \omega' = 2,\ \lambda = \lambda' = \tau = \tau' = p = 0,\ R = 16.$$

L'équation $B$ (§ 22) est

$$v^8 - 16v^5 + 30v^4 - 16v^3 + 1 = 0,$$
$$(v-1)^4 (v^4 + 4v^3 + 10v^2 + 4v + 1) = 0.$$

L'équation donnant les racines $v_1$, correspondant aux nodales gauches est donc:

$$v^4 + 4v^3 + 10v^2 + 4v + 1 = 0,$$
$$\{v^2 + 2(1-i)v + 1\}\ \{v^2 + 2(1+i)v + 1\} = 0.$$

Soient $v_1$ et $v_2$ les racines de l'équation

$$v^2 + 2(1-i)v + 1 = 0,$$

et soient $v_3$ et $v_4$ les racines de l'équation

$$v^2 + 2(1+i)v + 1 = 0.$$

La tangente à la courbe $C^5(1,3,1)$ au point $P(t)$ rencontre les tangentes aux points $P_1(v_1 t)$, $P_2(v_2 t)$ en des points (imaginaires) de la courbe nodale $\xi_1$. La tangente au point $P(t)$ rencontre les tangentes aux points $P_3(v_3 t)$, $P_4(v_4 t)$ en des points de la seconde courbe nodale gauche $\xi_2$. On trouve que le module du rapport $v_1$ est différent de l'unité, la tangente au point de paramètre $t v_1^{1/2}$ n'est donc pas une droite ponctuée (§ 28) et la tangente au point de paramètre $t v_1^{-\frac{1}{2}}$, qu'elle rencontre en un point de la courbe $\xi_1$, n'est pas la droite imaginaire conjuguée. La courbe $\xi_1$ est donc une courbe imaginaire; la courbe $\xi_2$ est la courbe imaginaire conjuguée.

Les expressions pour les coordonnées d'un point quelconque $Q$ de la courbe nodale $\xi_1$ sont (§ 24, formules $A$):

$$x = \frac{r t^n}{n+r} \times \frac{v_1^{n+r} - 1}{v_1^r - 1} = \frac{3t}{4} \times \frac{v_1^4 - 1}{v_1^3 - 1} = \frac{3t}{4} \times \frac{(v_1^2+1)(v_1+1)}{v_1^2 + v_1 + 1} =$$

$$= \frac{3t}{4} \times \frac{2(i-1)v_1 \times v_1^{1/2}\sqrt{2i}}{(2i-1)v_1} = \frac{3 t v^{1/2}}{5}(1+2i),$$

$$y = \frac{r t^{n+r}}{n} \times \frac{v_1^n - 1}{v_1^r - 1} \times v_1^r = \frac{3t^4}{1} \times \frac{(v_1 - 1)v_1^3}{v_1^3 - 1} = \frac{3t^4 v_1^3}{v_1^2 + v_1 + 1} = \frac{3t^4 v_1^3}{(2i-1)v_1} =$$

$$= -\frac{3t^4 v_1^2}{5}(1+2i),$$

$$z = \frac{m t^{n+r+m}}{n+r} \times \frac{v_1^{n+r} - 1}{v_1^m - 1} \times v_1^m = \frac{t^5}{4} \times \frac{v_1^4 - 1}{v_1 - 1} \times v_1 = \frac{t^5}{4}(v_1^2+1)(v_1+1)v_1 =$$

$$= \frac{t^5}{4} 2(i-1) v_1^{3/2}\sqrt{2i} = -t^5 v_1^{5/2}.$$

La courbe $C^5(1,3,1)$ est l'intersection partielle des 2 surfaces $z = xy$ et $y^3 = z^2 x^2$.

La développable $D^8$ engendrée par les tangentes à la courbe $C^5(1,3,1)$ est l'enveloppe du plan

$$5t^4 x - 5ty + 3z - 3t^5 = 0 \text{ (§ 4)}.$$

Il n'existe pas une courbe $C^5$ du rang $\varrho = 8$ possédant les tan-

gentes singulières $\theta$ au nombre de 4 et $\omega'$ au nombre de 2 quand ces tangentes sont des droites distinctes, puisque cette courbe rencontrerait la surface $\Delta^2 D'$, du degré 6, en $5 \times 2 + 6 \times 4 = 34$ points, cequi est impossible (§ 39).

§ 41. *Application à la courbe* $C^6$ (4, 1, 1).

Posons $n = 4$, $r = m = 1$. Les coordonnées d'un point de la courbe $C^6$ (4, 1, 1) sont

$$x = t^4, \; y = t^5, \; z = t^6.$$

En appliquant les formules du § 35 on obtient, $p_1 = p_2 = p_3 = 1$, $p_4 = 2$. La section plane $S_y$ est une courbe nodale dont l'équation est (§ 12): $5x^3 = z^2$.

$$N = 1 \; ; \; M_1 = 3\beta + 3H, \; M_2 = 3\alpha + 3G.$$

Le point $M_1$ compte pour 18 intersections de la courbe $C^6$ (4, 1, 1) et pour 18 + 6 intersections de la courbe nodale avec la surface $\Delta^2 D$.

Par le point $M_1$ il passe 4 branches de la courbe nodale gauche $\xi_1$, formant un cycle (4, 1, 1) et 2 branches de la courbe nodale plane $S_y$, formant un cycle (2, 1). Ces 6 branches sont tangentes à la courbe $C^6$ (4, 1, 1).

Par le point $M_2$ il passe une branche de la courbe $\xi_1$ formant un cycle (1, 1, 4) et une branche de la courbe plane $S_y$ formant un cycle (1, 2).

L'équation $B$ du § 22 est

$$(v - 1)^3 (v^2 - 1)(2v^2 + v + 2) = 0;$$

$v_1 = (-1 + \sqrt{-15}) : 4, \; |v| = 1$, donc la courbe $\xi_1$ est une courbe isolée (§ 28). Les coordonnées d'un point de la courbe $\xi_1$ sont:

$$x = t^4 : 4, \; y = (t^5 \sqrt{6}) : 16, \; z = t^6 : 4.$$

L'équation du plan osculateur de la courbe $C^6$ (4, 1, 1) est (§ 4), $15t^2 x - 24ty + 10z - t^6 = 0$.

Les singularités de la courbe $C^6$ (4, 1, 1) sont:

$$r = \mu = 6, \; \varrho = 7, \; \alpha = \beta = 3, \; H = G = 3, \; h = g = 4, \; \xi = \eta = 9,$$
$$\theta = \omega = \omega' = 0, \; \lambda = \lambda' = \tau = \tau' = p = 0, \; R = 7 + 3 = 10.$$

En appliquant, pour déterminer $R$, la formule de CREMONA [1])

$$R = \varrho(\mu - 3) - 3\alpha - 2G,$$

an celle de PASCAL [2]), on trouve $R = 6$. Le plan osculateur de la courbe $C^6(4, 1, 1)$ au point $M_2$ est équivalent à 3 plans doubles $G$, tandis que le point $M_2$ est un seul noeud $k$ de la courbe nodale. En supposant $G = k = 1$ la formule de CREMONA (et celle de PASCAL) donne notre résultat $R = 10$ (§ 37).

La courbe $C^6(4, 1, 1)$ est l'intersection complète des 2 surfaces $y^2 = xz$, $z^2 = x^3$.

§ 42. *Application à la courbe* $C^6(3, 1, 2)$.

Posons $n = 3$, $r = 1$, $m = 2$. Les coordonnées d'un point de la courbe $C^6(3, 1, 2)$ sont

$$x = t^3, \; y = t^4, \; z = t^6.$$

En appliquant les formules du § 29 on obtient: $q_1 = q_2 = 1$, $q_3 = 2$, $q_4 = 3$, $N = 0$. La courbe nodale se décompose en 2 courbes planes $S_x$ et $S_y$. La section plane $S_y$ est une courbe triple donnée par l'équation (§ 12) $8x^2 + z = 0$, l'équation de courbe double $S_x$ est (§ 12) $27y^3 + z^2 = 0$. $M_1 = 2\beta + H + \alpha$, $M_2 = \beta + G + 2\alpha$. $M_1$ et $M_2$ comptent respectivement pour 12 et 6 intersections de l'arête de rebroussement $C^6(3, 1, 2)$ avec la surface $\Delta^2 D$.

La courbe nodale $S_x$ rencontre la surface $\Delta D$ 6 fois au point $M_1$ et 3 fois au point $M_2$ (§ 20).

Les singularités de la courbe $C^6(3, 1, 2)$ sont:

$$\nu = \mu = 6, \; \varrho = 7, \; \beta = \alpha = 3, \; H = G = 1, \; h = g = 6, \; \xi = \eta = 9,$$
$$\theta = \omega = \omega' = 0, \; \lambda = \lambda' = \tau = \tau' = p = 0, \; R = 9.$$

En appliquant pour déterminer $R$ la formule de CREMONA (§ 41) on trouve $R = 10$, résultat qui est évidemment faux. Le désacord est dû à la présence d'une courbe nodale triple, tandis que CREMONA suppose dans sa démonstration que la courbe nodale $\xi$ est une courbe double.

L'équation du plan osculateur de la courbe $C^6(3, 1, 2)$ est: $8t^3x - 9t^2y + 2z - t^6 = 0$.

---

[1]) CREMONA – CURTZE, *Oberflächen.* § 112.

[2]) E. PASCAL. *Rep. d. Mat. Sup. II*, p. 322.

L'équation $B$ du § 22 est:

$$6v^7 - 12v^6 + 6v^4 + 6v^3 - 12v + 6 = 0.$$

ou bien $$(v-1)^2 (v^2-1)(v^3-1) = 0.$$

§ 43. *Application à la courbe* $C^6(3,2,1)$.

Posons $n=3$, $r=2$, $m=1$, les coordonnées d'un point de la courbe $C^6(3,2,1)$ sont:

$$x = t^3,\ y = t^5,\ z = t^6.$$

En appliquant les formules du § 29 on trouve, en tenant compte de ce qu'on a $q_4 = 3$, $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ (§ 14), $N = 1$, $M_1(3,2,1) = 2\beta + 2H + \theta + \omega$, $M_2 = 2\alpha + 2G + \theta + \omega'$.

Les points $M_1$ et $M_2$ comptent pour 18 et 6 intersections de l'arête de rebroussement $C^6(3,2,1)$ et de la courbe nodale gauche $\xi_1^6(3,2,1)$ avec la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$.

L'équation du plan osculateur de la courbe $C^6(3,2,1)$ est:

$$5t^3 x - 9ty + 5z - t^6 = 0.$$

L'équation $B$ du § 22 est:

$$3v^8 - 15v^6 + 12v^5 + 12v^3 - 15v^2 + 3 = 0,$$
$$(v-1)^3 (v^3-1)(v^2+3v+1) = 0$$

d'où $v_1 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$, la courbe $\xi_1^6(3,2,1)$ est donc une courbe réelle où passent 2 nappes réelles de la développable $D$.

Les coordonnées d'un point de la courbe nodale $\xi_1^6(3,2,1)$ sont (§ 24, formules $A$):

$$x = 2t^3,\ y = \frac{4}{3}t^5,\ z = -t^6.$$

L'équation de la courbe triple $S_y$ est: $5x^2 + 4z = 0$ (§ 12).

Les singularités de la courbe $C^6(3,2,1)$ sont:

$$\nu = \mu = 6,\ \varrho = 8,\ \alpha = \beta = 2,\ H = G = 2,\ h = g = 6,\ \xi = \eta = 12,$$
$$\theta = 2,\ \omega = \omega' = 1,\ p = \lambda = \lambda' = \tau = \tau' = 0,\ R = 14.$$

La courbe $C^6(3,2,1)$ est l'intersection totale des deux cônes $z = x^2$, $y^3 = xz^2$.

§ 44. *Application à la courbe* $C^6$ (2, 3, 1).

Posons $n = 2$, $r = 3$, $m = 1$, les coordonnées d'un point de la courbe $C^6$ (2, 3, 1) sont:

$$x = t^2,\ y = t^5,\ z = t^6.$$

En appliquant les formules du § 29, on trouve, en tenant compte de cequ'on a $q_1 = q_2 = q_3 = 1$, $q_4 = 2$ (§ 14),

$$N = 2,\ M_1 = \beta + H + 2\theta + 2\omega + \omega',\ M_2 = \alpha + G + 2\theta + \omega + 2\omega'.$$

Les points $M_1$ et $M_2$ comptent pour 18 et 12 intersections de l'arête de rebroussement avec la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$.

Les points $M_1$ et $M_2$ comptent pour 36 et 24 intersections des 2 courbes nodales gauches avec la surface $\Delta^2 D$.

L'équation de la courbe nodale plane $S_y$ est $25x^3 + 27z = 0$.

Les points $M_1$ et $M_2$ comptent pour 9 et 6 intersections de la courbe nodale $S_y$ avec la surface $\Delta^2 D$.

L'équation $B$ du § 22 est:

$$v^9 - 10v^6 + 9v^5 + 9v^4 - 10v^3 + 1 = 0,$$
$$(v-1)^3(v^2-1)(v^4 + 3v^3 + 7v^2 + 3v + 1) = 0.$$

Les 4 rapports $v_i$, correspondant aux 2 courbes nodales $\xi_1^6(2, 3, 1)$ et $\xi_2^6(2, 3, 1)$ sont imaginaires et leurs modules sont différents de l'unité. Les 2 courbes nodales gauches sont 2 courbes imaginaires conjuguées.

Les coordonnées d'un point de la courbe $\xi_1^6(2, 3, 1)$ sont:

$$x = \frac{-2t^2 v_1}{5}(2 + \sqrt{-11}),$$
$$y = \frac{3t^5 v_1^{3/4}}{2^{3/4}}(1 - \sqrt{-11})^{3/4},$$
$$z = \frac{t^6 v_1}{5}(-3 + \sqrt{-11}).$$

L'équation du plan osculateur de la courbe $C^6$ (2, 3, 1) est: $5t^4x - 8ty + 5z - 2t^6 = 0$.

Les singularités de la courbe $C^6$ (2, 3, 1) sont:

$$\nu = \mu = 6,\ \varrho = 9,\ \beta = \alpha = 1,\ H = G = 1,\ h = g = 8,\ \xi = \eta = 15,$$
$$\theta = 4,\ \omega = \omega' = 3,\ \lambda = \lambda' = \tau = \tau' = p = 0,\ R = 21.$$

En appliquant la formule pour $R$ donnée par Cremona (§ 41)

on trouve $R = 22$. *La formule de* CREMONA *pour le rang de la courbe nodale n'est donc plus applicable quand l'arête de rebroussement présente des singularités supérieures.*

La courbe $C^6(2, 3, 1)$ est l'intersection partielle des 2 surfaces $z = x^3$ et $y^2 = x^2 z$.

Il n'existe pas une courbe $C^6$ possédant les mêmes singularités que la courbe $C^6(2, 3, 1)$ et où toutes les singularités sont séparées, puisque [1]) cette courbe rencontrerait la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$ prise par rapport à un point $P$, 1° 12 fois en les $\mu = 6$ points de contact de plans osculateurs passant par le point $P$, 2° quatre fois en chacune des singularités, $\beta$, $\alpha$, $\theta$, $\omega'$. La courbe $C^6$ rencontrerait donc la surface $\Delta^2 D$ (du degré 7) en tout $12 + 9 \times 4 = 48$ fois cequi est impossible. La même remarque s'applique aux courbes $C^6(4, 1, 1)$, $C^6(3, 2, 1)$, $C^6(1, 4, 1)$.

§ 45. *Application à la courbe* $C^6(1, 4, 1)$.

Posons $n = m = 1$, $r = 4$, les coordonnées d'un point de la courbe $C^6(1, 4, 1)$ sont:

$$x = t, \; y = t^5, \; z = t^6.$$

En appliquant les formules du § 33, et en tenant compte de cequ'on a $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1$ (§ 14) on trouve:

$$N = 3, \; M_1 = 3\theta + 3\omega + 3\omega' = M_2.$$

Par le point $M_1$ il passe 3 branches de la courbe nodale, chaque branche présente au point $M_1$ la singularité $(1, 4, 1)$, y est tangente à l'arête de rebroussement et y possède le même plan osculateur; de même pour le point $M_2$.

Les points $M_1$ et $M_2$ comptent chacun pour 18 intersections de l'arête de rebroussement et pour 54 intersections de la courbe nodale avec la deuxième surface polaire $\Delta^2 D$.

L'équation $B$ du § 22 est:

$$v^{10} - 25v^6 + 48v^5 - 25v^4 - 1 = 0,$$
$$(v - 1)^4 (v^6 + 4v^5 + 10v^4 + 20v^3 + 10v^2 + 4v + 1) = 0.$$

En posant $v + \frac{1}{v} = w$ le second facteur devient:

---

[1]) CREMONA—CURTZE, *Oberflächen*, § 104.

$$w^3 + 4w^4 + 7w + 12 = 0,$$
$$(w + 3)(w^2 + w + 4) = 0.$$

Des 6 racines $v_1$ correspondant aux courbes nodales gauches 2 sont réelles et les 4 autres sont imaginaires. Les 2 rapports réels sont racines de l'équation $v^2 + 3v + 1 = 0$,

d'où
$$v = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Les coordonnées d'un point de la courbe nodale réelle sont

$$x = \frac{4t}{3},\ y = \frac{4t^5}{3},\ z = -t^6.$$

La courbe nodale réelle est l'intersection de 2 nappes réelles de la développable $D$.

Les courbes nodales gauches sont distinctes puisque la courbe $C^6(1, 4, 1)$ se trouve sur une surface du second degré $z = xy$ (§ 26). Les génératrices de cette surface quadrique du même système que les génératrices $g_1$ ($z = 0$, $y = 0$) et $g_2$ ($x = 0$, $u = 0$) ont chacune 5 points de commun avec la courbe $C^6(1, 4, 1)$.

La courbe $C^6(1, 4, 1)$ est l'intersection partielle des surfaces, $z = xy$ et $y = x^5$; la courbe complémentaire est la droite $g_2$ ($x = 0$, $u = 0$) comptée 4 fois.

L'équation du plan osculateur de la courbe $C^6(1, 4, 1)$ est:

$$3t^5x - 3ty + 2z - 2t^6 = 0.$$

Les singularités de la courbe $C^6(1, 4, 1)$ sont:

$\nu = \mu = 6$, $\varrho = 10$, $\beta = \alpha = 0$, $H = G = 0$, $h = g = 10$, $\xi = \eta = 18$, $\theta = \omega = \omega' = 6$, $p = \lambda = \lambda' = \tau = \tau' = 0$, $R = 30$.

Fin.

Delft. Jan.—Mai 1906.

# Table des Matières.

## CHAPITRE I.

### Des singularités de la courbe $C(n, r, m)$.


Page.

§ 1. Introduction. 253

§ 2. Des nombres $n$, $r$ et $m$. 254

§ 3. Des points singuliers $M_1(n, r, m)$ et $M_2(m, r, n)$. 255

§ 4. Détermination du genre, de l'ordre, de la classe et du rang. 258

§ 5. Détermination de $\beta$, $\alpha$, $(h+H)$, $(g+G)$, $\theta$, $(\xi+\omega)$, $(\eta+\omega)$. 259

§ 6. Les points $M_1$ et $M_2$ sont les seules singularités de la courbe $C(n, r, m)$. 261

§ 7. Détermination des singularités $\beta_1$, $\alpha_1$, $H_1$ et $G_1$, équivalentes au cycle $M_1(n, r, m)$. 263

§ 8. Détermination des singularités $H$, $h$, $G$, $g$. 266

§ 9. Détermination des singularités $\theta_1$ et $\omega_1$ équivalentes au cycle $M_1(n, r, m)$. 269

§ 10. De la génératrice singulière $g_1(z=0,\ y=0)$. 271

§ 11. Des points $\lambda$ et des intersections de la courbe $C(n, r, m)$ avec $\Delta^2 D$. 275


## CHAPITRE II.

### Des courbes nodales de la développable $D$.


§ 12. Les sections par les plans des coordonnées. 279

§ 13. Du degré de la courbe nodale gauche et de la classe de la développable bitangente. 283

§ 14. Des nombres $q_1$, $q_2$, $q_3$, $q_4$ et $N$. 285

§ 15. Du nombre des branches de la courbe nodale gauche $\xi'$ passant par $M_1$. 287

§ 16. De l'intersection de la développable $D$ avec le plan $z = x\,tg\,\varphi$. 291

§ 17. Des points d'intersection de la courbe nodale gauche $\xi'$ avec le plan $y=0$. 295

§ 18. Des intersections de la courbe nodale $\xi'$ avec un plan $z = y\,tg\,\varphi$. 297

§ 19. Du plan osculateur à la courbe nodale $\xi'$ au point $M_1$. 301

§ 20. Des intersections des courbes $S_y$ et $S_x$ avec $\Delta^2 D$. 302

§ 21. Des intersections des courbes $S_z$ et $S_\infty$ avec $\Delta^2 D$. 307

## CHAPITRE III.

### De la décomposition de la courbe nodale gauche $\xi'$.

Page.

§ 22. Des génératrices se rencontrant en un point de la courbe nodale. 311
§ 23. Des racines $v_1$ correspondant aux sections planes $S_x$, $S_y$, $S_z$ et $S_\infty$. 313
§ 24. Des racines $v_1$ correspondant aux branches de la courbe $\xi'$. 316
§ 25. Des intersections de la courbe nodale $\xi'$ avec la surface $\Delta^2 D$. 318
§ 26. Des courbes nodales triples. 321
§ 27. Des racines réelles de l'équation $B$. 325
§ 28. Des génératrices ponctuées. 329

## CHAPITRE IV.

### Exemples et cas particuliers.

§ 29. Résumé des résultats obtenus. 335
§ 30. Résultats pour le cas que $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1$. 337
§ 31. Cas que $n = m$. 339
§ 32. Cas que $n = m$ et $r = 1$. 341
§ 33. Cas que $n = m = 1$. 342
§ 34. Cas que $r = m = 1$, $n$ est un nombre impair. 343
§ 35. Cas que $r = m = 1$, $n$ est un nombre pair. 344
§ 36. Application aux quartiques gauches. 345
§ 37. Application à la courbe $C^5(3, 1, 1)$. 348
§ 38. Application à la courbe $C^5(2, 1, 2)$. 350
§ 39. Application à la courbe $C^5(2, 2, 1)$. 352
§ 40. Application à la courbe $C^5(1, 3, 1)$. 356
§ 41. Application à la courbe $C^6(4, 1, 1)$. 358
§ 42. Application à la courbe $C^6(3, 1, 2)$. 359
§ 43. Application à la courbe $C^6(3, 2, 1)$. 360
§ 44. Application à la courbe $C^6(2, 3, 1)$. 361
§ 45. Application à la courbe $C^6(1, 4, 1)$. 362

Fin de la table des matières.

# SUR LA RÉDUCTION D'UN SYSTÈME QUELCONQUE DE FORCES DANS L'ESPACE $E_4$ À QUATRE DIMENSIONS

PAR

P. H. SCHOUTE.

---

Dans une petite étude antérieure, portant à peu près le même titre (voir *Archives Néerlandaises*, série 2, tome 6, livre jubilaire offert à J. Bosscha, p. 193) nous avons démontré le lemme et le théorème suivants:

**LEMME.** „Dans $E_n$ un système donné de forces se réduit d'une seule manière à une force passant par un point donné et un système de forces situé dans un espace $E_{n-1}$ donné ne contenant pas ce point".

**THÉORÈME.** „Le système de forces le plus général dans $E_{2n-1}$ peut être réduit à $n$ forces ne se trouvant pas dans un même espace $E_{2n-2}$. Et le système de forces le plus général dans $E_{2n}$ se comporte comme le système de forces le plus général d'un espace $E_{2n-1}$ déterminé compris dans $E_n$".

Ici nous entrerons en quelques détails analytiques par rapport au cas special $n = 4$.

1. Considérons en $E_4$ une force quelconque $F$, agissant au point $P$. Référons cette force (fig. 1) à un système de coordonnées rectangulaires $O(X_1 X_2 X_3 X_4)$ et représentons par $OP_1$, $P_1 P_2$, $P_2 P_3$, $P_3 P$ les coordonnées $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ de $P$ et par $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$ les composantes de $F$ dans les directions des axes. En transportant successivement ces composantes aux points $P_3$, $P_2$, $P_1$, $O$, à l'aide des règles ordinaires dont on se sert dans la réduction d'un système quelconque de forces dans notre espace tridimensional, on obtient, en tenant compte des couples de forces

dus au transport, au lieu de la force unique $F$, en $P$ quatre composantes $F_g'$ suivant les axes $OX_g$, $(g = 1, 2, 3, 4)$, et six couples $C_{g,h}$ aux moments $F_h x_g - F_g x_h$ dans les plans coordonnés $O(X_g X_h)$, $[(g, h) = (1, 2), (1, 3), .., (3, 4)]$. Les quatre composantes $F_g$ au point d'application commun $O$ dirigées suivant les axes $OX_g$ donnent par composition la force $F'$ équipollente à $F$. Donc le couple $(F, F'')$ formé par la force originale $F$ et la force $F''$ qui détruit $F'$ équivaut au système des six couples $C_{g,h}$ dans les plans coordonnés $O(X_g X_h)$. Si l'on varie la grandeur de la force $F$, le point d'application et la direction restant les mêmes, ou si l'on ne varie que la grandeur de la distance $OP$, les moments des couples $(F, F'')$ et $C_{g,h}$ varient proportionnellement; cette remarque suggère l'idée que les couples $C_{g,h}$ sont les projections du couple $(F, F'')$ sur les plans coordonnés $O(X_g X_h)$, c'est-à-dire qu'on obtient le moment $F_h x_g - F_g x_h$ de $C_{g,h}$ en multipliant le moment du couple $(F, F'')$ par le produit des cosinus des deux angles formés par le plan $OPF$ du couple $(F, F'')$ avec le plan $O(X_g X_h)$. Mais avant de procéder à la démonstration de cette proposition nous fixons l'attention sur l'identité connue

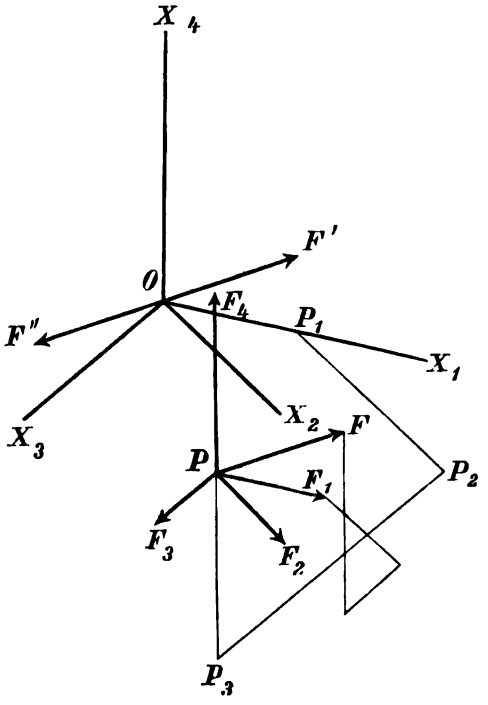


FIG. 1.

$$(F_3 x_2 - F_2 x_3)(F_4 x_1 - F_1 x_4) + (F_1 x_3 - F_3 x_1)(F_4 x_2 - F_2 x_4) + \\ + (F_2 x_1 - F_1 x_2)(F_4 x_3 - F_3 x_4) = 0,$$

que nous écrivons dans la forme abrégée

$$C_{23} C_{14} + C_{31} C_{24} + C_{12} C_{34} = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en représentant à la fois par $C_{g,h}$ le couple $C_{g,h}$ et son moment $F_h x_g - F_g x_h$. Cette identité nous sera utile dans ce qui suit.

2. Le plan représenté par les deux équations

$$\left.\begin{aligned} X_i &= a X_g + b X_h \\ X_j &= c X_g + d X_h \end{aligned}\right\},$$

où $g$, $h$, $i$, $j$ tient lieu d'une permutation quelconque des quatre indices 1, 2, 3, 4, forme avec le plan $O(X_g X_h)$ deux angles $\varphi$ déterminés par la relation

$$tang^4 \varphi - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\, tang^2 \varphi + (a d - b c)^2 = 0 \text{ [1]} \ldots \quad (2)$$

Le plan $O P F$ est représenté par la matrice

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{vmatrix} = 0,$$

qui se réduit aux deux équations

$$\left.\begin{aligned} C_{g,h} x_i &= C_{i,h} x_g + C_{g,i} x_h \\ C_{g,h} x_j &= C_{j,h} x_g + C_{g,j} x_h \end{aligned}\right\}.$$

Donc l'équation (2) devient ici

$$C^4_{g,h}\, tang^4 \varphi - C^2_{g,h} (C^2_{g,i} + C^2_{g,j} + C^2_{i,h} + C^2_{j,h})\, tang^2 \varphi + (C_{g,i} C_{j,h} - \\ - C_{g,j} C_{i,h})^2 = 0.$$

A l'aide de l'identité (1) la constante $(C_{g,i} C_{j,h} - C_{g,j} C_{i,h})^2$ se réduit à $C^2_{g,h} C^2_{i,j}$; donc on trouve pour les deux angles cherchés $\varphi_1$, $\varphi_2$

$$\left.\begin{aligned} C^2_{g,h} (tang^2 \varphi_1 + tang^2 \varphi_2) &= C^2_{g,i} + C^2_{g,j} + C^2_{i,h} + C^2_{j,h} \\ C^2_{g,h}\, tang^2 \varphi_1\, tang^2 \varphi_2 &= C^2_{i,j} \end{aligned}\right\},$$

ce qui donne après une transformation bien transparente

$$cos^2 \varphi_1\, cos^2 \varphi_2 = \frac{C^2_{g,h}}{C^2_{g,h} + C^2_{g,i} + C^2_{g,j} + C^2_{h,i} + C^2_{h,j} + C^2_{i,j}},$$

ou en forme abrégée

$$cos^2 \varphi_1\, cos^2 \varphi_2 = \frac{C^2_{g,h}}{\Sigma\, C^2_{g,h}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Donc les coefficients de réduction $cos \varphi_1\, cos \varphi_2$ sont proportionnels aux expressions correspondantes $C_{g,h}$.

---

[1]) Voir Sammlung SCHUBERT XXXV, „Mehrdimensionale Geometrie", I, p. 177.

Il ne nous reste qu'à prouver que le dénominateur commun $\Sigma C_{g,h}^2$ représente précisement le moment du couple $(F, F'')$. A cette fin nous exprimons le moment $M$ de ce couple dans les coordonnées $x_g$ de $P$ et les composantes $F_g$ de $F$. Si l'on représente par $Q$ (fig. 2) la projection de $O$ sur $PF$, on a évidemment

$$M^2 = F^2 . \; OQ^2 = F^2 (OP^2 - OQ^2) = F^2 . \; OP^2 - (F . \; OP . \cos\psi)^2,$$

où $\psi$ indique l'angle $OPF$. Les projections de $OP$ et de $PF$ sur les axes coordonnés $OX_g$ étant $x_g$ et $F_g$, on trouve

$$\cos\psi = \pm \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + F_4 x_4}{F . \; OP}.$$

Donc on a

$$M^2 = (F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) - \\ - (F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + F_4 x_4)^2,$$

ce qui se réduit à

$$M^2 = \Sigma C_{g,h}^2 .$$

Ainsi la proposition est démontrée.

3. La démonstration analytique de la proposition précédente souffre d'une manque de décision par rapport aux signes positif ou négatif des moments $C_{g,h}$ des couples composants; en vérité elle ne fait voir que l'accordance des valeurs absolues des moments $C_{g,h}$ et des projections du moment du couple résultant $(F, F'')$ sur les plans $O(X_g X_h)$. Cependant le raisonnement de mécanique théorique qui nous a prouvé l'équivalence du couple $(F, F'')$ au système des six couples $C_{g,h}$ démontre que la question elle-même n'admet pas d'ambiguité de signe, et des considérations géométriques

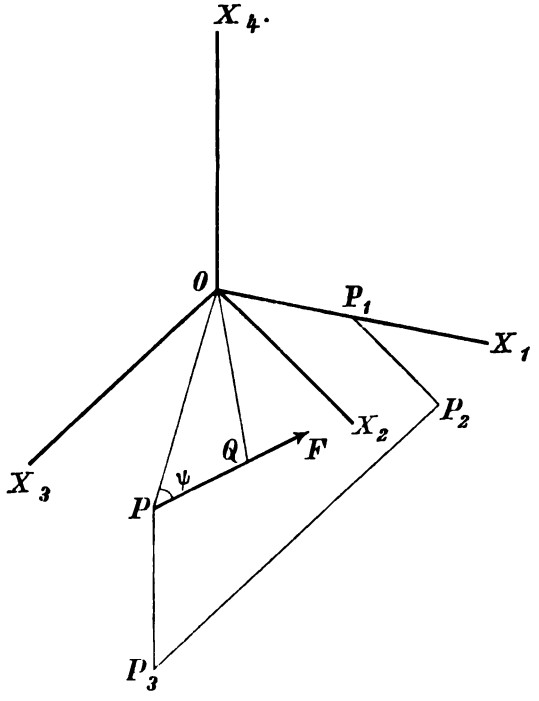



FIG. 2.

bien simples mènent au même but. En effet, représentons le couple résultant par une partie fermée de forme quelconque du plan du couple dont l'aire est égale au moment du couple et supposons que le contour de cette surface soit parcouru dans le sens indiqué par le couple; alors cette surface au contour dirigé se projette sur chacun des plans coordonnés suivant une aire à contour dirigé, faisant connaître le moment et le sens du couple composant [1]).

En $E_4$ la position d'un plan passant à l'origine dépend de quatre paramètres; ainsi les deux équations dont nous nous sommes servi tout à l'heure contiennent quatre coefficients arbitraires $a$, $b$, $c$, $d$. De la même manière la position du plan du couple résultant $(F, F'')$ est déterminé par les quotients mutuels des six quantités $C_{g,h}$ liées entre elles par l'identité (1). En y remplaçant $x_g$ et $F_g$ par les quantités proportionnelles $\varrho x_g$ et $\varrho F_g$, où $\varrho$ est infini, on transforme ces quantités $C_{g,h}$ dans les coordonnées de PLÜCKER de la droite d'intersection du plan $OPF$ du couple résultant avec l'espace tridimensional de $E_4$ situé tout entier à l'infini, les points à l'infini des axes $OX_g$ formant les sommets du tétraèdre de référence. Ce qui prouve une remarque due à M. F. N. COLE [2]), que la géométrie des plans passant à l'origine en $E_4$ est identique à la géométrie des droites d'un espace tridimensional d'après PLÜCKER.

4. Nous passons à la réduction d'un système quelconque de forces donné en $E_4$. Supposons que ce système consiste des $m$ forces $F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(m)}$ agissant aux points $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(m)}$. Représentons par $x_g^{(k)}$ et $F_g^{(k)}$ les coordonnées du point d'application $P^{(k)}$ et les composantes de $F^{(k)}$ dans les directions des axes. En remplaçant chacune des $m$ forces $F^{(k)}$ par quatre forces au point d'application commun $O$ dirigées suivant les axes coordonnés et par six couples situés dans les plans coordonnés, on obtient, après recomposition

---

[1]) Par rapport à ce point on peut comparer la thèse de W. A. WYTHOFF: „De Biquaternion als Bewerking in de Ruimte van vier Afmetingen" (le biquaternion comme opération dans l'espace $E_4$), Amsterdam, Ipenbuur en van Seldam, 1898, p. 52. En suivant la terminologie de M. WYTHOFF nous désignons la décomposition du couple $(F, F'')$ en six couples situés dans les plans coordonnés comme „décomposition hexaédrique orthogonale".

[2]) „On Rotations in Space of Four Dimensions", *American Journal of Mathematics*, tome 12, p. 194.

des forces dirigées suivant le même axe et des couples situés dans le même plan quatre forces $R_g = \sum_{k=1}^{m} F_g^{(k)}$ dirigées suivant les axes $OX_g$ et six couples $K_{g,h} = \sum_{k=1}^{m} (F_h^{(k)} x_g^{(k)} - F_g^{(k)} x_h^{(k)})$ situés dans les plans $O(X_g X_h)$.

Il est évident que les quatres forces $R_g$ dirigées suivant les axes $OX_g$ se recomposent à une résultante $R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2}$ agissant en $O$ et faisant avec les axes $OX_g$ des angles $\alpha_g$ déterminés par les relations $\cos \alpha_g = \frac{R_g}{R}$. D'un autre côté il est tout aussi évident qu'en général il est impossible de réduire les six couples $K_{g,h}$ situés dans les plans $O(X_g X_h)$ à un couple résultant unique, les six quantités $K_{g,h}$ ne satisfaisant plus, même dans le cas $m = 2$, à l'identité (1). En examinant ensuite, s'il est possible de remplacer les six couples $K_{g,h}$ par deux couples $K^{(1)}, K^{(2)}$ aux composants $K_{g,h}^{(1)}$, $K_{g,h}^{(2)}$, on trouve que les douze quantités $K_{g,h}^{(1)}$, $K_{g,h}^{(2)}$ doivent satisfaire à six équations de condition et à deux identités (1), ce qui prouve que la réduction des six couples $K_{g,h}$ à deux couples résultants peut se faire de $\infty^4$ manières différentes. Au premier abord il semble que ce résultat ne s'accorde pas avec le lemme et le théorème cités. Car un système de forces en $E_3$ se réduit d'une seule manière à une force passant par un point donné $P$ et une force située dans un plan donné $\pi$ ne contenant pas ce point; donc on dispose de six degrés de liberté dans la réduction de ce système, chacun des deux éléments de réduction $P, \pi$ étant déterminé par trois paramètres. Mais ce désaccord disparaît par la remarque qu'un déplacement du point $P$ le long de la première force et une rotation du plan $\pi$ autour de la seconde force ne change nullement le système des deux forces qui sont en vérité des couples, l'espace $E_3$ en question se trouvant à l'infini.

5. Les six couples $K_{g,h}$ se réduisent *d'une seule manière* à deux couples $K^{(1)}$ et $K^{(2)}$ situés en des plans perpendiculaires l'un à l'autre. Dans ce cas special [1]) les composants $K_{14}^{(2)}$, $K_{24}^{(2)}$, $K_{34}^{(2)}$, $K_{23}^{(2)}$, $K_{31}^{(2)}$, $K_{12}^{(2)}$ de $K^{(2)}$ sont proportionnels aux composants $K_{23}^{(1)}$, $K_{31}^{(1)}$, $K_{12}^{(1)}$, $K_{14}^{(1)}$, $K_{24}^{(1)}$, $K_{34}^{(1)}$ de $K^{(1)}$. On a donc les six équations

[1]) Voir „Mehrdimensionale Geometrie", I, p. 88.

$$\left.\begin{array}{l} K_{23}=K_{23}^{(1)}+\lambda K_{14}^{(1)} \\ K_{14}=K_{14}^{(1)}+\lambda K_{23}^{(1)} \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l} K_{31}=K_{31}^{(1)}+\lambda K_{24}^{(1)} \\ K_{24}=K_{24}^{(1)}+\lambda K_{31}^{(1)} \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l} K_{12}=K_{12}^{(1)}+\lambda K_{34}^{(1)} \\ K_{34}=K_{34}^{(1)}+\lambda K_{12}^{(1)} \end{array}\right\} \quad \ldots (4)$$

et l'identité

$$K_{23}^{(1)} K_{14}^{(1)} + K_{31}^{(1)} K_{24}^{(1)} + K_{12}^{(1)} K_{34}^{(1)} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Les six équations (4) donnent par solution des $K_{g,h}^{(1)}$

$$\left.\begin{array}{l} K_{23}^{(1)}=\dfrac{K_{23}-\lambda K_{14}}{1-\lambda^2} \\ K_{14}^{(1)}=\dfrac{K_{14}-\lambda K_{23}}{1-\lambda^2} \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l} K_{31}^{(1)}=\dfrac{K_{31}-\lambda K_{24}}{1-\lambda^2} \\ K_{24}^{(1)}=\dfrac{K_{24}-\lambda K_{31}}{1-\lambda^2} \end{array}\right\},\ \left.\begin{array}{l} K_{12}^{(1)}=\dfrac{K_{12}-\lambda K_{34}}{1-\lambda^2} \\ K_{34}^{(1)}=\dfrac{K_{34}-\lambda K_{12}}{1-\lambda^2} \end{array}\right\} \quad \ldots (6)$$

Ainsi (5) devient

$$(1+\lambda^2)\ \Sigma K_{23} K_{14} - \lambda \Sigma (K_{23}^2 + K_{14}^2) = 0\,, \quad \ldots\ldots (7)$$

équation faisant trouver deux valeurs toujours réelles de $\lambda$, menant au même résultat avec intervertissement des deux couples $K^{(1)}$ et $K^{(2)}$.

Par rapport aux cas particuliers de cette réduction des six couples $K_{g,h}$ à deux couples rectangulaires $K^{(1)}$, $K^{(2)}$ une simple indication peut suffire, les résultats étant, d'après l'analogie des couples avec les rotations et avec les surfaces planes dirigées, identiques à ceux obtenus en partie par MM. Cole et Wythoff (l.c.).

*a*) Si l'on a $\Sigma K_{23} K_{14} = 0$, l'équation (7) donne $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$. Ce cas est exclus d'avance, la condition $\Sigma K_{23} K_{14} = 0$ exprimant que les six couples $K_{g,h}$ sont les composants hexaédriques orthogonaux d'un même couple $K$.

*b*) Si l'on a $\Sigma (K_{23}^2 + K_{14}^2) = \pm 2 \Sigma K_{23} K_{14}$ ou bien

$$(K_{23} \mp K_{14})_0^2 + (K_{31} \mp K_{24})^2 + (K_{12} \mp K_{34})^2 = 0\,,$$

c'est-à-dire

$$K_{23} = \pm K_{14}\,,\ K_{31} = \pm K_{24}\,,\ K_{12} = \pm K_{34}\,,$$

où l'on a affaire soit aux trois signes positifs, soit aux trois signes négatifs, l'équation (7) se réduit à $(\lambda \mp 1)^2 = 0$; dans ces deux cas les numérateurs et le dénominateur commun des fractions figurant dans les équations (6) disparaissent à la fois et les six quantités $K_{g,h}^{(1)}$ deviennent indéterminées. Alors les équations (4) se réduisent à

$$\alpha)\ \lambda = 1 \qquad \left.\begin{aligned} K_{23} &= K_{23}^{(1)} + K_{14}^{(1)} \\ K_{31} &= K_{31}^{(1)} + K_{24}^{(1)} \\ K_{12} &= K_{12}^{(1)} + K_{34}^{(1)} \end{aligned}\right\}, \qquad \beta)\ \lambda = -1 \qquad \left.\begin{aligned} K_{23} &= K_{23}^{(1)} - K_{14}^{(1)} \\ K_{31} &= K_{31}^{(1)} - K_{24}^{(1)} \\ K_{12} &= K_{12}^{(1)} - K_{34}^{(1)} \end{aligned}\right\},$$

ce qui démontre que les droites à l'infini des deux plans perpendiculaires l'un à l'autre portant les deux couples résultants, au lieu d'être déterminées, admettent comme lieu géométrique une congruence de droites du premier ordre et de la première classe dont les deux directrices sont imaginaires. [1])

6. Nous revenons au cas du système général de forces en $E_4$ pour nous occuper de la relation entre les deux forces $R^{(1)}$ et $R^{(2)}$ capables de remplacer ce système. Représentons par $R_g^{(1)}$ et $R_g^{(2)}$ les composantes dans les directions des axes, par $x_g^{(1)}$ et $x_g^{(2)}$ les coordonnées des points d'application de ces forces. Alors les équations exprimant l'équivalence sont

$$R_g = R_g^{(1)} + R_g^{(2)},\ (g = 1, 2, 3, 4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$K_{g,h} = (R_h^{(1)} x_g^{(1)} - R_g^{(1)} x_h^{(1)}) + (R_h^{(2)} x_g^{(2)} - R_g^{(2)} x_h^{(2)}), \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

$$[(g, h) = (1, 2), (1, 3), \ldots (3, 4)].$$

Ainsi, la réduction en question est possible d'une infinité sextuple de manières différentes, le nombre seize des quantités introduites $R_g^{(1)}$, $R_g^{(2)}$, $x_g^{(1)}$, $x_g^{(2)}$ surpassant de six le nombre dix des équations. D'après le théorème cité les deux forces se trouvent dans un espace tridimensional déterminé. Cela se démontre par l'analyse de la manière suivante A l'aide des relations (8) les équations (9) se transforment en

$$K_{g,h} = (R_h^{(1)} x_g^{(1)} - R_g^{(1)} x_h^{(1)}) + [(R_h - R_h^{(1)}) x_g^{(2)} - (R_g - R_g^{(1)}) x_h^{(2)}],$$

ou en

$$K_{g,h} - (R_h x_g^{(2)} - R_g x_h^{(2)}) = R_h^{(1)} (x_g^{(1)} - x_g^{(2)}) - R_g^{(1)} (x_h^{(1)} - x_h^{(2)}) \ldots (10).$$

---

[1]) Ces deux droites à l'infini aux coordonnées de PLÜCKER $l_{g,h}$ sont déterminées par les équations

$$\left.\begin{aligned} K_{23}\, l_{23} + K_{31}\, l_{31} + K_{12}\, l_{12} &= 0 \\ l_{23}^2 + \quad l_{31}^2 + \quad l_{12}^2 &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} l_{14} &= \pm\, l_{23} \\ l_{24} &= \pm\, l_{31} \\ l_{34} &= \pm\, l_{12} \end{aligned}\right\}$$

où les trois signes positifs s'appliquent au cas ($\alpha$), les trois signes négatifs au cas ($\beta$).

Le second membre de cette équation représente la projection sur le plan $O(X_g X_h)$ du couple formé par la force $R^{(1)}$ appliquée au point aux coordonnées $x_g^{(1)} - x_g^{(2)}$ et une force égale et parallèle à $R^{(1)}$, agissant en $O$ en sens opposé. Donc l'équation de condition (1) donne, eu égard à (10),

$$\Sigma \{K_{23} - (R_3 x_2^{(2)} - R_2 x_3^{(2)})\} \{K_{14} - R_4 x_1^{(2)} - R_1 x_4^{(2)})\} = 0$$

ou

$$\Sigma K_{23} K_{14} - \Sigma K_{23} (R_4 x_1^{(2)} - R_1 x_4^{(2)}) - \Sigma K_{14} (R_3 x_2^{(2)} - R_2 x_3^{(2)}) = 0, \quad (11)$$

les termes quadratiques en $x_g^{(2)}$ se détruisant les uns les autres. Cette équation linéaire dans les coordonnées $x_g^{(2)}$ du point d'application de la force $R^{(2)}$ représente l'espace tridimensional par $R^{(1)}$, $R^{(2)}$. En effet, ce lieu du point $x_g^{(2)}$ doit contenir la droite portant $R^{(2)}$, chaque point de cette droite pouvant figurer comme point d'application de $R^{(2)}$; de plus il doit passer par la droite portant $R^{(1)}$, le résultat ne changeant pas, si l'on intervertit dans les notations des forces et des points d'application les indices supérieures (1) et (2).

7. L'equation (11) prend la forme

$$\begin{aligned} x_1 (K_{34} R_2 + K_{42} R_3 + K_{23} R_4) + x_2 (K_{43} R_1 + K_{14} R_3 + K_{31} R_4) + \\ + x_3 (K_{24} R_1 + K_{41} R_2 + K_{12} R_4) + x_4 (K_{32} R_1 + K_{13} R_2 + K_{21} R_3) = \\ = \Sigma K_{23} K_{14} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12) \end{aligned}$$

Elle donne lieu aux remarques suivantes:

*a*) Si l'on a $\Sigma K_{23} K_{14} = 0$, l'espace tridimensional $(R^{(1)}, R^{(2)})$ passe à l'origine. Ce résultat était à prévoir. Car sous la condition $\Sigma K_{23} K_{14} = 0$ les six couples $K_{g,h}$ sont les composants hexaédriques orthogonaux d'un couple unique $K$ et le plan de ce couple mené par $O$ détermine avec la résultante $R$ par $O$ un $E_3$ passant par $O$.

*b*) Si l'on a

$$\left.\begin{aligned} K_{34} R_2 + K_{42} R_3 + K_{23} R_4 &= 0 \\ -K_{34} R_1 \qquad + K_{14} R_3 + K_{31} R_4 &= 0 \\ -K_{42} R_1 - K_{14} R_2 \qquad + K_{12} R_4 &= 0 \\ -K_{23} R_1 - K_{31} R_2 - K_{12} R_4 \qquad &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

l'équation (12) se réduit à une identité, le second membre de

cette équation disparaissant en même temps. Car l'élimination des quatre quantités $R_g$ de (13) donne

$$\begin{vmatrix} 0 & K_{34} & K_{42} & K_{23} \\ -K_{34} & 0 & K_{14} & K_{31} \\ -K_{42} & -K_{14} & 0 & K_{12} \\ -K_{23} & -K_{31} & -K_{12} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

et le déterminant gauche symétrique d'ordre pair du premier membre se réduit à $(\Sigma K_{23} K_{14})^2$.

L'espace tridimensional $(R^{(1)}, R^{(2)})$ devient indéterminé, si les deux forces $R^{(1)}, R^{(2)}$ se réduisent à une force unique, c'est-à-dire si les couples $K_{g,h}$ sont les composants hexaédriques orthogonaux d'un couple unique $K$ et que la résultante $R$ agissant en $O$ se trouve dans le plan de ce couple mené par $O$. Mais voilà précisément ce qu' expriment les équations (13)

*c*) Sous les conditions $R_g = 0$, $(g = 1, 2, 3, 4)$, $\Sigma K_{23} K_{14} \neq 0$ l'espace tridimensional $(R^{(1)}, R^{(2)})$ passe à l'infini. Alors le système donné de forces se réduit à deux couples; de la réduction de ce système à deux couples situés en des plans perpendiculaires l'un à l'autre nous nous sommes occupés plus haut.

*d*) Sous les conditions $R_g = 0$ et $K_{g,h} = 0$ il y a équilibre. Les dix quantités $R_g$, $K_{g,h}$ étant indépendantes les unes des autres, le nombre des systèmes de forces différents en $E_4$ est $\infty^{10}$.

8. D'après le théorème découvert en 1828 par CHASLES tous les tétraèdres, admettant comme un des trois couples d'arêtes opposées deux forces pouvant remplacer un système de forces donné en $E_3$, ont même volume. Nous démontrons ce théorème à l'aide des équations (10) pour les systèmes de forces $R^{(1)}, R^{(2)}$ de l'espace (12).

Dans $E_4$ le volume tridimensional du tétraèdre aux sommets

$$x_g^{(1)}, \quad x_g^{(1)} + R_g^{(1)}, \quad x_g^{(2)}, \quad x_g^{(2)} + R_g^{(2)}$$

se détermine par la relation

$$V^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2,$$

$V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$ représentant les projections du volume cherché $V$ sur les quatre espaces de projection $O(X_2 X_3 X_4)$, $O(X_1 X_3 X_4)$, $O(X_1 X_2 X_4)$, $O(X_1 X_2 X_3)$.

Or, on trouve que $6 V_1$, $6 V_2$, $6 V_3$, $6 V_4$ sont les déterminants compris dans la matrice

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)}-x_1^{(2)}, & x_2^{(1)}-x_2^{(2)}, & x_3^{(1)}-x_3^{(2)}, & x_4^{(1)}-x_4^{(2)} \\ R_1^{(1)}, & R_2^{(1)}, & R_3^{(1)}, & R_4^{(1)} \\ R_1^{(2)}, & R_2^{(2)}, & R_3^{(2)}, & R_4^{(2)} \end{vmatrix}$$

ou dans

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)}-x_1^{(2)}, & x_2^{(1)}-x_2^{(2)}, & x_3^{(1)}-x_3^{(2)}, & x_4^{(1)}-x_4^{(2)} \\ R_1^{(1)}, & R_2^{(1)}, & R_3^{(1)}, & R_4^{(1)} \\ R_1, & R_2, & R_3, & R_4 \end{vmatrix}.$$

Donc on a, eu égard à (10),

$$\pm 6\, V_1 = R_2 (K_{34} - R_4 x_3^{(2)} + R_3 x_4^{(2)}) + R_3 (K_{42} - R_2 x_4^{(2)} + R_4 x_2^{(2)}) + \\ + R_4 (K_{23} - R_3 x_2^{(2)} + R_2 x_3^{(2)}),$$

etc.,

ce qui se réduit à

$$\left.\begin{aligned} \pm 6\, V_1 &= K_{34} R_2 + K_{42} R_3 + K_{23} R_4 \\ \pm 6\, V_2 &= K_{43} R_1 + K_{14} R_3 + K_{31} R_4 \\ \pm 6\, V_3 &= K_{24} R_1 + K_{41} R_2 + K_{12} R_4 \\ \pm 6\, V_4 &= K_{32} R_1 + K_{13} R_2 + K_{21} R_4 \end{aligned}\right\}.$$

Donc

$$36\, V^2 = (K_{34} R_2 + K_{42} R_3 + K_{23} R_4)^2 + (K_{43} R_1 + K_{14} R_3 + K_{31} R_4)^2 \\ + (K_{24} R_1 + K_{41} R_2 + K_{12} R_4)^2 + (K_{32} R_1 + K_{13} R_2 + K_{21} R_3)^2,$$

ce qui prouve le théorème.

*a*) Si le système des forces se réduit à une force unique, le volume $V$ doit disparaître; c'est ce qui arrive en effet, les équations (13) ne différant guère des équations $V_g = 0$.

Ce que nous venons de trouver démontre que les fractions $\frac{V_g}{V}$ sont les produits des cosinus des deux angles formés par l'espace $(R^{(1)}, R^{(2)})$ avec les espaces coordonnés.

*b*) Sous les quatre conditions $R_g = 0$, les expressions $V_g$ s'annulent tout de même et l'on retrouve $V = 0$. Dans ce cas le système des forces donné se réduit à deux couples, c'est-à-dire à deux forces situées à l'infini, de manière que l'espace tridimensional contenant les deux résultantes se trouve à l'infini. Or, chaque point à l'infini en $E_4$ se projette à l'infini sur chacun des espaces coordonnés; donc les volumes $V_1, V_2, V_3, V_4$ doivent s'annuler, ces projections se réduisant à des figures planes. Il va sans dire

que dans ce cas il n'a plus de sens de parler du volume du tétraèdre des forces.

9. D'après le théorème découvert en 1837 par MOEBIUS les $\infty^6$ systèmes de deux forces pouvant remplacer un système de forces donné en $E_3$ engendrent un système focal, où le plan du point d'application $P^{(2)}$ de la force $R^{(2)}$ est le plan par ce point contenant la force $R^{(1)}$. Nous prouvons ce théorème, toujours à l'aide des relations (10), en démontrant d'abord que cette relation existe entre les projections correspondantes de ce point et de ce plan sur les quatre espaces coordonnés $O(X_2\, X_3\, X_4)$, etc.

Le plan par les trois points

$$x_g^{(1)},\quad x_g^{(1)} + R_g^{(1)},\quad x_g^{(2)}$$

est représenté par la matrice

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & 1 \\ x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & x_3^{(1)} & x_4^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & x_3^{(2)} & x_4^{(2)} & 1 \\ R_1^{(1)} & R_2^{(1)} & R_3^{(1)} & R_4^{(1)} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui se réduit à

$$\begin{vmatrix} X_1 - x_1^{(2)}, & X_2 - x_2^{(2)}, & X_3 - x_3^{(2)}, & X_4 - x_4^{(2)} \\ x_1^{(1)} - x_1^{(2)}, & x_2^{(1)} - x_2^{(2)}, & x_3^{(1)} - x_3^{(2)}, & x_4^{(1)} - x_4^{(2)} \\ R_1^{(1)}\quad, & R_2^{(1)}\quad, & R_3^{(1)}\quad, & R_4^{(1)} \end{vmatrix} = 0.$$

Donc la relation entre les projections du point et du plan considérés sur l'espace $O(X_2\, X_3\, X_4)$ s'obtient en supprimant la première colonne de cette matrice, eu égard à (10), dans la forme

$$(X_2 - x_2^{(2)})(K_{34} - R_4 x_3^{(2)} + R_3 x_4^{(2)}) + (X_3 - x_3^{(2)})(K_{42} - R_2 x_4^{(2)} + R_4 x_2^{(2)}) + \\ + (X_4 - x_4^{(2)})(R_{23} - R_3 x_2^{(2)} + R_2 x_3^{(2)}) = 0,$$

ou, en supprimant l'indice supérieure chez les $x_g^{(2)}$,

$$X_2(K_{34} - R_4 x_3 + R_3 x_4) + X_3(K_{42} - R_2 x_4 + R_4 x_2) + \\ + X_4(K_{23} - R_3 x_2 + R_2 x_3) = K_{34} x_2 + K_{42} x_3 + K_{23} x_4 \ldots (14)$$

En passant aux coordonnées tangentielles $\xi_2$, $\xi_3$, $\xi_4$ de ce plan, à l'aide de la relation d'incidence $\xi_2 X_2 + \xi_3 X_3 + \xi_4 X_4 + 1 = 0$, on trouve donc

$$\frac{\xi_2}{K_{34} - R_4 x_3 + R_3 x_4} = \frac{\xi_3}{K_{42} - R_2 x_4 + R_4 x_2} = \frac{\xi_4}{K_{23} - R_3 x_2 + R_2 x_3} =$$
$$= \frac{-1}{K_{34} x_2 + K_{42} x_3 + K_{23} x_4}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

ce qui démontre que le point $(x_2, x_3, x_4)$ et le plan $(\xi_2, \xi_3, \xi_4)$ sont des éléments correspondants de deux systèmes réciproques en $O(X_2\, X_3\, X_4)$ situés de manière que chaque point $(x_2, x_3, x_4)$ se trouve dans le plan (14) correspondant, en d'autres termes que ces éléments $(x_2, x_3, x_4)$ et $(\xi_2, \xi_3, \xi_4)$ engendrent un système focal en $O(X_2\, X_3\, X_4)$. Mais dès lors on voit tout de suite que la même relation doit lier entre eux le point et le plan de l'espace (12) dont $(x_2, x_3, x_4)$ et $(\xi_2, \xi_3, \xi_4)$ sont les projections sur $O(X_2\, X_3\, X_4)$.

*a*) La première des équations (13) exprime que les plans de l'espace $O(X_2\, X_3\, X_4)$, dont les équations

$$\left.\begin{array}{ll} K_{34} - R_4 x_3 + R_3 x_4 = 0, & K_{42} - R_2 x_4 + R_4 x_2 = 0, \\ K_{23} - R_3 x_2 + R_2 x_3 = 0, & K_{34} x_2 + K_{42} x_3 + K_{23} x_4 = 0 \end{array}\right\} \ldots \quad (16)$$

s'obtiennent en annulant les dénominateurs des fractions figurant en (15), passent par une même droite. En effet, sous cette condition les quatre plans contiennent les trois points

$$\left.\begin{array}{r} x_2 = 0 \\ R_2 x_3 = -K_{23} \\ R_2 x_4 = K_{42} \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{r} R_3 x_2 = K_{23} \\ x_3 = 0 \\ R_3 x_4 = -K_{34} \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{r} R_4 x_2 = -K_{42} \\ R_4 x_3 = K_{34} \\ x_4 = 0 \end{array}\right\}$$

situés en ligne droite. Donc le système focal devient indéterminé sous les conditions (13). Or, dans le cas d'une force unique, l'espace tridimensional $(R^{(1)}, R^{(2)})$ est indéterminé et donc en même temps le système focal. Dans ce cas, d'après la génération du système focal, le plan focal d'un point quelconque $P$ est le plan par $P$ contenant la force unique; donc la droite commune aux quatre plans (16) est la projection de la résultante unique sur l'espace $O(X_2\, X_3\, X_4)$. Comme on trouve facilement cette résultante elle même passe par les quatre points

$$\left.\begin{array}{r} x_1 = 0 \\ R_1 x_2 = K_{21} \\ R_1 x_3 = K_{31} \\ R_1 x_4 = K_{41} \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{r} R_2 x_1 = K_{12} \\ x_2 = 0 \\ R_2 x_3 = K_{32} \\ R_2 x_4 = K_{42} \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{r} R_3 x_1 = K_{13} \\ R_3 x_2 = K_{23} \\ x_3 = 0 \\ R_3 x_4 = K_{43} \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{r} R_4 x_1 = K_{14} \\ R_4 x_2 = K_{24} \\ R_4 x_3 = K_{34} \\ x_4 = 0 \end{array}\right\} \ldots \quad (17).$$

Donc on peut prétendre que sous les conditions (13) les quatre équations

$$x_g = \frac{\sum_{h=1}^{4} \lambda_h K_{g,h}}{\sum_{h=1}^{4} \lambda_h R_h}, \quad (g = 1, 2, 3, 4), \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

où les $\lambda_h$ sont arbitraires, représentent la droite portant la résultante unique décomposée dans ses points Ce résultat était à prévoir. Car, si le système des dix quantités $R_g$, $K_{g,h}$ équivaut à une force unique, les composantes de cette force sont $R_g$, et son point d'application se détermine à l'aide des six équations $K_{g,h} = R_h x_g - R_g x_h$, qui ramènent aux quatre points (17) et donc à (18).

[Pour l'extension des résultats communiqués ici à l'espace $E_n$ d'un nombre quelconque de dimensions on peut comparer: *Comptes rendus*, t. CXLII, p. 826, 2 avril 1906.]

# RECHERCHES
## SUR LA CIRCULATION DU SANG.

PAR

J. L. HOORWEG.

---

### CHAPITRE I.

### Sur le mouvement d'un fluide dans un tube élastique.

1. Il y a environ 18 années que j'ai publié dans les mémoires de l'Académie Royale des Sciences à Amsterdam un travail détaillé sur la circulation du sang dans les artères de l'homme. Depuis ce temps nombre de physiologistes et de médecins se sont occupés de cette question importante. Moi-même je n'ai pas cessé de m'intéresser à ce sujet, quoique parfois des études toutes différentes attirassent mon attention.

Maintenant je crois que le temps est arrivé de résumer dans un seul mémoire les résultats acquis.

Commençons par le développement des principes du mouvement oscillatoire des liquides dans les tubes élastiques.

Comme l'a démontré déjà en 1850 d'une manière admirable M. E. H. Weber [1]), c'est l'élasticité des parois qui seule rend possible la propagation d'une onde dans le tube. Pendant cette propagation il y a continuellement échangement d'énergie entre la paroi et la liquide. Tantôt le fluide pousse la paroi, tantôt la paroi dilatée presse le fluide et c'est justement par cet échange d'énergie entre la paroi et le fluide que l'onde se propage. Tandis que chaque partie de la paroi se dilate ou se contracte, chaque particule du fluide décrit une courbe, qui se change en une

---

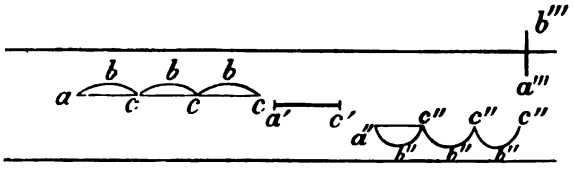
[1]) Ber. Sächs. Gesellschaft 1850 pg. 186.

droite longitudinale pour toute particule qui se trouve sur l'axe du tube et en une droite transversale pour une particule qui se trouve à la circonférence.

2. On peut étudier ce mouvement à l'aide d'un long tube élastique pourvu à l'une des extrémités d'un ballon élastique, le tout rempli d'eau. Si l'on provoque une pression alternant sur le ballon on voit que tout point du tube prend un mouvement de va-et-vient, qui se propage sur toute la longueur du tube.

On imite encore mieux le mouvement du sang dans les artères si l'on munit le ballon de deux soupapes, dont l'une s'ouvre en dedans pour prendre de l'eau dans un réservoir et dont l'autre s'ouvre du coté du tube. En pressant périodiquement le ballon on pousse l'eau du ballon dans le tube et provoque ainsi une demi-onde positive, qui se propage sur tout le fluide du tube et qui se termine en rejetant une certaine quantite d'eau hors du tube. Au contraire le ballon en segonflant prend une nouvelle quantité d'eau dans le réservoir, et la régette de nouveau dans le tube en se comprimant. Par ces compressions et dilatations successives du ballon on provoque dans le tube élastique une série d'ondes positives qui ressemblent beaucoup aux ondes sanguines que le coeur provoque dans les artères. Chaque particule d'eau décrit une courbe, formée de demi-ellipses consécutives, *abcbcbc* Fig. 1 qui se changent en des droites consécutives longitudinales *a' c'*. Pour les particules d'eau plus proches de la circonference l'axe transversale des demi-ellipses est plus grande comme l'on voit en *a'' b'' c'' b'' c'' b'' c''* et pour un point de la circonference le mouvement est représenté par *a''' b'''*. De cette manière chaque particule d'eau se meut toujours dans le même sens positif et est transportée à travers le tube élastique dans toute sa longueur. En même temps les points de la circonference se meuvent transversalement et causent ainsi la dilatation de la paroi, qui réagit à son tour par son élasticité sur le fluide.

FIG. 1.




Ainsi le mouvement du fluide dans une certaine coupe du tube se communique à toutes les coupes suivantes au moyen de l'élasticité de la paroi avec une vitesse *c*, calculée pour la première fois par Dr. THOMAS YOUNG dans l'année 1808. Cette vitesse,

$c$, est ce qu'on appelle dans la théorie de la circulation du sang la vitesse de propagation du pouls.

YOUNG donne pour cette vitesse du pouls la valeur de 16 mètres. par seconde et quoique ce nombre soit trop grand, il est très remarquable que YOUNG calcule cette vitesse 22 années avant que E. H. WEBER découvrît qu'on constate le pouls plus tard dans l'artère du pied que dans le carotide, ainsi 22 annees avant que WEBER eût reconnu pour la première fois que le mouvement du pouls consiste dans une ondulation *progressive*.

Cette vitesse $c$ est tout autre que celle des particules d'eau elles-mêmes, marquée dans la figure 1 par la longueur de la droite $ac$ et que je représenterai par $u$. La vitesse $u$ est beaucoup plus petite que $c$ et dépend principalement de la vitesse de contraction du ballon, tandis que $c$ ne dépend que de l'élasticité de la paroi et des dimensions du tube.

La formule de YOUNG, retrouvée plus tard par M. RESAL [1]) et M. KORTEWEG [2]) est la suivante:

$$c = \sqrt{\frac{Ea}{2R\varrho}},$$

dans laquelle $c$ est la vitesse de propogation de l'onde
$E$ le module d'élasticité du tube
$a$ l'épaisseur de la paroi
$R$ le rayon du tube
$\varrho$ la densité du fluide
le tout exprimé en unités C. G. S.

Cette formule explique pourquoi pour des tubes élastiques très différents, DONDERS [3]) a trouvé la même valeur de $c$, car les tubes plus gros ayant aussi des parois plus épaisses, la relation $\frac{a}{r}$ reste presque toujours constante De même M. KRAUSE et d'autres anatomistes ont trouvé que pour toutes les artères le quotient $\frac{a}{2r}$ reste à per près constant, savoir $\frac{1}{10}$. Donc aussi pour les différentes artères on peut s'attendre à une valeur constante de $c$. De plus, suivant les recherches de M. MAREY [4]) le module d'élasticité des artères

[1]) Liouville Journal 1876 pag. 342.
[2]) DISSERT. Leiden 1878.
[3]) Physiologie des Menschen 1859. S. 59.
[4]) Circulation du sang 1881 pag. 161.

accroît avec la pression intérieure, mais alors par la même couche l'épaisseur de la paroi diminue et le produit $Ea$ reste à peu près constant. Surtout dans les artères la constance de $c$ est évidente et rien n'est plus contraire à la nature des choses que de vouloir déterminer la pression dans les artères par la mesure de la vitesse $c$, comme l'a proposé M. MOENS [1]).

Pour le systeme artériel de l'homme on a trouvé:

WEBER [2]) $c = 7.92 - 9.24$ mètre.
GRASSHEY [3]) $c = 8.5$ mètre.
MOENS [4]) $c = 7 - 8.5$ mètre.
HOORWEG [5]) $c = 9$ mètre.

Les nombres si différents trouvés par MM. LANDOIS [6]) et GRÜNMACH [7]), savoir $c = 6$ mètre, sont certainement errones, comme l'a prouvé M. GRASSHEY. LANDOIS et GRÜNMACH, de même que MOENS, mesurent la vitesse $c$ par la position du sommet des courbes, tracées par un sphygmographe placé sur differents points du système artériel, mais cette manière de mesurer n'est pas exacte pour cette raison que le mouvement du pouls n'est pas un simple mouvement sinusodal, mais un mouvement composé, dans lequel la place du sommet sur les courbes dépend de la forme de la courbe qui varie d'une artère à l'autre. Pour cette raison il faut toujours chercher la place où l'élévation de la courbe *commence* et dans ce cas toutes les expériences donnent sans exception pour $c$ la valeur de 8—9 mètre. On peut donc accepter avec une grande probabilité que dans les artères de l'homme sain la vitesse de propagation de l'onde sanguine, $c$ ne varie que d'une quantité négligeable, ainsi que DONDERS a trouvé pour les tubes élastiques.

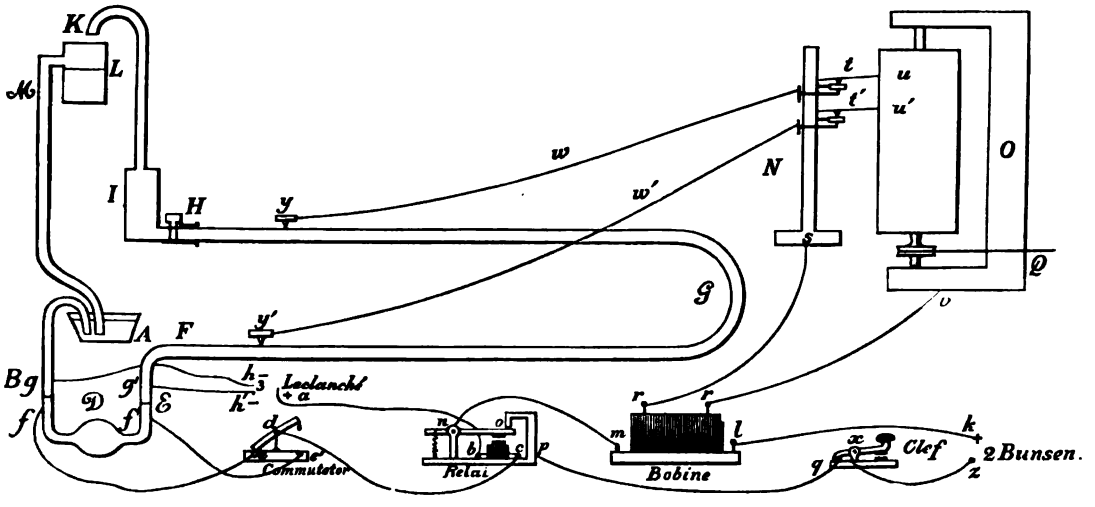
3. Continuons maintenant les expériences avec les tubes élastiques. Nous prenons, fig. 2, un tube elastique assez long $FGH$, pourvu d'un ballon élastique $D$ à deux soupapes $f$ et $f'$ et prenant de l'eau dans le réservoir $A$. L'eau passe du réservoir $A$ par le ballon $D$ dans le tube $FGH$ et se verse alors par le tube en

---

[1]) Die Pulscurve S. 113.
[2]) l. c. S. 181.
[3]) Die Wellenbewegung in elastischen Röhren 1880 pag. 171.
[4]) Die Pulscurve S. 119.
[5]) Verh. Kon. Acad. 1888 pag. 22.
[6]) Die Lehre von Arterienpuls S. 299.
[7]) Arch. fur An. u. Phys. 1879.

verre $I$ dans un autre réservoir $L$ que l'on peut placer à différente hauteur pour modifier la pression constante qui règne dans le tube. De ce réservoir $L$ l'eau retourne par un siphon au reservoir

FIG. 2.




$A$, où il recommence son mouvement. L'eau dans le tube par les compressions successives de ballon prend un mouvement ondulatif progressif qui se propage avec la vitesse constante $c$ sur toute la longueur du tube. Cette onde se réfléchit à l'extrémité $H$, revient avec la même vitesse, $c$, au commencement $E$ du tube, se réfléchit de nouveau et de cette manière chaque onde primaire provoque toute une famille d'ondes de réflexion, qui se pénètrent sans s'affaiblir et qui se superposent à chaque point du tube, d'où resulte un mouvement composé de la paroi qu'on peut étudier en posant sur le tube deux sphygmographes à transmission $y$ et $y'$ qui enrégistrent ce mouvement au moyen de deux tambours $t$ et $t'$ sur le cilindre tournant $O$, couvert de papier enfumé [1]).

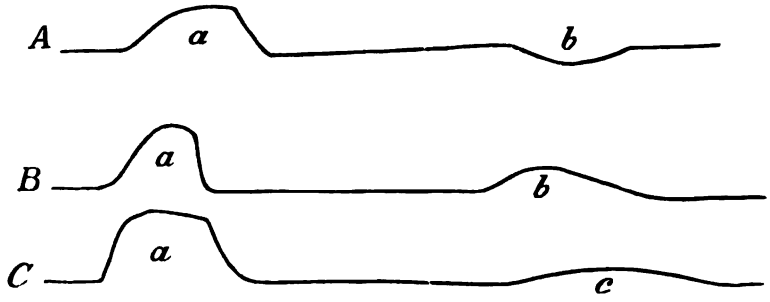
On voit dans la figure 3, trois courbes $A$, $B$ et $C$ decrites par les deux sphygmographes.

$A$ est la courbe que donne le sphygnographes $y'$ placé au commencement du tube, quand le robinet $H$ est ouvert, $B$ est la courbe que donne le même sphygmographe $y'$ quand le robinet $H$ est fermé. $a$ est l'onde primaire, $b$ l'onde de réflexion. On voit que dans le cas où le tube est ouvert l'élévation $a$ donne lieu à une

[1]) Voyez sur les différentes sortes de sphygmographes et sur la technique de ces instruments: Revue de médecine 24 Année 1904. Tome 24 pag. 165. Voyez aussi mon mémoire de l'academie Chapitre I.

dépression de réflexion *b* et que dans le cas où le tube est fermé l'élévation primaire *a* provoque une élévation de réflexion *b* C'est ainsi que se trouve prouvé ce que WEBER et GRASSHEY et d'autres ont déjà trouvé savoir que dans les tubes ouverts la réflexion

FIG. 3.




est *négative* ou de nom contraire et que dans les tubes fermés la réflexion est toujours *positive* ou *homonyme.*

*C* représente la courbe inscrite par le sphygmographe *y*, placé près de l'extrémité de tube, quand le tube est fermé. On peut alors comparer les deux courbes *B* et *C* trouvées toutes les deux le tube fermé, mais à differents points du tube. Dans la courbe *B* l'élévation *b* représente la première onde de réflexion qui se présente au point *y'* après avoir parcouru environ la double longueur de tube. Dans la courbe *C* inscite à l'extremité du tube la première onde de réflexion suit de si près l'onde primaire qu'elle se confond avec celle-ci en augmentant seulement la hauteur et la largeur de cette onde et ce qui se montre en *c*, c'est l'onde de réflexion du *deuxième* ordre, réfléchie au commencement du tube et arrivant au sphygmographe *y* ayant parcouru aussi la double longueur du tube.

Ainsi on a prouvé une autre propriété importante des ondes. savoir la *pénétration* mutuelle, car cette deuxième onde passe deux fois sous le sphygmographe *y'* et donne néanmoins dans la courbe *C* une élévation très visible *c*.

De même les courbes *B* et *C* prouvent l'*interférence* des ondes parce qu'en *B* l'élevation *b* est augmentée par le passage presque simultané de l'onde de deuxième ordre et en *C* l'élevation *a* est agrandie par l'influence de l'onde reflétée du la premier ordre.

On peut donc appliquer à ces ondes le principe de l'interférence de sorte qu'on trouve suivant BERNOUILLI la forme du mouvement composé par l'addition algébrique des ordinates de chaque mouvement élementaire.

4. Si $l$ représente la longueur du tube, $x$ la distance du sphygmographe du commencement, $c$ la vitesse de propagation de l'onde progressive, une onde, qui part du ballon au moment $T$, arrive au sphygmographe au temps $T + \frac{x}{c}$.

La première onde de réflexion arrive au sphygmographe au temps $T + \frac{l}{c} + \frac{l-x}{c} = T + \frac{2l-x}{c}$, la seconde onde de réflexion au temps $T + \frac{2l}{c} + \frac{x}{c} = T + \frac{2l+x}{c}$, la troisième au temps $T + \frac{3l}{c} + \frac{l-x}{c} = T + \frac{4l-x}{c}$, la quatrième au temps $T + \frac{4l+x}{c}$ et ainsi de suite, d'où il suit que la première onde de réflexion est retardée sur l'onde primaire d'un temps égal à $\frac{2(l-x)}{c}$

la seconde .... à $\frac{2l}{c}$

la troisième ... à $\frac{2(2l-x)}{c}$

la quatrième .. à $\frac{4l}{c}$ et ainsi de suite.

Ainsi le retard sur l'onde primaire pour les ondes de réflexion impaires dépend de l'endroit où l'on applique le sphygmographe, tandis que celui des ondes paires dépend seulement de la longueur du tube et se trouve indépendant de la place d'application du sphygmographe.

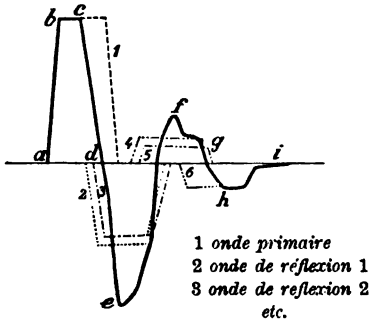
En mesurant la distance du sphygmographe à l'origine du tube et en connaissant la longueur du tube entier, $l$, la vitesse de propagation $c$, et la vitesse de rotation du cylindre enregistrant, $v$, on peut aisément calculer pour chaque onde de réflexion à quelle distance de l'onde primaire il faut trouver cette onde et quand la forme de l'onde primaire est connue, on peut construire suivant le principe de Bernoilli la courbe résultante que le sphygmographe, appliqué à un certain point du tube, doit inscrire sur le cylindre tournant.

De cette manière j'ai calculé selon les données de Landois [1]) les retards que les diverses ondes de réflexion ont aus sur l'onde primaire et en ajoutant les ordinates des ondes consécutives, j'ai obtenu la courbe Fig. 4, dans laquelle 1 représente l'élévation primaire, 2 l'onde de réflexion du première ordre, étant une

[1]) Die Lehre vom Arterienpüls S. 109.

dépression parce que le tube était ouvert, 3 la deuxième onde de réflexion qui reste une dépression parce qu'à l'origine du tube il y avait une réflexion homonyme, 4 la troisième onde de réflexion, qui devient une élévation et 5 la quatrième onde de réflexion, également une élévation. La courbe résultante indiquée par la ligne pleine *abcdefghi* présente une ressemblance parfaite avec la courbe, trouvée par LANDOIS l. c. fig. 19.

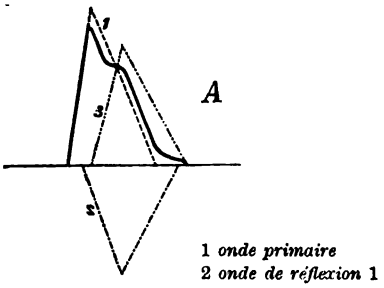
FIG. 4.




VOLKMANN s'étonne que la forme de la courbe trouvée avec le même tube élastique soit si différente quand on varie la durée de la systole et de la diastole du ballon. Par une systole de 0.4 et une diastole de 0.8 seconde VOLKMANN trouve une courbe *katacrote* et par une systole de 0.8 et une diastole de 0.8 il trouve une forme *anakrote* [1]).

Les deux courbes Fig. 5 construites d'après les données de VOLKMANN donnent la solution de cette question.

FIG. 5.



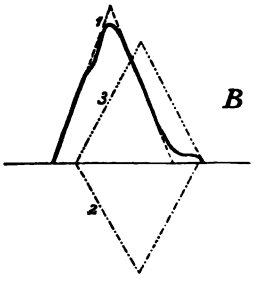
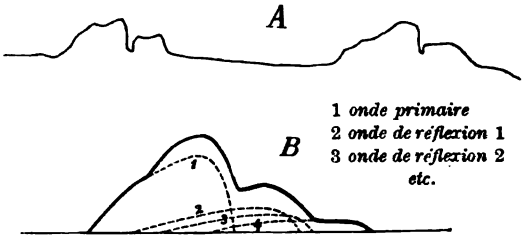




FIG. 6.




De la même manière j'ai obtenu dans une experience sur un tube élastique fermé au bout, la courbe sphygmographique fig. 6 *A* tandis que la construction donne la courbe fig. 6 *B*.

On peut donc conclure que cette construction donne dans plusieurs cas différents la vraie forme de la courbe sphygmographique, ce qui prouve à son tour la vérité des lois énoncées.

---

[1]) On appele la courbe *katacrote*, quand une élévation secondaire se manifeste dans la branche descendante et *anakrote* quand elle se montre dans la branche ascendante.

Mais alors il n'existe aussi aucun autre phénomène que celui de la *propagation*, de la *réflexion*, de la *pénétration* et de la *superposition* ou *interférence*.

5. Plusieurs auteurs ont observé dans leurs expériences des élévations particulières qu'ils ont désignées par des noms différents. Ainsi LANDOIS parle de „*Rückstosswellen*. *Elasticitäts-schwankungen*, *Ausgleichungsschwankungen*, MOENS considère comme très importantes les *Schliessungs* und *Oeffnungswellen*.

D'après ce que j'ai observé plus haut, on comprend que la seule question raisonnable est celle-ci: Ces élévations sont-elles des ondes primaires ou bien des ondes reflétées?

La réponse est que les „Rückstosselevationen" de LANDOIS sont des ondes de réflexion du deuxième ordre et que les *Schliessungswellen* de MOENS sont des ondes de réflexion du quatrième ordre.

Pour prouver le premier fait, je prends de nouveau les courbes Fig. 19 de LANDOIS [1]), Fig. 4 du texte, et calcule de ses indications sur les dimensions du tube et de son élongation pour un poids connu: $R = \frac{1}{2}$ cM., $a = \frac{4}{30}$ cM. $E = 7400$ grammes et ensuite par la loi de YOUNG $c = 10$ mètres. Le tube a une longueur de $255 + 116 = 371$ cM. et le temps que l'onde emploie pour parcourir deux fois le tube est donc $\frac{371}{500} = 0.76$ seconde. Selon LANDOIS [2]) la vitesse $v$ de la lame de verre de son sphygmographe était de 9 mM., de sorte que cet intervalle de temps de 0.76 seconde correspond à une distance de 6.84 soit 7 mM. Eh bien, dans les courbes Fig. 19 l'origine de la „Rückstosswelle" se trouve exactement à 7 mM. de l'origine de l'élévation primaire. La „Rückstosswelle" n'est donc autre chose qus le deuxième onde de réflexion.

Quant aux „Schliessungswellen" de MOENS. M. MOENS [3]) dit que le tube élastique avait une longueur de 670 cM., que dans la seconde série de courbes le sphygmographe se trouvait à 300 cM. et dans la quatrième série à 620 cM. de l'origine du tube. La différence de ces deux nombres est de 320 cM., ce qui cause dans les deux séries de courbes une différence de temps égale à 1.8 mM.; ainsi 1.8 mM. représente dans les courbes le temps que l'onde

---

[1]) l. c. pag. 109.

[2]) l. c. pag. 76.

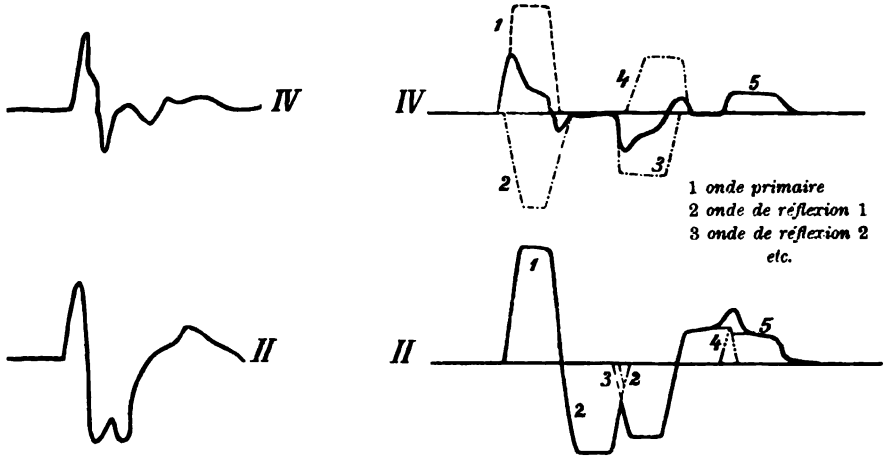
[3]) Die Pulscurve pag. 124.

emploie pour parcourir 320 cM. du tube. Alors le temps nécessaire pour parcourir 4 fois la longueur entière du tube est de:

$$\frac{670 \times 4}{320} \times 1.8 = 15 \text{ mM.}$$

Eh bien, à une distance de 15 mM. on retrouve dans toutes les courbes la „*Schliessungswelle*" de MOENS, indiquée par la lettre A. M. MOENS dit lui-même dans son „Dissertation" pag. 45 *la longueur d'une „Schliessungswelle" complète je l'ai trouvée égale à 4 fois la longueur du tube.*

FIG. 7.




Pour enlever tout doute sur le caractère des „*Schliessungswellen*" je donne, fig. 7 une copie exacte de deux courbes de MOENS II et IV. Fig. 16 et à coté la construction mathématique des mêmes courbes suivant le procédé indiqué plus haut.

Dans les „Oeffnungswellen" de MOENS [1]) on reconnaîtra maintenant aisément la *première* onde de réflexion, qui se montre très vite dans la courbe du sphygmographe placée à l' extrémité du tube et qui apparaît beaucoup plus tard dans les courbes du sphygmographe appliqué à l'origine du tube élastique Les „*Elasticitäts-elevationen*" et les „*Ausgleichungsschwankungen*" de LANDOIS ont une origine très variée. Souvent ce sont les ondes réfléchies du premier et du second ordre, tantôt, comme dans les fig. 26, 30 et 32, ce sont des mouvements du levier du sphygmographe, tantôt, comme dans les fig. 28, 31 et 35, elles sont dues à une irrégu-

[1]) l. c. fig. 20 et 21.

larité dans le mouvement de la latte, qui comprime et ferme le tube à l'origine.

Ainsi toute sorte d'élévation, observée dans les expériences nombreuses faites sur les tubes élastiques, peut être expliquée par l'interférence des ondes primaires avec les ondes de réflexion, quel que soit le nom particulier que certains auteurs ont donné à ces élévations.

Seulement il faut excepter ces élévations qui accompagnent l'onde primaire sur toute la longueur de son chemin et qui sont engendrées par l'onde primaire elle-même. Ce sont les ondes *secondaires* qui parcourent le tube avec la même vitesse $c$ que les ondes primaires et qui conservent toujours et à chaque point du tube le même intervalle de temps avec l'onde primaire, qu'elles suivent de près.

6. Toutes ces ondes primaires, secondaires et réfléchies éprouvent sur leur chemin l'influence de la friction due à la viscosité du fluide Cette viscosité est évaluée par HELMHOLTZ [1]) pour l'eau à 0.014, ce qui signifie qu'un tube rempli d'eau de 1 m.M. de diamètre et 140 c.M. de longueur laisse passer en une minute 1 c.M$^3$. d'eau. quand la pression à l'origine est de 1 c.M. d'eau supérieure à celle au bout de tube. EWALD [2]) trouve pour la viscosité du sang humain le nombre 0.034, donc environ 3 fois celle de l'eau [3]).

Cette friction, comme l'a prouvé expérimentalement E. K. WEBER [4]), fait que chaque élevation on dépression pendant son chemin à travers le tube *décroît* en *hauteur* et *croit* en *longueur*: l'onde s'aplatit et devient de plus en plus insignifiante. De plus à chaque réflexion l'onde perd un peu de son énergie d'où il suit que chaque onde en se réfléchissant, décroît en hauteur. C'est pour cette raison que les ondes de réflexion du quatrième ordre et du cinquième ordre sont rarement visibles

7. Si le tube se termine par une partie qui est plus large que le reste du tube, la réflexion est de la même nature que pour un tube ouvert, mais plus forte. Une *élargissement* du tube *augmente* donc la réflexion négative Un *retrécissement* au contraire *dimi-*

[1]) Wiener Sitz ber. 1860 pg. 40.

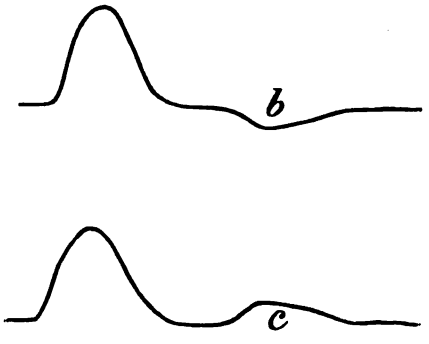
[2]) HERMAN. Lehrbuch der Physiologie pg. 68.

[3]) Dans une recherche récente M.M. DU PRÉ DENNING et WATSON, Proceedings Royal Society Série B Vol. 78 trouvent 2—11 fois selon le nombre des globules du sang.

[4]) l. c. Tabelle XIX et XX.

*nue* la réflexion négative et la change bientôt en une réflexion positive, comme on voit dans les courbes sphygmographiques de fig. 8 où la dépression *b* est transformée en une élévation *c*. On peut donc dire, comme l'a déjà trouvé M. GRASSHEY [1]), qu'un *élargissement* du tube donne lieu à une réflexion en *sens contraire* tout comme un tube ouvert, et que chaque *rétrécissement* occasionne une réflexion *positive* ou homonyme, tout comme un tube fermé.

FIG. 8.

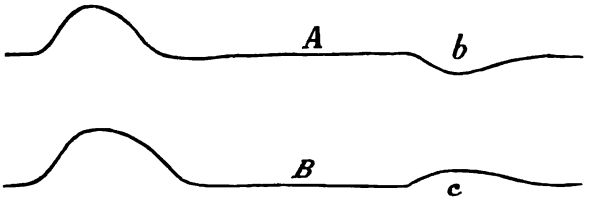



Si plusieurs tubes d'égales dimensions sont insérés sur un seul tube principal d'un plus grand diamètre, on constate aisément le résultat trouvé par MAREY, que chaque branche se conduit comme un tube indépendant et que les ondes de réflexion ne se transportent que *très affaiblies* d'une branche dans l'autre.

Quand un tube élastique se termine en plusieurs petits tubes peu larges, ce système se comporte par rapport à la réflexion comme un seul tube, dont l'épaisseur est égale à la somme des épaisseurs des petits tubes ensemble. Donc, quand cette somme est supérieure à l'épaisseur du tube principal, il y a réflexion négative et quand cette somme est beaucoup plus petite que l'épaisseur du tube principal, il y a réflexion positive

Voyez les deux courbes sphygmographiques, fig. 9, dont *A* s'obtient avec un tube peu épais se terminant en plusieurs tubes courts et assez larges, tandis que *B* s'obtient sur un large tube principal se terminant en plusieurs tubes courts et étroits.

FIG. 9.




De toutes ces considérations il résulte que dans le système artériel de l'homme on ne peut pas s'attendre à une réflexion très prononcée, car en fixant son attention sur le rétrécissement que chaque artère éprouve en se bifurquant on pourrait s'attendre à

[1]) l.c. pag. 45.

une réflexion positive, mais en observant que dans chaque ramification la largeur totale, la surface totale s'accroit, on s'attendrait à une réflexion négative. Il est donc incertain de quelle nature sera la réflexion periphérique dans les artères.

8. La déduction mathématique confirme les résultats obtenus par les expériences.

En négligeant la friction et prenant pour l'axe des XX l'axe du tube élastique, les équations différentielles du mouvement du fluide deviennent:

$$\varrho \frac{du}{dt} = - \frac{dp}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\varrho \frac{ds}{dt} = - \frac{dp}{dr} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\frac{du}{dr} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d(rs)}{dr} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

dans lesquelles:

$u$. représente la vitesse d'une particule de fluide au point $(x, r)$ dans la direction de l'axe.

$s$. la vitesse dans le même point dans la direction radiale.

$p$. la pression dans le même point et

$\varrho$. la densité du fluide, [1])

le tout exprimé dans les unités C. G. S.

De plus, si

$E$ est le module d'élasticité du tube élastique

$a$ l'épaisseur de la paroi

et $R$ le rayon du tube,

il faut que pour les points de la circonférence, pour $r = R$

$$p = \frac{Ea}{R^2} \int s \, d \, t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Les équations (1) et (2) expriment que l'accélération dans une certaine direction soit égale à la variation de la pression dans la même direction.

L'équation (3) indique que le fluide est incompressible et l'equation (4) exprime que l'extension d'un tube élastique par une pression intérieure dépend de l'élasticité et de l'épaisseur de la paroi et du rayon du tube. [2])

---

[1]) Lamb. Treatise on the motion of fluids pag. 222.

[2]) Voyen mon mémoire de l'Academie pag. 9 et 10.

En supposant que l'on donne au fluide à l'origine du tube un mouvement périodique de $N$ oscillations par seconde, on peut satisfaire à ces équations en posant:

$$p = p_0 + A\,F(r) \sin. \pi N \left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$u = u_0 + B\,F(r) \sin \pi N \left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$s = DF'(r) \cos \pi N \left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

où $F'(r)$ est l'équation dérivée de $F(r)$.

L'équation (1) donne alors:

$$B = \frac{A}{\varrho c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

et l'équation (2)

$$D = \frac{A}{\pi N \varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

tandis que l'équation (3) se réduit à

$$F(''r) + \frac{F'(r)}{r} - \frac{\pi^2 N^2}{c^2} F(r) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

dont la solution est la série convergente suivante

$$F(r) = 1 + \frac{\pi^2 N^2}{c^2} \cdot \frac{r^2}{4} + \frac{\pi^4 N^4}{c^4} \cdot \frac{r^4}{64} + \text{etc.} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Mais alors:

$$F'(r) = \frac{\pi^2 N^2}{2\,c^2} \cdot r \left(1 + \frac{\pi^2 N^2}{c^2} \cdot \frac{r^2}{8} + \text{etc}\right) \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

L'expression $\frac{\pi^2 N^2}{c^2}$ étant une fraction très petite, on peut écrire maintenaint:

$$p = p_0 + A \left(1 + \frac{\pi^2 N^2}{c^2} \cdot \frac{r^2}{4}\right) \sin \pi N \left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \ldots \quad (12)$$

$$u = u_0 + \frac{A}{\varrho c} \left(1 + \frac{\pi^2 N^2}{c^2} \cdot \frac{r^2}{4}\right) \sin \pi N \left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \ldots \quad (13)$$

$$s = A\,r \times \frac{\pi N}{2\,c^2\,\varrho} \cos \pi N \left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

L'équation (4) se réduit à:

$$c^2 = \frac{E\,a}{2\,R\,\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

c'est à dire, à la loi de Young, indiquée plus haut.

Les formules (12), (13) et (14) représentent une onde progressive qui se propage à travers le tube avec la vitesse constante $c$, calculée aussi par Résal et Korteweg.

Chaque particule du fluide possède à chaque moment deux vitesses, l'une longitudinle, $u$, l'autre, radiale, $s$ et décrit donc une courbe, qui se change pour les particules situées sur l'axe, dans une droite longitudinale, car, pour $r = 0$, $s$ devient aussi $= 0$.

On peut calculer la pression moyenne, $p_m$, de toutes les particules d'une même coupe du tube et l'on trouve alors:

$$p_m = p_o + A\left(1 + \frac{\pi^2 N^2}{c^2} \cdot \frac{R^2}{8}\right) \sin \pi N \left(t - \frac{x}{c}\right) \quad . . (16)$$

De même, on trouve pour la vitesse longitudinale moyenne

$$u_m = u_o + \frac{A}{\varrho c}\left(1 + \frac{\pi^2 N^2}{c^2} \cdot \frac{R^2}{8}\right) \sin \pi N \left(t - \frac{x}{c}\right) \quad . . (17)$$

d'où il suit que la quantité de fluide qui passe en une seconde par chaque coupe du tube, $q$, est égale à:

$$q = \frac{\pi R^2}{2}\left\{u_o + \frac{2A}{\pi \varrho c}\left(1 + \frac{\pi^2 N^2}{c^2} \cdot \frac{R^2}{8}\right)\right. \quad . . . . . (18)$$

De la formule (14) on peut calculer le chemin $y$, qu'un point de la paroi élastique parcourt pendant les oscillations du fluide. On trouve:

$$y = \int s\, d\, t = \frac{A R}{2 c^2 \varrho} \sin \pi N \left(t - \frac{x}{c}\right) \quad . . . . . (19)$$

et alors pour la variation du volume d'une certaine partie du tube:

$$\Delta V = \frac{A V}{c^2 \varrho} \sin \pi N \left(t - \frac{x}{c}\right) . . . . . (20)$$

où $V$ est le volume normal.

La plus grande variation de volume se trouve donc:

$$(\Delta V)_m = \frac{A V}{c^2 \varrho} . . . . . (21)$$

Par approximation on peut écrire

$$p_m = p_o + A \sin . \pi N \left(t - \frac{r}{c}\right) . . . . . (22)$$

$$u_m = u_o + \frac{A}{\varrho c} \sin . \pi N \left(t - \frac{r}{c}\right) . . . . . (23)$$

$$\text{et} \quad q = \frac{\pi R^2}{2}\left(u_o + \frac{2A}{\pi \varrho c}\right) . . . . . (24)$$

Dans la plupart des cas $u_0$ sera très petit ou zéro et (24) se change alors en:

$$q = \frac{A R^2}{\varrho c} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

et (19) en:

$$y = \frac{q}{2 R c} \sin . \pi N \left(t - \frac{r}{c}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Par l'influence de la friction ou de la viscosité du fluide (voyez § 6) les formules deviennent plus compliquées, car (22) et (23) se changent alors en:

$$p = p_0 + A e^{-\alpha x} \sin. N \left(t - \frac{x}{c'}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

$$u = u_0 + B e^{-\alpha x} \sin. N \left(t - \frac{x}{c'} + \delta\right) \quad \ldots\ldots \quad (28)$$

Maintenant l'amplitude des variations périodiques décroît avec la distance de l'origine à cause du facteur $e^{-\alpha x}$ et la vitesse de propagation $c$ se change en $c'$,

$$\text{où } c' = c \left(1 + \frac{32}{9} \pi^2 \mu^2 N^2\right)$$

de sorte que cette vitesse dépend aussi de la période $N$ des oscillations.

Enfin on voit dans la formule (28) que la vitesse $u$ arrive plus tôt à sa valeur maximale que la pression. Il y a pour la pression un retard exprimé par l'expression $\pi N \delta$ où

$$\delta = \tfrac{1}{2} \mu. \text{ [1]}$$

9. Avec le ballon à deux soupapes, le mouvement du fluide n'est plus oscillatoire, mais devient interrompu. A chaque compression du ballon une certaine quantité de fluide est rejetée dans le tube et augmente la pression. A chaque dilatation du ballon, celui-ci se remplit de nouveau de fluide, mais dans le tube le fluide est maintenant séparé du ballon et se meut seulement sous l'influence de l'élasticité de la paroi: la pression descend à sa valeur normale, mais ce dernier changement s'accomplit d'une tout autre manière que l'accroissement de la pression antérieure, dont la vitesse dépend de celle de la compression du ballon.

Il s'ensuit que la fonction qui indique la variation de la pression et de la vitesse n'est pas une vraie fonction sinusoïdale comme

[1]) $\mu$ est le coefficient de friction, indiqué § 6.

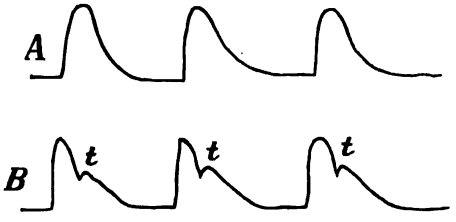
supposent les formules (5), 6, 7 mais une fonction plus conpliquée.

Dans chaque point du tube le sphygmographe inscrit donc une série d'élévations interrompues, dont la branche descendante prend une autre forme que la branche ascendante, comme on voit sans exception dans tous les sphygmogrammes

Mais il y a plus.

Tandis que l'on s'attendrait à une série de courbes de la forme figure 10 *A*, on obtient *toujours* avec le ballon à deux soupapes des courbes de la forme *B*, c'est à dire, dans la partie descendante de chaque élévation, se forme une nouvelle élévation, plus ou moins prononcée, indiquée par le caractère *t*. Cette élévation *t* ne manque jamais dans les expériences avec des tubes élastiques et ne manque non plus dans les sphygmogrammes du pouls humain où cette élévation a obtenu le nom *d'élévation dicrotique*.

FIG. 10.




Quelle est donc la cause de cette élévation secondaire?

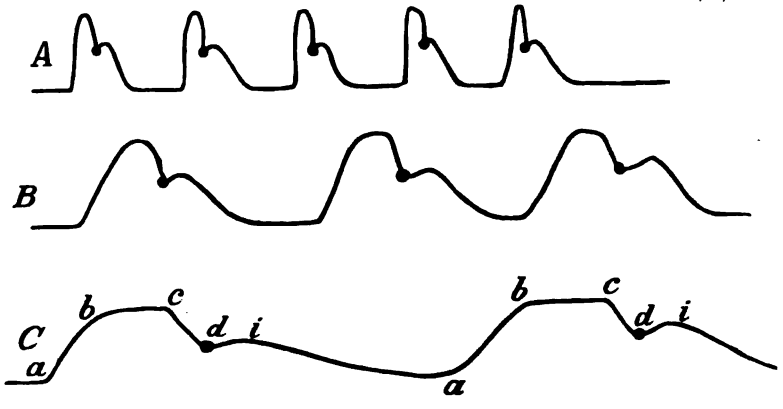
Par les expériences avec les tubes élastiques on peut prouver que cette élévation secondaire est due à la clôture de la soupape *f'*, Fig 2, qui se trouve entre le ballon et le tube et qui dans ces expériences remplit la même fonction que les valves semilunaires dans la circulation du sang. L'enlèvement de cette soupape change instantanément les courbes de la forme fig. 10 *B* en celles de la forme *A*.

L'importance de cette conclusion m'a induit à la prouver encore d'une autre manière.

Dans mes expériences sur les tubes élastiques, fig. 2, j'ai arrangé les soupapes métalliques de manière à ce que la clôture de la soupape fermait un courant électrique, qui, à l'aide d'un relai, interrompait un autre courant plus fort, passant par le fil primaire d'une bobine de RUMKORFF. Le fil secondaire de cette bobine était relié au levier du sphygmographe et avec le cylindre métallique, couvert de papier enfumé. Dans le circuit secondaire se trouvait aussi une grosse bouteille de Leyde de sorte qu'au moment précis où la soupape se fermait, une forte étincelle jaillit du levier enrégistreur par le papier sur le cylindre tournant. Ainsi un signe visible se montra dans la courbe sphygmographique au moment précis où la soupape se fermait.

Voyez maintenant la fig. 11, où l'on trouve la marque des étincelles sans exception là où l'élévation secondaire *t* commence. Les courbes *A*, *B* et *C* sont décrites avec une vitesse croissante du cylindre tournant, mais même dans le cas *C* d'une vitesse extraordinaire on trouve les traces de l'étincelle exactement au même point de la courbe

Fig. 11.




Ainsi on peut donner l'explication suivante de la présence de cette élévation secondaire.

Par la compression du ballon on rejette une certaine quantité d'eau dans le tube, la pression augmente, la paroi élastique se dilate et commence à réagir et à presser l'eau vers les deux côtés. Alors la quantité d'eau qui passe du ballon dans le tube diminue et bientôt à l'origine du tube s'écoule la même quantité, qui entre du ballon. Le sphygmographe inscrit la partie *a b c* de la courbe.

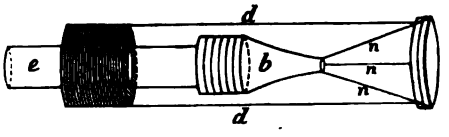
Maintenant on cesse de comprimer le ballon, l'eau par la réaction de la paroi dilatée, combinée avec le gonflement du ballon élastique se meut avec une grande vitesse vers le ballon, la soupape *f'* se ferme et l'eau, en rebondissant sur cette soupape, forme une onde nouvelle, qui se marque dans la courbe par l'élévation *i*.

Ainsi il est clair que le point *a* de la courbe sphygmographique indique le moment où la soupape *f'* s'ouvre, le point *c* celui où l'on cesse de comprimer le ballon et le point *d*, celui où la soupape *f'* se ferme. Dès ce moment l'eau du tube élastique est entièrement séparée de l'eau du ballon et le mouvement de l'eau dépend uniquement de l'élasticité de la paroi. La partie de la courbe sphygmographique suivant l'élévation secondaire représente donc le mode dont le tube dilaté revient à sa forme primitive.

E. H. WEBER a remplacé [1]) les soupapes métalliques par des valves membraneuses, qui ressemblent beaucoup dans leur mode d'action aux valves du coeur humain.

Sur un tube de bois *e b* est attaché un morceau de boyau, dont l'autre bout est fixé, à l'aide de trois fils de soie, à un tube de verre *d*, auquel le tube de bois est collé. Cette valve ne présente aucun obstacle à un courant d'eau *e* vers *b*, mais par un courant en sens contraire, le boyau est rejeté et se ferme solidement.

FIG. 12.




En remplaçant la valve métallique *f'* par une valve de cette espèce on obtient des courbes sphygmographiques de la forme figure (13). L'élévation secondaire *t* se montre plus tard. mais elle existe sans aucun doute. Ainsi une valve aussi mince que celle de WEBER peut causer l'élévation secondaire *t*.

FIG. 13.

Cette élévation se propage dans le tube avec la même vitesse que l'élévation primaire, et se montre donc dans toutes les courbes sphygmographiques de tous les points du tube à une distance égale de l'élévation primaire.

10. Ce qui est indiqué par le sphygmographe, c'est la quantité *y*, trouvé par la formule 26 d'où il suit que la surface de chaque courbe sphygmographique est en proportion directe du débit de fluide par seconde, *q*.

Dans la mesure de cette surface à l'aide d'un micromètre en verre quadrillé, on possède donc un moyen très important pour déterminer la grandeur *q*, sans recueillir à l'extrémité du tube la quantité de fluide rejeté.

J'ai fait [2]) beaucoup d'expériences pour comparer les valeurs de *q*, trouvée par cette méthode, avec la vraie valeur de *q* trouvée par la mesure directe du fluide rejeté et j'ai constaté que les erreurs commises par cette méthode ne surpassent pas 10 %.

Dans les expériences nombreuses faites par DOGIEL avec le

---

[1]) l. c. pag. 185.

[2]) Mem. de l'academie pag. 47.

„Stromuhr" de LUDWIG [1]) sur les animaux, les erreurs étant souvent plus grandes.

La même grandeur importante, $q$, peut être déterminée en mesurant la variation que la pression, $p$, éprouve pendant la compression périodique du ballon élastique, car d'après la formule (22).

$$p_m = p_o + A \sin \pi N \left(t - \frac{x}{c}\right)$$

A représente la grandeur de cette variation et parce que selon la formule (25)

$$q = \frac{A R^2}{\varrho c}$$

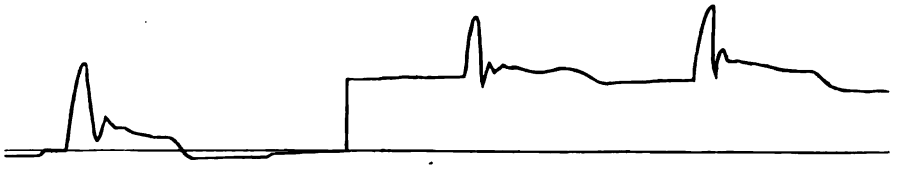
on peut calculer, $q$, quand on sait l'amplitude, $A$, de la variation de la pression.

La grandeur $q$ se trouve donc directement proportionelle à cette amplitude $A$. Pour le même tube une plus grande variation de pression indique une plus grande quantité de fluide rejeté dans le tube par seconde.

11. Quelle est l'influence de la pression constante $p_o$ sur la forme de la courbe sphygmographique? [2])

Avec mon appareil, fig. 2, je pouvais aisément varier la pression constante, $p_o$, dans le tube, en élevant le réservoir $J$ à une hauteur quelconque au-dessus du réservoir $A$. De cette manière j'étais en état de varier cette pression de 0 à 300 cM. d'eau, soit 220 mM. de mercure.

FIG. 14.



En appliquant alors le sphygmographe au commencement du tube, j'obtins les courbes fig. 14, où la première est obtenue pendant la pression constante 0 et les deux suivantes sous la pression constante de 220 mM. mercure. Si l'on ne fait pas attention à la grandeur ni à la position absolue des trois courbes, la ressemblance

---

[1]) Ber. Sächs. Gesellsch. Bd. 19, 1867 pag. 200.

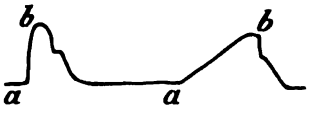
[2]) Voyez sur ce point les expériences récentes de *Mackenzie*, Study of the pulse.

est très grande. On reconnaît donc qu'une variation assez considérable de la pression interne n'a qu'une influence négligeable sur la forme de la courbe sphygmographique.

C'est ce qui suit aussi des expériences de LANDOIS [1]) car les courbes des Fig. 42 *A*, *B*, *C* et *D* se ressemblent beaucoup quoique pour *B* et *D* la pression interne fût zéro tandis que pour *A* et *C* la pression s'élevait à 150 m.M. de mercure La seule différence que l'on puisse observer dans les courbes de LANDOIS c'est que pour les pressions plus grandes la courbe dercend plus bas, même jusqu' au dessous de l'axe. Pourtant il n'existe aucune raison pour cette dépression, dont je cherche la cause dans la très quande rapidité avec laquelle la pression retombe à sa valeur normale. Comme je l'ai démontré dans mon memoire à l'Academie Chapitre Ier le levier du sphygmographe fait dans ce cas lui-même un mouvement, qui se manifeste toujours quand son mouvement est trop rapide.

Donc, il n'existe dans les courbes sphygmographiques aucun signe certain auquel on puisse reconnaître la pression. Seulement si la pression interne devient excessive, comme dans les expériences de LANDOIS avec des tubes à peu près complètement fermés au bout, la ligne ascendante dévie de la direction verticale et s'incline de plus en plus, ce qui indique que l'accroissement de la pression est ralenti. Voyez fig. 15, où la ligne ascendante *ab* devient plus inclinée à cause de la grande pression.

FIG. 15.




Mais dans les cas ordinaires les courbes sphygmographiques ne peuvent nous révéler la grandeur de la pression interne et comme la connaissance de cette pression est cependant d'une très grande importance, il faut chercher un autre moyen de déterminer cette grandeur.

Déjà HALES et POISEUILLE ont appliqué le manomètre à mercure au système artériel de plusieurs animaux. De cette manière ils trouvèrent pour la pression dans la carotide du cheval 147 mM. de mercure et dans la carotide du chien 141 mM. de mercure. Mais il fallut ouvrir l'artère pour y insérer le manomètre. Pour les artères de l'homme on a inventé une autre méthode, existant dans la détermination de la pression extérieure, nécessaire

[1]) l. c. pag. 159.

à comprimer tout à fait l'artère. Nous décrirons plus tard la méthode exacte. Ici je me contente de communiquer que j'ai aussi appliqué cette méthode aux tubes élastiques, remplis d'eau sous une pression connue.

Avec un ressort dont la force de pression était déterminée d'avance, je tâchai de comprimer le tube au point qu'un mouvement oscillatoire provoqué au commencement du tube ne se communiquait plus à un sphygmographe placé au de là du point de compression

Je découvris ainsi que pour comprimer complètement un tube vide même très mou, il fallait une force peu différente de celle que l'on devait appliquer au tube rempli d'eau sous une certaine pression et que la détermination de cette pression au moyen de la méthode indiquée donna lieu à de grandes erreurs.

Voici quelques résultats:

| Pression trouvée avec le ressort. 0 cM. d'eau | Pression vraie 0 cM. d'eau |
|---|---|
| 23 | 21 |
| 104 | 97 |
| 160 | 159 |
| 219 | 226 |
| 391 | 400 |

Quoique je fisse ces expériences sous des circonstances très favorables, les erreurs montèrent quelquefois à 9 cM.

---

## CHAPITRE II.

### Sur le mouvement du sang.

12. Le mouvement pulsatoire du sang dans les artères qui se manifeste par le pouls, était déjà connu des anciens. Aristote, Hippocrate l'avaient observé et Galène (150 années après J. C.) distingue déjà plusieurs sortes de pouls savoir: le „pulsus celer ou tardus, le pulsus frequens et rarus, le pulsus dicrotus, intermittens ou difficiens Non seulement Galène connaissait l'influence de l'âge sur la fréquence du pouls, mais aussi il conseille aux medecins de bien observer si la fréquence du pouls s'accorde avec l'âge du malade.

En 1834 un médecin français, HÉRISON, inventa un instrument qu'il nommait *sphygmomètre*, consistant en un tube rempli de fluide, ouvert à l'extrémité supérieure et fermé à l'autre extrémité par une membrane élastique. Le tube repose au moyen de cette membrane sur l'artère qu'on veut explorer et à chaque battement du pouls on voit osciller le fluide dans le tube.

En 1837 un physiologiste anglais, nommé KING, eut l'idée de rendre visibles les pulsations d'une artère, en y fixant tangentiellement un mince fil de verre. L'extrémité de ce fil traduisait en les amplifiant le mouvement des ondes sanguines.

VIERORDT remplaça le fil de verre de KING par un système de leviers dont le dernier inscrivait ses mouvements sur le cylindre tournant du *Kymographe* de LUDWIG.

Ainsi VIERORDT obtenait pour la premiere fois sur du papier enfumé des courbes sphygmographiques, des sphygmogrammes qui indiquaient d'une manière claire et permanente le mouvement pulsatoire du sang. Donc VIERORDT construisit le premier *sphygmographe.*

MAREY fit à cet appareil le reproche mérité de présenter trop de force d'inertie et construisit en 1863 un sphygmographe où la masse des parties mouvantes était réduite à une valeur minimale et dans lequel la pression nécessaire était effectuée par un ressort métallique.

Le sphygmographe est attaché au poignet par un lacet, passant alternativenent sur de petits crochets placés des deux côtes. Ceux-ci sont fixés à des ailettes articulées sur les bords d'un cadre qui constitue le support de l'appareil. Le lacet complète donc en arrière une sorte de bracelet que forme en avant le cadre métallique. Dans l'intéreur du cadre se trouve un ressort d'acier très flexible qui descend obliquement et porte à son extrémité libre la plaque d'ivoire arrondie qui serre l'artère. Une vis régulatrice sert à faire varier la pression du ressort. Chaque pulsation de l'artère radicale imprimera au ressort un petit mouvement, qui sera amplifié par le levier et inscrit par la plume, qui le termine. Un mouvement d'horlogerie entraîne parallélement au plan d'oscillation du levier une plaque enfumée qui reçoit la trace. Pour amplifier le mouvement, on se sert d'un levier très léger, fait de bois ou d'aluminium.

Le sphygmographe de MAREY a été longtemps l'instrument dont les physiologistes et les médecins de toute l'Europe se servaient sans exception

Plus tard BÉHIER, BURDON SANDERSON, BAKER, LANDOIS et DUDGEON l'ont amélioré et perfectionné.

Le sphygmographe de DUDGEON date de notre temps et jouit partout d'une grande réputation.

Le „Cambridge Scientific Instrument Co" fournit cet appareil inscrivant le mouvement du pouls 50 fois agrandi sans que la forme de la courbe souffre notablement du mouvement propre de l'instrument.

On trouve une description du sphygmographe de DUDGEON dans la technique sphygmographique de VASCHIDE et LAHY publiée dans le „Revue de médecine" No. 24, 1904

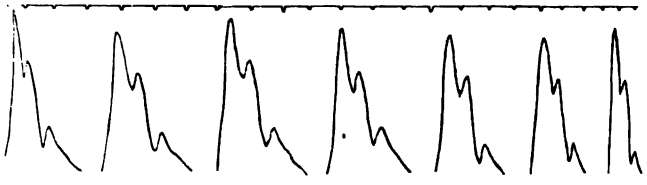
Parmi les principaux avantages de cet instrument on cite:

1° une fixation plus solide sur le bras;

2° une régulation plus parfaite de la pression du ressort, et

3° l'indication du temps sur la courbe obtenue.

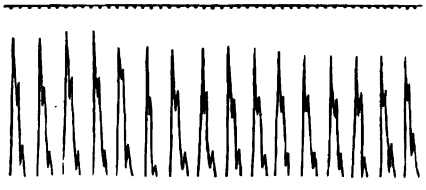
FIG. 16.



On voit dans figure 16 une série de courbes tracées par le sphygmographe de DUDGEON. Au-dessus des courbes on voit une ligne droite entrecoupée. Chaque division correspond à un intervalle d'un quart de seconde

J'ai fait moi-même des expériences avec cet instrument, mais je ne peux pas affirmer qu'il soit tout à fait exempt de mouvement propre.

FIG. 17.



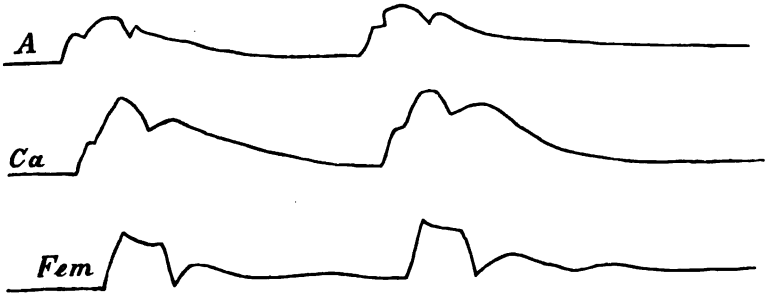
Au contraire, je crois qu'ici les sphygmogrammes sont plus détériorés par le mouvement propre de l'instrument que dans ceux du sphygmographe de MAREY. Par exemple la grande première élévation secondaire de fig. 16 à environ $\frac{1}{4}$ seconde de l'élévation primaire est certainement due au mouvement propre du levier. Par la grande vitesse le levier en s'élevant, surpasse le véritable sommet et dessine faussement un sommet trop élevé, comme on s'en aperçoit encore plus clairement dans les courbes de fig. 17, tracées avec le même instrument, mais avec une vitesse plus petite du papier. Les points élevés de fig. 17 traduisent la vraie nature de la pre-

mière élévation secondaire de fig. 16. Elle est produite par le mouvement propre du levier et la vraie forme de la courbe sphygmographique n'est pas fig. 18 (*a*), mais fig. 18 *b*.

FIG. 18.

MAREY a inventé aussi un sphygmographe à transmission d'un usage très commode avec lequel on peut inscrire sur un même cylindre enfumé les pulsations simultanées des différentes artères. Le mouvement pulsatoire dans l'artère se communique alors à l'air d'une ampoule métallique à membrane de caoutchouc et cette ampoule est mise en rapport par un étroit tube élastique avec celui du tambour à levier inscripteur. On prend le tracé sur le cylindre enfumé d'un polygraphe.

FIG. 19.




La Fig. 19 est une copie des courbes simultanées trouvées par MAREY [1]) sur l'aorte *A*, l'artère carotidienne *Ca* et l'artère fémorale *Fem* d'un cheval à l'aide du sphygmographe à transmission.

On constate ici très clairement que le pouls de l'artère fémorale se fait sentir plus tard que celui de l'artère carotidienne et que le dernier a aussi un rétard sur celui de l'aorte. Ainsi se prouve d'une façon directe que le mouvement du sang dans les artères est vraiment une onde progressive. Ce fait a été constaté par E. H. WEBER en 1850, mais 41 années plus tôt, en 1809, THOMAS YOUNG le connaissait et calculait déjà la vitesse de propagation *c*, comme je l'ai remarqué plus haut.

Dans la figure (19) on peut mesurer cette vitesse, si l'on détermine aussi exactement que possible sur l'aninal la distance des points d'application des trois sphygmographes. De cette manière plusieurs

[1]) Circulation p. 226.

expérimentateurs ont trouvé pour $c$, une valeur que j'ai donnée plus haut et que je répète ici

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| WEBER | 8—9 | metres | par | seconde. |
| GRASSHEY | $8^1/_2$ | " | " | " |
| MOENS | $7—8^1/_2$ | " | " | " |
| HOORWEG | 9 | " | " | " |

THOMAS YOUNG a donné aussi la formule, retrouvée plus tard par RÉSOL et KORTEWEG savoir:

$$c = \sqrt{\frac{Ea}{2R\varrho}}$$

où $E$ est le module d'élasticité de l'artère

$a$ l'épaisseur de la paroi
$R$ le rayon de l'artère
et $\varrho$ la densité du sang.

$c$ dépend donc du module $E$ et comme MAREY [1]) a prouvé que le module des artères n'est pas constant mais accroit avec la pression interne, il faut que la vitesse $c$ dépende aussi de cette pression $p$.

MOENS [2]) a fait une série d'expériences sur l'élasticité des artères. Malheureusement la plupart de ces expériences ont été faites en tendant l'artère longitudinalement, tandis que pour la question qui nous occupe, il faut déterminer la dilatation transversale. Mais il s'y trouve aussi une seule série d'observations sur la dilatation transversale de l'aorte descendante d'un homme, à l'aide desquelles on peut étudier la relation entre $p$ et $E$.

Voici une copie du tableau pag. 105 de MOENS

| $p$ en c.M. d'eau | $c$ en c.M. |
|---|---|
| 156 | 735 |
| 140 | 731 |
| 126 | 442 |
| 75 | 346 |
| 58.7 | 275 |

La pression normale dans l'aorte descendante de l'homme, sur laquelle les expériences ont été faites, étant de 180 m.M. de mercure ou de 243 c.M. d'eau, on voit que les expériences n'ont pas

---

[1]) Circulation pg. 161.
[2]) Die Pulscurve pg. 104.

été continuées jusqu'à la pression normale. Les valeurs de $c$ variant très sensiblement pour des pressions tres petites, se rapprochent pour des pressions égales à la pression normale, à une valeur constante, que l'on peut déduire de ce tableau par extrapolation. C'est ainsi qu'on peut déduire des expériences de MOENS que dans le voisinage de la pression normale la variation de $c$ est petite. Même si la pression intérieure tombe de 200 m.M. de mercure à 100 m.M. de mercure la valeur de $c$ ne varie que de 840 c.M. à 731 c.M. En admettant maintenant que l'artère du pied est éloignée du coeur de 160 c.M., cette variation de $c$ cause un retard de 0.0284 seconde. Dans son travail sur le pouls [1]) M. v. KRIES dit qu'aucun de ces nombres n'est certain à 2—3 centièmes de seconde. Donc un décroissement de la pression interne de 200 mM. à 100 mM. de mercure n'aurait qu'un effet imperceptible sur le temps, où l'onde sanguine arrive dans ces régions éloignées du coeur.

Voilà l'effet précis de la variation de $c$ avec la pression du sang.

Maintenant on peut apprécier à sa vraie valeur la proposition de M. MOENS de déterminer la pression du sang par la mesure de la vitesse de propagation $c$.

M. v. FREY [2]) regarde aussi l'influence de la pression du sang sur la vitesse de propagation $c$, comme un facteur de haute importance et tâche de relier cette idée à plusieurs particularités, qu'il observe dans la forme des sphygmogrammes. C'est pour cette raison que j'ai voulu prouver par les expériences mêmes de M. MOENS qu'il s'est trompé dans ses déductions.

Dans les cas normaux la pression du sang dans les artères de l'homme ne varie jamais assez pour causer un retard appréciable dans le temps où l'onde sanguine arrive à un certain point du système artériel. Seulement des hémorrhagies graves et répétées, des médicaments de nature vénéneuse, l'irritation de certains nerfs peuvent réduire la pression de telle sorte qne la vitesse de propagation en est affectée notablement.

13. En regardant attentivement les figures 16—19, on y retrouve, comme dans presque tous les sphygmogrammes, l'élévation secondaire observée dans les expériences faites avec les tubes élastiques et le ballon à deux soupapes, et désignée par le caractère $t$. C'est l'élévation que connaissent tous les physiologistes et tous ces

---

[1]) Arch. de DU BOIS-REYMOND 1887 S. 276.

[2]) Untersuchung des Pulses.

médecins sous le nom d'*élévation dicrotique* et dont on a longtemps cherché la cause.

Dans les expériences avec les tubes élastiques l'élévation, *t*, est indubitablement la conséquence de la clôture de la soupape qui se trouve entre le ballon et le tube. Dans le cœur humain on trouve un appareil identique dans les valvules semilunaires. Il est donc très vraisemblable que le dicrotisme du pouls humain est causé par la clôture de ces valvules.

Pour prouver cette observation importante je plaçai le tambour du sphygmographe à transmission sur l'artère carotidienne d'un homme et observai en même temps à l'aide d'un stéthoscope les bruits du cœur. On sait que selon tous les physiologistes le second son du cœur coïncide avec la clôture des valvules semilunaires. Je suivis de la main le rythme de ces bruits et quand je fus sûr que le mouvement de la main était synchrone avec ces bruits, je frappai une clef de Morse qui interrompit le courant d'une bobine de Rumkorff et au même instant une forte étincelle se montra entre l'extrémité du levier enregistrant et le cylindre enfumé du polygraphe. Avec un peu d'exercice on peut atteindre dans cette sorte d'expériences un grand degré d'exactitude.

C'est ainsi qu'il se forma sur la courbe sphygmographique un signe visible, indiquant le moment précis où les valvules semilunaires se sont fermées. Voyez fig. 20, le résultat d'une de ces expériences, qui eurent toujours le même succès.

Fig. 20.

Dans 4 des 7 sphygmogrammes du pouls carotidien on voit distinctement la marque des étincelles au commencement de l'élévation dicrotique.

En comparant ces expériences avec celles de la fig. 11 faites d'une manière semblable avec les tubes élastiques, il faut conclure qu'en effet l'élévation dicrotique du pouls de l'homme a la même cause que l'élévation secondaire *t*, observée dans toutes les expériences avec les tubes élastiques et qu'elle est due par conséquent à la clôture des valvules semilunaires.

14. Néamoins il se pourrait — et plusieurs physiologistes l'ont cru et le croient encore —, que l'élévation dicrotique fût une de ces ondes de réflexion comme il s'en montre si souvent dans les expériences avec les tubes élastiques.

Mais alors il est très difficile de comprendre pourquoi cette

onde se montre sur tous les sphygmogrammes à l'instant où les valvules semilunaires se ferment. Une onde de réflexion arrive à un certain point du système artériel à un temps dépendant seulement du chemin parcouru, c. à. d. de la distance du point de réflexion et ce temps est tout différent pour l'artère carotidienne, la brachiale, la radiale, la fémorale, etc. L'onde de réflexion doit se constater très vite dans le pouls de l'artère radiale et l'artère du pied, plus tard dans celui de la carotide, encore plus tard dans celui de la brachiale et de la fémorale.

Je sais bien que l'on accepte quelquefois avec LANDOIS que les ondes de réflexion des différentes branches du système artériel se confondent en une seule onde complète, qui se réflechit pour la deuxième fois sur les valvules fermées et se propage alors dans toutes les branches artérielles; mais cette supposition est *inadmissible.* Car les expériences de MAREY et les miennes prouvent que dans un tube ramifié les ondes réfléchies de chaque branche se montrent indépendantes de celles des autres branches. De plus il est tout à fait impossible que ces ondes réfléchies puissent se confondre en une seule onde, parce qu'elles arrivent au cœur à un moment très différent.

15. Il est donc évident que puisque l'origine de l'élévation dicrotique se manifeste dans tous les sphygmogrammes de l'homme à un *égal intervalle de temps* de l'origine de l'élévation primaire, cette élévation dicrotique ne peut jamais être une onde de réflexion.

L'égalité de cet intervalle de temps a été niée par MM. LANDOIS, v. FREY et v. KRIES mais il a été constaté par MM. MAREY, GRASSHEY, HÜRTLE et HOORWEG.

M. LANDOIS dit que cet intervalle de temps, $t$, devient plus grand à mesure que le point d'application du sphygmographe est plus éloigné du coeur. M. v. KRIES trouve le même résultat. M. v. KRIES donne les nombres suivants [1])

| | | |
|---|---|---|
| *A.* Carotis | $t = 0.26$ | seconde |
| *A.* Brachialis | $t = 0.27$ | „ |
| *A.* Radialis | $t = 0.28$ | „ |
| *A.* Femoralis | $t = 0.33$ | „ |
| *A.* dorsalis pedis | $t = 0.32$ | „ |

[1]) DU BOIS Archiv 1887 S. 275.

A l'exception de la dernière artère [1]) tous ces nombres accoissent très régulierement à mesure que la distance du coeur augmente.

Les courbes sur lesquelles M. v. KRIES a exécuté ses mesures se trouvent au Tableau *V* du travail indiqué. Avec les indications de temps qui se trouvent dans ce Tableau, j'ai mesuré à nouveau avec beaucoup de soin à l'aide d'une loupe l'intervalle de temps, *t*, mais je n'ai pas pu retrouver les nombres donnés par M. v. KRIES: je trouve sur toutes les courbes l'intervalle, *t*, égal à 0.29 seconde, à l'exception du pouls du fémur pour lequel je trouve *t* un peu plus grand, soit de 0.31 seconde.

Mais dans les „Untersuchungen" de M. VON FREY, p. 168 se trouvent deux sphygmogrammes très amplifiés de M. v. KRIES des artères radiale et fémorale avec indication de temps et sur ces *deux* courbes l'intervalle, *t*, est exactement égal, savoir 0.29 seconde.

Cela prouve qu'il est vrai ce que M. v. KRIES dit lui-même [2]) qu'aucun de ses nombres n'est exact à deux ou trois centièmes de seconde, mais alors il ne reste pas beaucoup de la variabilité présumée de *t* pour les pouls divers.

M. EDGREN, cité par M. v. FREY [3]), trouve aussi pour l'artère carotide le même intervalle de temps, *t*, que pour l'artère radiale, savoir 0.29 seconde.

M. LANDOIS a fait beaucoup de recherches sur ce point et a réuni les résultats dans une courbe très amplifiée: pour chaque artère principale une courbe différente. LANDOIS fait ses mesures sur ces courbes amplifiées, mais sans exception il cherche la distance des *sommets* et, comme je l'ai prouvé plus haut, ce mode de mesurer est erronée; il faut mesurer depuis *l'origine* de l'élévation primaire jusqu'à *l'origine* de l'élévation secondaire Malheureusement l'origine de l'élévation primaire manque sur presque toutes les courbes de LANDOIS et par cette raison les mesures de LANDOIS méritent peu de confiance.

Dans le „Lehrbuch der Physiologie" de M. LANDOIS, dernière édition, je trouve encore des courbes sphygmographiques, inscrites sur une plaque enfumée vibrante. Ici la courbe est formée par de petites ondulations, dont chacune représente un intervalle

---

[1]) Mais d'où vient cette exception.

[2]) l. c. p. 276.

[3]) Untersuch. p. 163.

de temps connu. Cette méthode d'enregistrer le pouls est très ingénieuse, mais ne peut pas donner de résultats exacts parce que tout mouvement propre du levier, si petit qu'il soit, augmente le nombre des petites ondulations, indicatrices du temps. Cela n'empêche pas que des 3 courbes faites de cette manière deux donnent encore $t = 0.29$ seconde.

La Fig. 19 donne les trois courbes sphygmographiques trouvées par MAREY sur l'aorte, la carotide et le fémur du cheval et dans les trois courbes le commencement de l'élévation dicrotique se trouve à une égale distance du commencement de l'élévation primaire.

Moi-même j'ai fait un grand nombre d'expériences sur ce sujet. Voici (fig. 21) trois sphygmogrammes inscrits simultanément. La courbe supérieure est celle de l'artère crurale, la seconde de l'artère du pied et la troisième de l'artère radiale. Sur toutes les trois courbes la distance $p\,s$ est exactement égale à 4 mM., quoique les trois points d'application du sphygmographe sont à une distance du coeur toute différente Voyez aussi (fig. 22) deux courbes, dont l'une $A$, se trouve sur l'artère carotidienne, tandis que $B$ est enregistré par les changements de volume périodiques que, d'après les expériences de Mosso[1]) le doigt éprouve sous l'influence de la pulsation du sang. Encore sur ces deux courbes la distance $p\,s$ est rigoureusement égale, quoique le doigt se trouve justement au bout de l'artère où la première onde de réflexion coïncide presque complètement avec l'onde primaire.

FIG. 21.

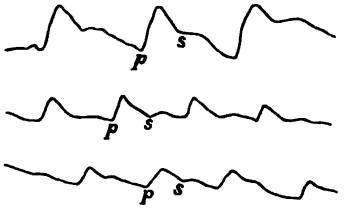
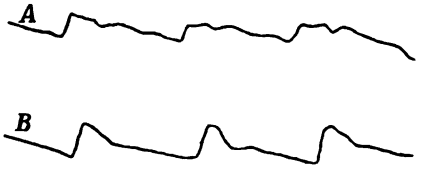



FIG. 22.



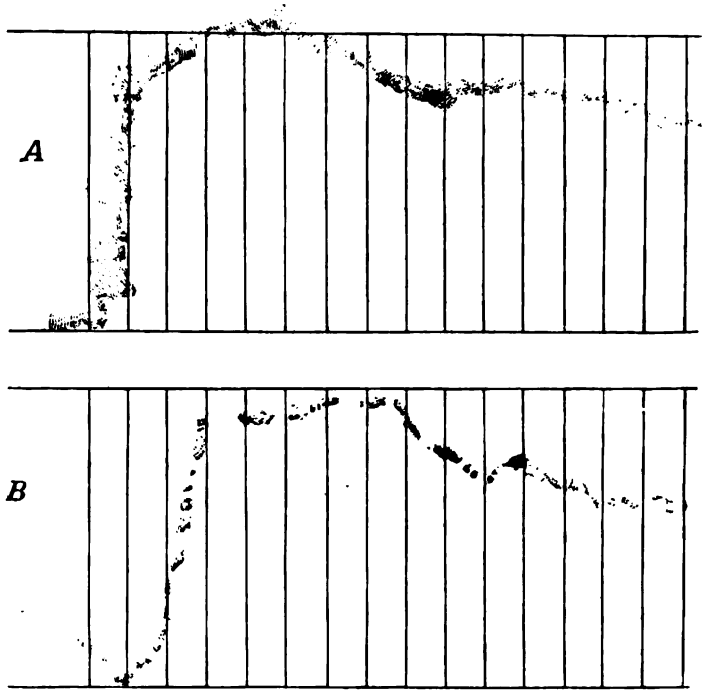

16. Comme j'ai prouvé au paragraphe 4, les ondes réfléchies du second ordre arrivent à chaque point du système artériel dans un même intervalle de temps, $t$, après l'onde primaire; donc on pouvait encore présumer que l'onde dicrotique n'était autre chose que la seconde onde de réflexion.

Pour cette onde l'intervalle de temps $t$, est égal pour toutes

[1]) Reale Accademia di Scienze di Torino vol. 11.

les artères de la même personne, mais dépend de la longueur de l'artère, de sorte quelle est différente pour deux personnes de différente taille. Pour vérifier la chose, j'ai enregistré simultanément le pouls radial de deux personnes normales, dont l'une avait une taille de 162 cM. et l'autre une de 132 cM. Ensuite

FIG. 23.




j'ai photographié avec un très grand grossissement les deux courbes sur une échelle divisée et mesurée sur les deux courbes la distance *ps*, du commencement de l'onde dicrotique au commencement de l'onde primaire.

Voyez figure 23, où *A* représent le photogramme du pouls de l'homme de 162 cM. et *B* celui du pouls de l'homme de 132 cM. Dans les deux courbes on trouve la distance *ps* égale à 9 unités de temps. Ainsi j'ai prouvé que l'onde dicrotique ne peut pas être la deuxième onde de réflexion.

17. Dans le paragraphe 7 j'ai indiqué la raison pour laquelle on ne peut pas s'attendre dans le système artériel de l'homme à une réflexion puissante. On ne sait pas même d'avance de quelle sorte cette réflexion doit être. En remarquant que chaque artére se bifurque dans plusieurs artères de plus petite dimension, on peut s'attendre à une réflexion positive, mais en considérant que la section totale

de ces petits rameaux est toujours plus grande que celle de la branche principale, on peut conclure à une réflexion négative. Laquelle de ces deux circonstances aura le plus grand effet?

L'expérience prouve que ces deux circonstances se contrebalançent assez bien, de sorte que les ondes de réflexion dans le système artériel sont ordinairement de peu d'importance.

C'est ce que prouvent les expériences mêmes, faites par MM. VON FREY et VON KRIES pour constater l'existence de ces ondes.

M. VON FREY assisté par M. KREHL [1]) a ouvert le thorax d'un chien et après avoir éloigné le cœur et les poumons, a mis l'aorte en contact avec un réservoir à robinet, rempli de sang défibriné. Alors on introduisit deux manomètres, l'un dans l'artère subclave gauche, l'autre dans l'artère cœliaque. En ouvrant rapidement le robinet le sang défibriné du réservoir se jetait dans les artères du chien et provoquait une onde positive qui se propageait dans tout le système artériel et se manifestait aux deux manomètres enregistreurs. Dans ces expériences les courbes inscrites montrèrent une élévation primaire très prononcée de 320—360 mM. de hauteur et dans la partie ascendante de ces deux élévations on aperçut des ondulations que les expérimentateurs regardent comme des ondes de réflexion du système artériel du chien.

Déjà en 1890 j'ai indiqué la vraie nature de ces ondulations. Elle sont dues à la réflexion, non pas sur la partie capillaire du système artériel, mais *sur les deux manomètres* ou *tonographes* eux-mêmes, qui se renvoient mutuellement les ondes qu'ils reçoivent, ce qui est prouvé par M. v. FREY lui-même, quand il dit [2]): *La distance du point de réflexion au tonographe dans la cœliaque est environ égale à celle des deux tonographes.*

Il est aussi facile de concevoir que ces manomètres, souvent de très grande inertie et introduits dans les artères de sorte qu'ils les ferment complètement, donnent lieu à des réflexions beaucoup plus fortes que la partie périphérique du système artériel.

Mais en admettant pour un moment que les ondulations indiquées étaient vraiment dues à une réflexion périphérique, elles ne prouveraient autre chose que le peu d'importance de cette réflexion. Car les mêmes ondulations réduites à la grandeur ordinaire des courbes sphygmographiques ne seraient plus visibles par leur petitesse.

---

[1]) Arch. DU BOIS REYMOND 1890.

[2]) l. c. pag. 82.

Sur les expériences de la même nature, effectuées par M. v. KRIES [1]) on peut faire la même observation.

Avec un ballon élastique M. v. KRIES produisit dans l'aorte d'un chien des ondes très fortes, qui se propagèrent dans tout le système artériel. Un manomètre à ressort fut introduit dans l'artère crurale pour enregistrer ces ondes.

Je ne peux pas croire que ces ondes si fortes ne se fussent pas réfléchies sur ce manomètre plus fortement que sur la partie capillaire du système artériel, mais en tout cas, si la compression du ballon était moins forte, les ondulations dans la courbe manométrique ne se montrèrent plus et, pour les compressions plus fortes, ces ondulations étaient petites et insignifiantes comparées à l'élévation dicrotique.

Dans la „*Zeitschrift für Biologie* de VOIT" Bd. 45, 46 etc. sont publiés plusieurs travaux très intéressants de M. OTTO FRANK de *Munich* sur l'enregistrement rigoureux du pouls aortique au moyen de manomètres, introduits directement dans les grandes artères. Dans ces travaux, qui témoignent de grandes connaissances mathématiques, M. OTTO FRANK étudie suivant l'exemple classique de M. MACH [2]) les circonstances favorables d'obtenir, avec un manomètre à fluide muni d'une paroi élastique, les vraies variations de la pression dans l'aorte. M. OTTO FRANK trouve que le fluide d'une tel manomètre oscille dans une période dépendant de la longueur, $L$, et de la section du tube, $Q$, d'après la formule: $\sqrt{\frac{L}{Q}}$, formule que je retrouvai dans un mémoire de date antérieure de M. MOENS (die Pulscurve, 1878). M. O. FRANK appelle l'expression $\frac{L}{Q}$ la masse active et calcule cette masse pour tout le système de tubes, etc. nécessaires pour enregistrer par le manomètre le mouvement du sang. Ensuite M. FRANK calcule, d'après les formules trouvées, les dimensions du manomètre les plus favorables pour obtenir des oscillations rapides et construit alors un appareil très sensible et très exact qu'il nomme manomètre à miroir et avec lequel il photographie, à l'aide d'une lampe électrique de NERNST, des courbes très grossies de la variation de la pression dans l'aorte d'un chien. La courbe que M.

---

[1]) Studien pag. 62.

[2]) Sitz ber. Wiener Academie Bd. 46 et 47.

FRANK donne p. 478 de son travail [1]) donne un bel exemple de la supériorité de la méthode appliquée.

En étudiant cette courbe remarquable et en cherchant la cause de chaque ondulation, M. FRANK ne découvre que des traces insignifiantes d'une réflexion périphérique, ce qu'il exprime en ces mots [2]): „Nachgewiesen habe ich ferner, dass Reflexionen bei der „Entstehung der centralen Pulsformen eine im Allgemeinen ver„schwindende Rolle spielen".

Ce fut donc à ma grande surprise que je lus quelques pages plus tard que M. FRANK, en appliquant un appareil semblable à l'artère tibiale, avait obtenu des courbes dont quelques particularités lui semblaient inexplicables sans le concours d'une réflexion périphérique.

La courbe en question montre une élévation prononcée, qui ne se montre pas dans celle de l'aorte. Mais en mesurant la distance du commencement de cette élévation au commencement de l'élévation primaire on trouve 14.5 mM. et comme, d'après les données de M. FRANK [3]), 24 mM. de la courbe représentent une différence de temps de 0,3 secondes ces 14.5 mM. correspondant à une différence de temps de $\frac{29}{160}$ seconde et mettant la vitesse de propagation du pouls, *c*, à 8 Mètres, l'onde parcourt en $\frac{29}{160}$ seconde un chemin de *145 cM.* Donc, si l'élévation secondaire sur la courbe de la tibiale était causée par une réflexion périphérique, il faudrait que le point de réflexion fût éloigné du point d'application du manomètre de *72.5 cM.* Mais il n'existe aucun chien chez qui la distance de la jambe postérieure jusqu'à l'extrémité du pied monte à $72\frac{1}{2}$ cM., d'où je conclus que la réflexion périphérique n'est pas la cause de l'élévation secondaire observée par M. FRANK.

Je cherche cette cause dans la réflexion du sang sur les deux manomètres qui, dans ces expériences, se trouvaient introduits dans le système artériel et qui, comme dans les expériences de M. v. FREY se réfléchissaient réciproquement les ondes qu'ils reçoivent. Alors on comprend aussi pourquoi M. FRANK a observé de plus grandes

---

[1]) l. c. Bd. 45.

[2]) l. c. pag. 527.

[3]) l. c. pag. 476 et 524.

variations de la pression sur le manomètre périphérique que sur le manomètre central.

18. MM. VON FREY et VON KRIES ont regardé comme un argument important en faveur de l'existence des ondes de réflexion périphérique le fait que la courbe de la pression atteint son sommet plus tard que la courbe de la vitesse. M. v. KRIES s'exprime ainsi [1]: „Si l'on observe que la courbe de la vitesse descend rapidement „tandis que celle de la pression continue à ascendre, *on est certain*, „qu'il y a réflexion périphérique".

Car suivant M. FICK, quand toutes les ondes ont une même direction, les deux courbes ne peuvent que descendre et ascendre simultanément. Si, au contraire, les différentes ondes ont une direction opposée, il faut que la courbe de la vitesse descende plus vite que celle de la pression.

Pour contrôler ce résultat théorique, M. v. KRIES a inventé un *tachymètre* avec lequel il peut photographier la courbe de la vitesse du sang dans les artères d'un homme et en comparant cette courbe avec celle du sphygmographe, qui donne la variation de la pression dans la même artère, il trouve que la vitesse descend toujours plus vite que la pression. La conclusion de M. v. KRIES est donc que l'existence des ondes de réflexion périphérique est prouvée.

Dès 1890 j'ai constaté que cette conclusion n'est pas fondée, car même quand on est sûr que les ondes de réflexion ne peuvent pas avoir eu la moindre influence, la courbe des vitesses descend toujours plus tôt que celle des pressions. On le voit dans toutes les expériences de M. MAREY, dans lesquelles la vitesse et la pression sont enrégistrées simultanément. On le voit aussi dans toutes les expériences de M. FICK avec des tubes élastiques, et très clairement dans la figure (4) de M. FICK [2]) reproduite dans la fig. 24.

FIG. 24.

Dans cette expérience le tube élastique avait une longueur considérable de sorte que les ondes de réflexion se montrèrent très tard, savoir en *a*, donc à un point de la courbe où l'onde primaire avait passé

[1]) l. c. pag. 275.

[2]) Verh. phys. med. Ges. Würzbürg N. F. Bd 20.

en entier, Néanmoins on voit dans la fig. 24 la courbe des pressions $A$ continuer à ascendre tandis que celle des vitesses $B$ a déjà commencé à descendre. La distance $c\ d$ donne l'intervalle de temps, dans lequel les deux sommets se suivent.

Et rien de plus naturel!

Le cœur pousse le sang dans les artères et par conséquent la vitesse $u$ accroît. Mais alors la paroi se dilate et pousse le sang vers les deux côtés. D'abord pour une certaine coupe de l'artère l'adduction de sang par le cœur est plus grande que l'abduction par l'élasticité de la paroi et la pression accroît. Plus tard l'abduction est plus grande que l'adduction et la pression décroît. A un certain moment la pression atteint une valeur maximale, mais cela n'arrivera pas au moment où la vitesse $u$ est la plus grande, car alors l'abduction ne peut pas encore être égale à l'adduction; seulement quand l'adduction est devenue plus petite, il est possible que l'abduction fasse équilibre à l'adduction.

Ainsi la température de la terre est le résultat de l'action réchauffante du soleil et de la perte de chaleur par le rayonnement du sol. Ce rayonnement devient de plus en plus grand à mesure que la température du sol s'élève et annule enfin l'effet du soleil. Mais cela n'arrive pas à midi où le soleil donne le plus de chaleur, mais beaucoup plus tard quand la chaleur du soleil s'est diminuée, à environ une heure et demie.

De la même manière la pression du sang atteindra sa valeur maximale toujours plus tard que la vitesse.

Les formules (22) et (23) n'indiquent pas cette différence de phase entre $p$ et $u$, mais ces formules supposent une oscillation purement sinusoïdale qui ne se réalise pas dans le mouvement du sang. De plus si l'on ne néglige pas la friction, on arrive aux formules (27) et (28) où le retard de la pression sur la vitesse est indiqué par $\delta$.

Il ne reste donc aucune raison d'attribuer le retard observé à une réflexion périphérique.

19. Dans les Archives de Pflüger Bd 97 on trouve un travail de M. Lohmann, qui, lui aussi, cherche la cause de l'onde dicrotique dans la réflexion périphérique. Sans faire valoir les arguments que j'ai donnés § 14—18. M. Lohmann s'empresse de donner beaucoup d'exemples où l'onde dicrotique disparaît en même temps que l'onde de réflexion et reparaît si l'onde de réflexion se manifeste de nouveau.

M. LOHMANN fait ses expériences sur des mammifères très petits comme le cobaye et le lapin, chez lesquels les artères sont si courtes que l'onde de réflexion arrive à l'artère carotidienne qu'il explore avant que la pression du sang soit arrivée à sa valeur maximale. Alors les ondes se montrent dans la branche ascendante de la courbe manométrique et deviennent invisibles. Eh bien, dans toutes ces courbes l'élévation dicrotique manque aussi.

Il me semble que M. LOHMANN néglige ici la différence qu'il y a entre *post* et *propter*.

N'est-il pas possible que chez ces mammifères si petits les valvules semilunaires n'aient pas la faculté de produire une onde dicrotique considérable?

N'est-il pas possible que cette onde dicrotique existât réellement mais échappât à la sensibilité de l'instrument de mesure? Dans les figures 3—7 de M. LOHMANN le pouls du cobaye se dessine comme une courbe purement sinusoïdale. Une telle courbe se montre toujours quand l'appareil enregistrant fait des oscillations propres sous l'influence d'une impulsion instantanée. L'appareil de M. LOHMANN consistait en un manomètre ou tonomètre à fluide, ainsi d'un appareil dont la masse active était très considérable, comparée à celle du sang de l'animal.

Selon M. MACH, il faut alors considérer les courbes obtenues comme la représentation du mouvement propre du tonomètre provoqué par les pulsations du pouls.

Mais dans ce cas les courbes de M. LOHMANN ne nous apprennent rien sur le mouvement particulier du sang.

De plus j'ai des objections graves contre le raisonnement de M. LOHMANN.

Si, en effet, l'élévation dicrotique était causée par les ondes de réflexion, il ne serait pas nécessaire de faire des expériences sur de petits animaux, car aussi dans le pouls de l'artère du pied et de l'artère radiale de l'homme les ondes de réflexion suivent l'onde primaire de très près tout comme dans les artères des très petits mammifères. Néanmoins, dans ces deux pouls l'élévation dicrotique se montre très clairement et ne peut donc pas être attribuée à la réflexion périphérique.

En second lieu, si l'élévation dicrotique était causée par les ondes de réflexion, il faudrait que cette élévation se montrât plus tard dans le pouls des très grands animaux, comme le cheval. Eh bien, l'intervalle de temps, $t$, entre le commencement de l'élé-

vation primaire et le commencement de l'élévation dicrotique, qui chez l'homme suivant les figures 16 et 17 et les mesures de § 15 est de 0.29 seconde, n'est que de 0.18 seconde pour le cheval suivant les courbes de M. MAREY fig. 19.

Les autres expériences de M. LOHMANN ont été faites dans le but de démontrer que dans les artères de plusieurs animaux une impulsion donnée en un seul point se propage vers tous les autres points, tout comme dans les tubes élastiques, et que les ondes provoquées ainsi peuvent se réfléchir à une extrémité ouverte ou fermée.

Ici, il est bon de faire observer encore une fois que je n'ai jamais déclaré que le système artériel n'aurait pas la faculté de réfléchir.

Au contraire, j'admets et j'ai admis toujours que ce système ne diffère *sous aucun rapport* d'un tube élastique et doit en avoir toutes les qualités, savoir la propagation d'une impulsion, la réflexion et la pénétration et l'interférence des ondes différentes, tout comme je l'ai indiqué dans le Chapitre I^ler^. Mais j'ai constaté aussi que les circonstances dans lesquelles se trouvent les artères de l'homme sont nuisibles à une forte réflexion périphérique. Un tube élastique qui se ramifiait comme l'artère humaine ne donnerait non plus une réflexion périphérique considérable.

Ceci posé, les expériences de M. LOHMANN pag. 450 et suivantes ne nous apprennent rien de nouveau, sinon peut-être ceci que chez les très petits mammifères un choc très fort donné au commencement du système artériel peut se réfléchir à la périphérie de telle sorte que cette onde de réflexion se montre sur le tonomètre de la carotide comme une très petite élévation.

Les expériences de M. LOHMANN ne peuvent donc changer en rien notre conclusion savoir que l'onde dicrotique du pouls de l'homme n'est pas causée par une réflexion périphérique.

C'est tout autre chose s'il n'est pas possible que la réflexion joue un rôle subordonné.

Ici je suis d'accord avec M. v. KRIES et je crois que, en effet, la forme particuliere du pouls périphérique, comme celle de l'artère radiale est causée par une petite onde réfléchie, qui augmente la vitesse dans la branche ascendante de la courbe sphygmographique Mais cette petite onde, réfléchie à la périphère, a déjà disparu à la hauteur de l'aisselle.

Un de mes élèves M. VAN HASSELT a fait dans le laboratoire de M. ZWAARDEMAKER l'expérience suivante.

Autour du bras près du pouls de l'artère radiale on fixa un fort bandeau élastique, avec lequel on pouvait comprimer les artères radiale et ulnare. Sur l'artère brachiale près de l'aisselle fut placé un sphygmographe à transmission, qui enregistrait le mouvement du sang à cet endroit et en même temps on observait au toucher le pouls de la radiale. Aussi rapidement que possible on changea la pression du bandeau, depuis le libre passage du sang jusqu' à la cessation du pouls. Ainsi on pouvait observer l'effet de la clôture des deux artères radiale et ulnare sur le pouls de la brachiale. Naturellement cette clôture cause une réflexion positive beaucoup plus considérable que celle des capillaires. Eh bien, dans toutes les courbes on observait cette onde positive, mais elle était très faible comparée à la hauteur de l'élévation primaire.

20. Après tout ce qui précède nous pouvons admettre sans crainte que le mouvement principal du sang dans les artères de l'homme se termine exclusivement dans la direction centrifuge et alors la courbe sphygmographique, exempte de toute réflexion, traduit fidèlement le mode d'action de la contraction du cœur sur le mouvement du sang.

De ce fait on peut tirer une conclusion importante, savoir:

Que contrairement à l'opinion de plusieurs physiologistes le ventricule gauche ne se vide jamais entièrement, car alors la forme de la courbe sphygmographique serait tout autre. Au lieu des courbes fig. 25 *a* on trouverait toujours des courbes fig. 25 *b*. Si le ventricule gauche ne cessait pas de se contracter, l'élévation dicrotique ne pourrait pas se former.

Fig. 25.

Mais, en revanche, si l'élevation dicrotique se manifeste, il est sûr que la contraction du cœur cesse avant que le ventricule gauche se soit vidé et alors la quantité de sang, $Q$, que le cœur à chaque contraction rejette dans les artères doit être beaucoup plus petite que la capacité du ventricule gauche. C'est ce qu'ont aussi trouvé les physiologistes modernes.

Tandis que les physiologistes anciens admettaient une trop grande valeur de $Q$, comme:

| | | |
|---|---|---|
| Volkmann, | $Q = 187.5$ | grammes. |
| Vierordt, | $Q = 180$ | „ |
| Huxley, | $Q = 100$ | „ |

Le nombre trouvé par FICK varie entre 53—77 grams. Moi-même, j'ai trouvé [1]) $Q = 72$ grams
et THOMAS YOUNG n'était donc pas très éloigné de la vérité quand il posait $Q = 45$ grams.

La seconde conséquence qu'on peut tirer de la direction exclusivement centrifugale du sang, c'est que la différence qu'on fait souvent entre les indications des différentes appareils de mesure, comme le sphygmographe, le pléthysmographe et le tachygraphe, qui donnent successivement la variation de la pression, du volume et de la vitesse, doit être supprimé, parce que, sauf un petit retard dans le sommet de la courbe de la pression, toutes ces variations se changent maintenant d'une manière identique, comme on voit clairement dans les formules (21), (22) et (23) où la seule quantité $A$ détermine les trois variations indiquées.

21. Dans le système artériel de l'homme le mouvement pulsatoir du sang, qui s'achève dans les grands artères, se transforme dans les petits vaisseaux capillaires dans un mouvement à peu près continuel et uniforme.

Sur ce mouvement dans les capillaires on peut appliquer la loi de POISEUILLE [2]), qu'on peut écrire ainsi:

$$q = \frac{\pi a^4}{8 \mu l} \times P$$

où: $q$ est la quantité de fluide qui passe par seconde
$P$ la difference de pression aux deux bouts du tube
$l$ la longueur du tube
$a$ le rayon du tube
et $\mu$ le coëfficient de viscosité
le tout exprimé en C. G. S. unités.

En posant: $$\frac{8 \mu l}{\pi a^4} = w \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

cette formule prend la même forme que celle d'OHM pour le courant électrique savoir: $$q = \frac{P}{w} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

$w$ est une quantité qui dépend seulement des dimensions du tube et du coëfficient de friction et représente la résistance, plus ou

[1]) Memoire de l'Academie pag. 65.
[2]) Lamb. Treatise on the motion of fluids pg. 224.

moins grande, que le flux de liquide éprouve dans le tube: $w$ représente donc ici ce que les physiologistes appellent le *tonus* ou la *tonicité* des capillaires. Un resserrement des capillaires augmente la valeur de $w$, une dilatation la diminue.

$q$ est ici la quantité de sang qu'un seul tube capillaire transport par seconde et si l'on néglige la pression très petite dans les veines la quantité $P$ indiqué plus haut, devient égale à la partie constante de la pression du sang dans les grands artères, que nous avons désigné par l'expression $p_0$ Ainsi la quantité de sang qu'un seul vaisseau capillaire emmène est

$$q_1 = \frac{p_0}{w_1}.$$

Pour un autre vaisseau on trouve:

$$q_2 = \frac{p_0}{w_2} \text{ etc.}$$

et la quantité totale que les capillaires d'une même artère transportent par seconde:

$$q = q_1 + q_2 + \text{etc.}$$

ou

$$q = p_0 \left( \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \text{etc.} \right)$$

ou posant:

$$\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \text{etc.} = \frac{1}{w}$$

$$q = \frac{p_0}{w}$$

$w$ représente maintenant la tonicité totale de toutes les capillaires appartenant à une même artère et $q$ est la quantité de sang calculée par la formule (25), de sorte qu'on a pour chaque artère particulière:

$$\frac{AR^2}{\varrho c} = \frac{p_0}{w} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

ou:

$$w = \frac{p_0 \times \varrho c}{AR^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Pour évaluer $w$ il est donc nécessaire de déterminer $p_0$.

22. Le premier qui a inventé une méthode pour déterminer expérimentalement la pression du sang dans les artères intactes de l'homme, ce fut WALDENBURG qui en 1880 écrivait un brochure:

Die Messung des Pulses und des Blutdruckes von Menschen. En 1883 M. v. Basch inventa le *sphygmomanomètre*, dont le principe est de comprimer l'artère jusqu'à l'effacement du pouls à l'aide d'une membrane élastique mise en rapport avec un manomètre à mercure. Dans l'appareil de M. v. Basch la membrane élastique repose directement sur l'artère radiale mais plus tard on a exercé la pression sur l'artère au moyen de l'air, qu'on comprimait à l'aide d'un ballon élastique. Ainsi est arrangé le sphygmomanomètre de Riva-Rocci, qui, encore modifié par M. v. Recklinghausen, trouve à présent une application multiple et se réjouit d'une grande réputation.

Fig. 26.

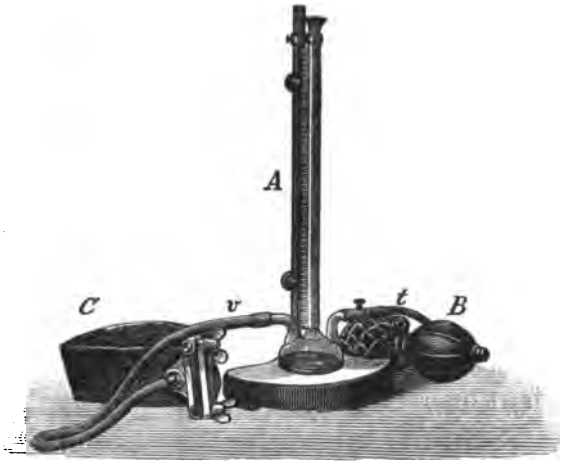



Fig. 27.

Fig. 26 donne une représentation du sphygmomanomètre de Riva-Rocci. A est le manomètre à mercure, dont la partie inférieure communique d'un côté avec le ballon élastique *B* et de l'autre côté avec le sac à comprimer *C*, qui entoure le bras ou le pied dont on veut comprimer les artères. Le sac à comprimer, inventé par M. v. Recklinghausen est dessiné plus détaillé dans la figure 27. On voit en *c* la presse métallique tres forte, armée de deux vis métalliques *b* et $b^1$. On voit aussi en *G* le double sac élastique tout couvert de soie pour empêcher la dilatation, dans lequel on presse de l'air comprimé venant par *a* et par le tube *v* indiqué aussi dans la figuur 26. En agitant le ballon *B* fig. 26 on comprime l'air dans le manomètre et en même temps dans le sac. Le mercure monte

dans le tube divisé *A* et indique en mill. de mercure la pression dans le sac qui entoure le membre dont on veut comprimer l'artère. Ordinairement on applique le sac au bras supérieur tandis qu'on observe au toucher le pouls de l'artère radiale et l'on continue à augmenter la pression jusqu'à l'effacement du pouls observé. Alors on mesure la hauteur du mercure et trouve ainsi la pression du sang dans l'artère brachiale.

Avec cet instrument j'ai fait beaucoup d'expériences et je me suis persuadé ainsi que cette méthode ne peut jamais donner la vraie pression du sang.

Comme j'ai observé déjà dans mon mémoire de l'Académie pag. 51, si pour des pulsations faibles l'artère est entièrement comprimée une pulsation plus grande passe encore. Il arrive aussi souvent que l'on ne peut effacer le pouls point du tout, même en élévant la pression à une hauteur absurde.

De plus, si le pouls est effacé pour le toucher, il ne l'est pas encore pour le sphygmographe et l'observation de l'effacement devient autant plus difficile à mesure que la mode d'observation est plus délicate.

Mais il reste encore une objection plus grande, c'est le fait que j'ai observé dans les expériences sur les tubes élastiques, qu'il faut toujours une force assez grande pour supprimer la force élastique de l'artère dilatée et pour comprimer l'artère vide et ces deux forces se joignent à celle qu'il faut exercer pour-vaincre la pression du sang toute seule. Il est donc certain que toutes les nombres trouveés par l'effacement du pouls sont beaucoup trop grandes.

Non, il ne faut pas chercher la pression extérieure qui comprime totalement l'artère, il *faut chercher la pression en m.M. de mercure pour laquelle les oscillations du mercure du manomètre sont maximales.*

On sait que dans le sphygmomanomètre de Riva-Rocci le mercure commence à osciller sur le rythme du pouls; ces oscillations sont très petites si la pression de l'air est petite, elles accroissent quand on augmente cette pression mais cette accroisement ne se continue pas, car pour des pressions fortes les osculations deviennent aussi petites que pour les pressions faibles. Eh-bien, c'est justement la pression extérieure qui correspond aux oscillations maximales, qui fait équilibre à la pression du sang, car alors la paroi de l'artère n'est plus dilatée et aux deux côtés de cette paroi les deux pressions sont égales.

Ainsi, pour obtenir la *vraie valeur* de la *pression* du *sang*, $p_0$,

on comprime l'air dans le sac du sphygmomanomètre jusqu'au point où les oscillations du mercure deviennent maximales et le chiffre qui se trouve alors au milieu de ces oscillations indique en *m.M.* de mercure la pression $p_0$. Pour de bons résultats il est absolument nécessaire que toutes les connections se ferment hermétiquement. Chez plusieurs instruments cette fermature n'est pas parfaite, surtout du coté du ballon *B*. J'y ai remédié en plaçant sur le tube élastique *t* fig. 26 une pince très forte qui ferme hermétiquement ce tube aussitot que le mercure du manomètre a atteint la hauteur voulue. Une même pince peut être appliqué à l'autre tube *v* fig. 26 pour voir s'il n'y a pas de fuites du coté du sac. En serrant ensuite si fortenent que possible toutes les vis de la presse métallique *c* fig. 27, il peut arriver que même pour des pressions de 200 m.M de mercure il n'existe aucune fuite. Alors seulement l'appareil donne de bon résultats.

Parce qu'il n'est plus nécessaire d'observer l'effacement du pouls et qu'il suffit d'observer les oscillations du mercure, on peut appliquer le sac aussi bien sur les jambes que sur les bras, même quand ils sont couverts d'un vêtement.

La mode d'opèrer est devenue très facile et admet une application générale. [1])

23. Comment peut on trouver la seconde quantité importante que nous avons designé par la caractère, $q$ et qui représente la quantité de sang que le coeur jette dans une seconde dans l'artère. Dans mon mémoire de l'Academie j'ai prouvé que le sphygmographe bien appliqué nous peut donner cette quantité, $q$ car la surface de la courbe sphygmographique est proportionelle à la quantité du sang $q'$ qui entre dans l'artère à chaque contraction du coeur et alors on a: $q = Nq'$
où $N$ est le nombre de battements par seconde.

Pour exécuter cette methode, il faut chercher la position et la pression du sphygmographe pour lesquelles il donne les courbes les plus grandes et on mesure alors à l'aide d'une micromètre divisé en petits carreaux de 0.1 m M.[2] la surface de la courbe obtenue.

Cette méthode pour la détermination de $q$ n'est pas acceptée par les medecins à cause de la difficulté de retrouver la position

---

[1]) Certains médecins comme OLIVER (Study of the Pulse, 1906) distinguent la pression *systolique* et la pression *diastolique* On voit que la seule valeur vraie de la pression constante, $p_0$, c'est la pression diastolique.

exacte du sphygmographe de l'un jour à l'autre. La méthode suivante mérite une attention particulière.

Elle se base sur la formule (25)

$$q = \frac{A R^2}{\varrho c}$$

où $A$ représente la grandeur des oscillations de la pression du sang
$R$ le rayon de l'artère
$c$ la vitesse de propagation du pouls
$\varrho$ la densité du sang.

Ainsi pour une même artère la quantité désirée $q$ se trouve proportionnelle à l'amplitude $A$ des oscillations du mercure dans le sphygmomanomètre, de sorte que le même instrument dans une seule expérience nous donne toutes les deux quantités, que nous désirons à connaître savoir: $p_o$ et $q$.

La hauteur absolue du mercure nous apprend la valeur de $p_o$ la grandeur des oscillations fait connaître la valeur de $q$.

Mais alors nous pouvons aussi calculer le *tonus* des capillaires appartenant à cette artère, par la formule (30)

et nous trouvons: $$w = \frac{p_o}{q}.$$

Des mêmes grandeurs $p_o$ et $q$ nous pouvons aussi déduire *le travail* par seconde, $T$, fait par le coeur pour entretenir le mouvenent du sang et vaincre la force élastique des parois, dans l'artère qu'on étude:

On trouve: $$T = p_o \times q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

L'unité dans laquelle est exprimé le tonus $w$ est celui d'un tube par lequel sous une différence de pression de 1 m M. de mercure passe par seconde 1 c.M$^3$ de sang.

Parcequ'alors: $$1 = \frac{\pi a^4}{8 \mu l} \times \frac{1}{10} \times 13{,}6 \times 981$$

on trouve que cette unité correspond à un tube de 1 *m.M.* de diamètre et de 7 m.M. de longueur.

*Dogiel* [1]) trouva pour la carotide du lapin:

$$q = \tfrac{1}{2}\ \text{c.M}^3 \text{ et } P = 92\ \text{m.M. de mercure.}$$

Donc le tonus des capillaires de la tête du lapin s'évalue à celui d'un tube de 1 *m.M.* diamètre et de 184 m.M. de longueur.

On exprime aujourd'hui le travail en ergs et $10^7$ ergs par seconde,

---

[1]) Ber. Sachs Ges. 1867, pg. 22.

c'est ce qu'on appelle un *Watt*. Un Watt est la 735ième partie d'un cheval à vapeur.

Donc si l'on exprime $p_0$ en m.M. de mercure.

et $q$ en c.M$^3$

on trouve pour l'énergie du sang dans une artère quelconque

$$E = p_0 \times q \times \frac{1,33}{10^4} \text{ Watt}^{1)} \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

et pour celle du ventricule gauche du coeur:

$$E = p_0 \times Q \times \frac{1,33}{10^4} \text{ Watt} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

où $Q$ est la quantité totale de sang jetée dans l'aorte par seconde.

En acceptant par exemple que le cœur de l'homme normal jette par seconde dans l'aorte une quantité de sang de 70 c.M$^3$ et que la pression moyenne dans l'aorte monte à 130 m.M. de mercure, le travail de la ventricule gauche du cœur s'évalue à $T = 1,2$ Watt ou $\frac{1}{612}$ cheval-vapeur.

Avec les nombres plus grands des anciens physiologistes on trouve: $T = \frac{1}{125}$ cheval-vapeur.

Je crois qu'on ne commettra pas une grande erreur quand on accepte que l'énergie moyenne de la ventricule gauche soit exactement 1 Watt.

Avec les mêmes données on trouve chez l'homme pour la tonicité totale de toutes les capillaires ensembles:

$$W = \frac{130}{70} = 1,85$$

ce qui signifie que toutes les capillaires ensembles offrent au transport du sang une résistance, égale à celle d'un tube de 1 m.M. de diamètre et de 13 m M. de longueur.

**24** Ici suivent quelques expériences faites sur l'homme avec le sphygmomanomètre de *Riva Rocci*, d'après la méthode indiquée.

Sur un homme vigoureux de 68 ans je trouvai:

pour le bras gauche: $p_0 = 130$ m.M.
$A = \frac{3}{4}$ m.M.

donc le tonus des capillaires du bras gauche est proportionel a

---

1) $\frac{\frac{1}{10} \times 13.6 \times 981}{10^7} = \frac{1.33}{10^4}$.

$$w = \frac{130}{\frac{3}{4}} = 173$$

et le travail du sang dans ce membre est proportionelle à

$$T = 130 \times \tfrac{3}{4} = 97.$$

Pour le bras droit de la même personne ces nombres deviennent:

$$p_o = 130 \text{ m.M.}$$
$$A = 2 \text{ m.M.}$$
$$w = 65$$
$$T = 260.$$

Pour la jambe gauche de la même personne je trouvai:

$$p_o = 125 \text{ m M.}$$
$$A = 4 \text{ m.M.}$$
$$w = 31$$
$$T = 500$$

et pour la jambe droite ces nombres deviennent

$$p_o = 128 \text{ m.M.}$$
$$A = 2\tfrac{1}{2} \text{ m.M.}$$
$$w = 51$$
$$T = 320.$$

De la même manière je fis des expériences sur moi-même, agé de 64 ans et trouvai:

pour le bras gauche:

$$p_o = 120 \text{ m.M.}$$
$$A = 2 \text{ m.M.}$$
$$w = 60$$
$$T = 240$$

pour le bras droit:

$$p_o = 125 \text{ m M.}$$
$$A = 1 \text{ m,M.}$$
$$w = 125$$
$$T = 125$$

pour la jambe gauche:

$$p_o = 120 \text{ m.M.}$$
$$A = \tfrac{1}{2} \text{ m.M.}$$
$$w = 240$$
$$T = 60$$

pour la jambe droite:

$$p_o = 120 \text{ m.M.}$$
$$A = \tfrac{1}{2} \text{ m.M.}$$
$$w = 240$$
$$T = 60.$$

De ces deux séries d'observations, que je pourrais augmenter de quelques observations analogues sur d'autres personnes, on peut conclure qu'il existe souvent une grande différence entre le mouvement du sang dans les membres gauches et les membres droits.

Quant à moi, qui préfère toujours l'usage du bras gauche à celui du bras droit, c'est le bras gauche qui transporte la plus grande quantité de sang et dont les capillaires sont les plus ouverts. Chez l'homme de 68 ans accoutumé à des travaux manuels, c'est justement le bras droit dont le sang a le plus d'énergie

Pour avoir une idée claire de la circulation du sang dans le corps d'une personne, il est donc nécessaire d'appliquer le sphygmomanomètre aussi bien sur les membres gauches que sur les membres droits et pour nous renseigner complètement, il est très désirable d'enregistrer en même temps à l'aide d'un sphygmographe à transmission le pouls de l'artère carotide. En combinant cette expérience avec celle du sphygmomanomètre on connaîtrait non seulement l'état actuel des artères et des capillaires mais aussi le rythme du pouls et le mode de contraction du coeur.

Une telle recherche faite sur plusieurs personnes normales et malades et d'âge different pourrait augmenter notablement notre connaissance de la circulation du sang.

Plusieurs médecins n'ont que des idées imparfaites sur la signification de la pression du sang. Ordinairement ils n'y attachent pas une grande valeur pour la diagnose des différentes maladies et ceux qui en tiennent compte comme POTAIN, WETZEL, CARRIÈRE et DAMCOURT [1]) se contentent d'examiner si la pression du sang dans les malades est plus petite ou plus grande que la pression normale; ils distinguent la *hypotension* et la *hypertension.* POTAIN par exemple dit: „Une hypotension combinée à une „haute température est le signe certain d'une fièvre typhoïde" et CARRIÈRE et DAMCOURT s'expriment ainsi: „Mais nous pensons „qu'une pression supérieure à la normale au cours d'une maladie „aussi regulièrement hypotensive que la fièvre typhoïde revêt une „signification sérieuse et doit faire soupçonner une complication".

Quand on observe cependant que la valeur de la pression du sang dépend de deux facteurs indépendants, savoir de l'activité du cœur et du tonus des capillaires, on comprendra aisément que la valeur absolue de cette pression ne peut être en soi qu'un

[1]) Revue de medicine 1904, Tome 24, pg. 680.

signe incertain. Ce qu'il faut examiner, c'est par quelle cause l'hypertension ou l'hypotension s'est établie et la seule expérience qui puisse donner une réponse à cette question importante, c'est la détermination simultanée de la pression elle-même et de la grandeur de ses oscillations. Car alors seulement qu'on peut calculer séparèment le tonus des capillaires et l'activité du cœur.

Voici encore un tableau d'expériences faites sur diverses personnes en bonne santé et d'âge différent donnant la quantité de sang rejetée par le cœur par seconde. *Q*, le travail du cœur *T* et la tonicité des capillaires *W*, comparés aux mêmes quantités d'une même personne, prise comme norme:

La quantité de sang, rejetée par seconde est évaluée d'après la formule (25), le rayon *R* de l'artère radiale étant supposé proportionnel à la circonférence du poignet.

| Personnes. | Age. | Pression en m.M. de mercure. | Oscillations en m.M. | Quantité de sang *Q*. | Travail du cœur *T*. | Tonicité des capillaires *W*. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| N°. 1 | 13 | 96 | 0.4 | 0.20 | 0.16 | 4. |
| N°. 2 | 13 | 98 | 0.4 | 0.24 | 0.20 | 3.4 |
| N°. 3 | 18 | 105 | 0.8 | 0.24 | 0.20 | 3.4 |
| N°. 4 | 30 | 118 | 1.0 | 1. | 1. | 1. |
| N°. 5 | 35 | 113 | 1.0 | 1. | 0.96 | 0.96 |
| N°. 6 | 43 | 125 | 1.0 | 1.06 | 1.12 | 1. |
| N°. 7 | 50 | 110 | 1.2 | 1.2 | 1.12 | 0.78 |
| N°. 8 | 57 | 110 | 2.0 | 2.06 | 1.92 | 0.45 |
| N°. 9 | 60 | 103 | 1.5 | 1.82 | 1.58 | 0.48 |
| N°. 10 | 65 | 130 | 2.0 | 1.95 | 2.14 | 0.57 |
| N°. 11 | 68 | 130 | 3.0 | 2.92 | 3.22 | 0.38 |
| N°. 12 | 78 | 140 | 4.0 | 3 88 | 4.62 | 0.30 |

On voit dans ce tableau comment le travail du cœur augmente avec l'âge, certainement parce que les artères perdent une partie de leur élasticité et se comportent plustôt comme un tuyau métallique.

Alors le mouvement du sang s'interrompt parfois, ce qui exige du coeur une plus grande activité.

Ainsi on comprend mieux la vérité de l'expression pleine de sens, que l'homme a l'âge de son cœur.

25. Il nous reste encore à examiner le rôle que joue la circulation dite *petite*, c. à. d. le mouvement du sang jeté dans les poumons par le ventricule *droit* du cœur.

En désignant par $p_o'$, $Q'$ et $W'$ la pression, la quantité de sang, et le tonus dans l'artère pulmonale et par $T'$ le travail du ventricule droit par seconde, nous trouvons comme en § 23:

$$Q' = \frac{p_o'}{W'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

et

$$T' = \frac{1.33}{10^4} \times p_o' \times Q' \; Watts.$$

Mais la quantité $Q'$ étant nécessairement égale à $Q$, on trouve:

$$T' = \frac{1.33}{10^4} \times p_o' \times Q$$

de sorte que le travail du cœur entier devient

$$T = \frac{1.33}{10^4} \, Q \, (p_o + p_o') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

Suivant MAREY et CHAUVEAU [1]) la pression moyenne dans l'artère pulmonale est un tiers de celle dans l'aorte, ainsi le travail totale du coeur s'évalue à

$$T = 1.6 \; Watt.$$

Le tonus $W'$ des capillaires de l'artère pulmonale est grandement influencé par la respiration, chaque inspiration élargissant le rayon des capillaires tandis que l'expiration le diminue. Ainsi suivant (36) la pression $p_o'$ varie périodiquement par la respiration et puisqu'on peut considérer dans les circonstances normales le travail total du coeur comme une grandeur constante, il s'ensuit (37) que, en même temps que $p_o'$ mais en sens inverse, la pression $p_o$ souffre pendant la respiration des variations périodiques comme l'a démontré MAREY [2]).

---

[1]) Circulation pag. 424.

[2]) Circulation pag. 454.

# LA CHARGE DE CONTACT ENTRE UNE PAROI POREUSE ET DES SOLUTIONS SALINES

PAR

E. VAN DER VEN.

---

## II.

Dans une étude précédente (*Arch. du Musée Teyler*, Série II, Vol. X, p. 85) nous avons déterminé l'intensité des forces $E\Delta V$, qui respectivement occasionnent le transport par le courant électrique d'une quinzaine de solutions salines, à base métallique, au moyen d'autant de vases poreuses. Mais à la comparaison de ces forces, que nous nous étions proposés, nous n'avons pu parvenir parceque, en déterminant le facteur $\Delta V$, il nous parut que les vases poreuses, dont nous nous étions servis, étaient toutes d'une porosité différente et cela, nonobstant qu'elles étaient d'une même cuite.

Pendant nos recherches antérieures, qui avaient pour but de déterminer la manière, dont le transport des liquides dépend de leur condensation et de l'intensité du courant, ce défaut d'équivalence des vases d'une même cuite ne m'avait pu sauter aux yeux, parcequ'alors pour chaque série d'observations, qui avaient rapport au même sel, je me servais de la même vase. Mais du moment où, en comparant les vases différentes, ce défaut m'avait paru (l. c., page 97 et 98), il fallut *ou* rénoncer à la comparaison proposée, *ou* tâcher de le corriger, en déterminant directement la valeur relative de la porosité des vases employées.

On y parvient au moyen de la formule, ci-dessus (page 86) citée, de M. Poiseuille, en déduisant par elle *la valeur du diamètre* m *du tube capillaire, d'une longueur égale à celle de l'épaisseur*

*d de la vase, qui*, toutes les autres circonstances étant égales, *est seul capable de remplacer tous ses pores.*

Pour déterminer dans cette formule la valeur $Q$ on a soin que la vase, dont le fond est verni, reste pendant quelques heures remplie d'eau distillée d'une température constante. Si donc $Q$ est le poids de l'eau qui s'écoule en une heure, $S$ la pression latérale de l'eau sur la paroi et si non prenons $N = 1$ pour l'eau distillée, alors de

$$Q = \frac{Sm^4}{d}$$

il suit:

$$m = \sqrt[4]{\frac{Q}{s} \cdot d} \text{ mM.}$$

Donc, s'il a paru que de deux vases, dont les parois ont respectivement une épaisseur $d$ et $d'$, les pores peuvent être remplacés par des tubes également longues et d'un diamètre $m$ et $m'$, alors la valeur $\Delta V' = \frac{Id'}{km'^2}$, expérimentalement déterminée pour la seconde, peut être réduite à celle qu'elle aurait eue si le transport avait en lieu au moyen de la première, en la multipliant par $\frac{d}{d'}$, $\frac{m'^2}{m^2}$; et il est clair qu'en appliquant cet examen aux vases, dont on va se servir, on peut juger d'avance sur le degré de leur équivalence.

Pourtant ici la question se présente-t-elle si ce raisonnement, qui indubitablement vaut quand un liquide est pressé par des parois de porosité différente, est encore valable quand, comme dans notre cas en déterminant $\Delta V$, c'est un courant qui trouve des parois imbibés de liquide sur son chemin. Car il paraît de l'intensité de ce courant, considerée en rapport avec les volts employés pour le produire, que la paroi entière doit être considérée comme lui donnant un pasage, qui du côté de l'électrode positive a une coupe de 481 cM². S'il en était autrement, si la paroi ne participait à la conduction du courant que pour autant qu'elle est poreuse, alors, en ayant égard à la grande résistance de nos liquides, le nombre des volts dont on aurait besoin pour la production d'un courant d'un ampère serait énorme et en tout cas beaucoup plus grand que le dizaine, dont au plus nous nous sommes servis en transportant ces liquides.

C'est pourquoi j'ai cru devoir examiner particulièrement, pour combien la perméabilité des parois pour un liquide marche de

pair avec leur pouvoir de donner passage à un courant, dans le cas ou elles sont imbibées de ce liquide.

Dans ce but j'ai déterminé pour une douzaine de vases poreuses *et* la quantité $Q$ d'eau distillée, expulsée, dans un temps donné, par une pression latérale égale, *et* l'intensité $I$ du courant, que, l'intensité du courant principal étant un ampère, la différence potentielle des parois extérieure et intérieure pousse par le „shunt", qui mène au multiplicateur.

Les résultats de cet examen sont exposés dans le tableau suivant.

| | | $C_u SO_4 + 5\,Aq.$ | | | | | $F_e SO_4 + 7\,Aq.$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N°. de la vase. | $Q$ en gr. | 5 °/₀ | 7½ °/₀ | 10 °/₀ | N°. de la vase. | $Q$ en gr. | 5 °/₀ | 7½ °/₀ | 10 °/₀ |
| | | $I$ en $10^{-5} \times 1$ Amp. | | | | | $I$ en $10^{-5} \times 1$ Amp. | | |
| 1. | 20 66 | 298 | 228 | 174 | 7. | 17.475 | 426 | 311 | 255 |
| 2. | 21.26 | 287 | 220 | 163 | 8. | 18.300 | 416 | 297 | 211 |
| 3. | 9.28 | 426 | 349 | 245 | 9. | 20.575 | 376 | 287 | 206 |
| | | $Z_n SO_4 + 5\,Aq.$ | | | | | $2\,Fe\,3\,SO_4 + 9\,Aq.$ | | |
| 4. | 23.31 | 288 | 221 | 146 | 10. | 19.40 | 322 | 259 | 167 |
| 5. | 31.00 | 243 | 182 | 133 | 11. | 10.15 | 416 | 304 | 226 |
| 6. | 26.325 | 258 | 196 | 139 | 12. | 26.075 | 304 | 219 | 157 |

Les 12 vases sont d'une épaisseur différente; mais comme — selon la formule de M. Poiseuille — les valeurs de $Q$ sont les réciproques de celles de $d$ tandisque celles de $I$ sont en raison directe de $d$, les valeurs, obtenues par l'observation, n'ont pas été reduites à la même valeur de $d$

Il paraît de ce tableau que l'intensité du courant, occasionnée par la différence de potentiel et, par consequent, cette différence elle-même, diminue à mesure que la porosité de la vase augmente; de sorte que

*les nombres* m, *qui — selon la formule de M.* Poiseuille — *accusent la perméabilité relative des vases poreuses pour l'eau distillée, accusent aussi cette perméabilité pour le courant*

En suivant la méthode ci-dessus décrite, j'ai institué l'examen dont les pages suivantes donnent un rapport détaillé Il a rapport aux mêmes solutions que l'examen décrit dans mon étude antérieure; seulement j'ai remplacé l'acétate de plomb par la chlorure de cuivre ($Cu\,Cl_2 + 2\,Aq.$), parceque le premier sel, le seul dont l'acide est de nature organique. entre moins dans le cadre de ces recherches. Aussi, comme là, toutes les solutions contiennent 5 parties de sel sur 100 parties d'eau.

Chaque fois que la recherche, ayant rapport à une solution déterminée, était finie, j'ai nettoyé la vase qui m'avait servi, en pressant par sa paroi, au moyen d'une pression d'environ deux mètres, de l'eau distillée, jusqu'à ce qu'elle en écoulait parfaitement pure.

De cette manière je trouvais, en déterminent la valeur de $m$ après chaque lavage, que la porosité de la vase allait toujours en augmentant; de sorte qu'en craignant que la valeur de $\Delta V = \frac{l\,d}{k\,m^2}$ ne deviendrait trop petite pour m'y fier pour la détermination du transport, j'ai fallu trois fois changer de vase.

Je vais suivre ici les résultats de mes recherches; elles font connaitre dans l'équation

$$E\Delta V = \frac{T}{Q}.S$$ [1])

les valeurs de $S$, $T$, $Q$ et $\Delta V$, dont

$S$ est la pression latérale du liquide,
$Q$ le poids du liquide qu'elle fait écouler dans une heure,
$T$ le poids du liquide transporté dans le même temps par un courant d'un ampère et
$\Delta V$ la différence de potentiel des parois extérieure et intérieure.

VASE N°. 1.

Hauteur, jusqu'à laquelle remplie : 142 mM.
Épaisseur moyenne de la paroi. . : 3.6 „
Diamètre du fond . . . . . : 68 „

Quand la vase était remplie d'eau distillée, dont la pression latérale sur la paroi fut 2152.7 grammes, il en écoulait en 3 heures : 47.93 gr., ou 15.98 gr. en une heure

dont $$m = \sqrt[4]{\frac{15.98 \times 3.6}{2152.7}} = 0.409 \text{ mM.}$$

---

[1]) *Archives Teyler*, S. II, Vol. X, p. 92.

$C_{u}SO_{4} + 5\,Aq.$

Poids spécifique de la solution : 1.0305
Pression latérale sur la paroi : 2221 gr ($S$),
par laquelle fut expulsé en 3 heures : 47.93 gr
ou en une heure : 15.98 gr. ($Q$).

Transport

*de l'anode vers la kathode.*

$I = 1$ Amp.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h | 0m | 0s | — | 9h | 10m | 10s | ... 21 | gouttes. |
| | 10 | 10 | | | 20 | 8 | 20 | „ |
| | 20 | 8 | | | 30 | 8 | 21 | „ |
| | 30 | 8 | | | 40 | 7 | 21 | „ |
| | 40 | 7 | | | 50 | 0 | 21 | „ |
| | 50 | 0 | | 10 | 0 | 15 | 22 | „ |
| 10 | 0 | 15 | | | 10 | 13 | 21 | „ |
| | 10 | 13 | | | 20 | 9 | 21 | „ |
| | 20 | 9 | | | 30 | 12 | 22 | „ |
| | 30 | 12 | | | 40 | 7 | 21 | „ |
| | 40 | 7 | | | 50 | 16 | 22 | „ |
| | 50 | 16 | | 11 | 0 | 22 | 22 | „ |
| | | | | | | | 255 | gouttes. |

Poids des 255 gouttes . . . . . 33.10 gr.
Transport par amp.-heure . . . . . 16.55 „ ($T$).

$I = 1$ Amp.

Différence potentielle
des parois intérieure et extérieure.
Résistance introduite : 478.2 Ohm.
Déclinaison du multiplicateur.

$\alpha = 26°.5$
25. 0
25. 0
26. 0
26. 0
26. 0

154°.5
6

25°.8, corresp. à une intensité : 0.001915 Amp.
$0.001915 \times 478.2 = 0.932$ Volt. ($\Delta V$).

Après que la vase a été nettoyée de la manière sus-indiquée et de nouveau remplie d'eau distillée jusqu'à la hauteur de 142 mM., il en écoulait en 4 heures 68.68 gr. ou en une heure 17.17 gr.

dont $$m = \sqrt[4]{\frac{17.17 \times 3.6}{2152\,3}} = 0.412 \text{ mM.}$$

d'où il paraît que par ce nettoyement la porosité de la vase a accrû en raison de 409 à 412.

$$Z_n SO_4 + 7\,Aq.$$

Poids spécifique de la solution : 1.0366.
Pression latérale sur la paroi : 2210 gr. ($S$).
par laquelle est expulsé en 4 heures : 69.63 gr.
ou en une heure : 17 41 gr. ($Q$).

## Transport

*de l'anode vers la kathode.*

$I = 1$ Amp.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $9^h$ | $0^m$ | $0^s$ | — | $9^h$ | $10^m$ | $2^s$ | ... 38 | gouttes. |
| | 10 | 2 | | | 20 | 0 | 38 | „ |
| | 20 | 0 | | | 30 | 12 | 39 | „ |
| | 30 | 12 | | | 40 | 14 | 39 | „ |
| | 40 | 14 | | | 50 | 10 | 39 | „ |
| | 50 | 10 | | 10 | 0 | 3 | 39 | „ |
| 10 | 0 | 3 | | | 10 | 9 | 40 | „ |
| | 10 | 9 | | | 20 | 13 | 40 | „ |
| | 20 | 13 | | | 30 | 13 | 40 | „ |
| | 30 | 13 | | | 40 | 10 | 40 | „ |
| | 40 | 10 | | | 50 | 12 | 40 | „ |
| | 50 | 12 | | 11 | 0 | 9 | 40 | „ |
| | | | | | | | 472 | gouttes. |

Poids des 472 gouttes . . . . 57.0 gr.
Transport par amp.-heure . . 28 5 „ ($T$).

$I = 1$ Amp.

Différence potentielle
des parois intérieure et extérieure.
Résistance introduite : 478.2 Ohm.
Déclinaison du multiplicateur.

$$\begin{array}{r} \alpha = 25^\circ.5 \\ 25.\ 0 \\ 24.\ 5 \\ 24.\ 5 \\ 25.\ 0 \\ 24.\ 5 \\ \hline 149^\circ.0 \\ \hline 6 \quad 24^\circ.8 \end{array}$$

24°.8, corresp. à une intensité : 0.00188 Amp.

$0.00188 \times 478.2 = 0.899$ Volt. ($\Delta V$).

En réduisant cette valeur ($\Delta V$) à celle qu'elle aurait eue si la porosité de la vase n'avait pas changé, nous avons:

$$\frac{m'^2}{m^2} \times 0.899 \text{ volt} = \left(\frac{412}{409}\right)^2 \times 0.899 \text{ volt} = 0.913 \text{ volt, } (\Delta V)'$$

La vase étant de nouveau nettoyée et remplie jusqu'à la même hauteur d'eau distillée, il en écoulait en 4 heures : 74.08 gr. ou en une heure : 18.52 gr.

dont $$m = \sqrt[4]{\frac{74.08 \times 3\ 6}{2152.7}} = 0.420 \text{ mM}$$

de sorte que, comparée à sa porosité primitive, celle de la vase est augmentée en raison de 409 : 420

$N_i\ SO_4 + 5\ Aq.$

Poids spécifique de la solution : 1.0285.
Pression latérale sur la paroi : 2214 gr. ($S$),
par laquelle fut expulsé en 5 heures : 77.43 gr.
ou en une heure : 15.49 gr. ($Q$)

## Transport

*de l'anode vers la kathode.*

$I = 1$ Amp.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h | 0m | 0s | — | 9h | 10m | 11s | ... 24 | gouttes. |
| | 10 | 11 | | | 20 | 7 | 23 | „ |
| | 20 | 7 | | | 30 | 0 | 23 | „ |
| | 30 | 0 | | | 40 | 14 | 24 | „ |
| | 40 | 14 | | | 50 | 17 | 24 | „ |
| | 50 | 17 | | 10 | 0 | 12 | 24 | „ |
| 10 | 0 | 12 | | | 10 | 21 | 25 | „ |
| | 10 | 21 | | | 20 | 8 | 24 | „ |
| | 20 | 8 | | | 30 | 13 | 25 | „ |
| | 30 | 13 | | | 40 | 15 | 25 | „ |
| | 40 | 15 | | | 50 | 19 | 25 | „ |
| | 50 | 19 | | 11 | 0 | 23 | 25 | „ |
| | | | | | | | 290 | gouttes. |

Poids des 290 gouttes . . . . . 36 25 gr.
Transport par amp.-heure . . . 18.125 „ ($T$)

$I = 1$ Amp.

**Différence potentielle**
**des parois intérieure et extérieure.**
**Résistance introduite : 478.2 Ohm.**
**Déclinaison du multiplicateur.**

$\alpha = 27°.0$
26. 5
26. 0
26. 0
26. 0
26. 0
157°.5
6

**26°.25, corresp. à une intensité : 0.00205 Amp.**

**0.00205 × 478.2 = 0.980 Volt. ($\Delta V$).**

En réduisant cette valeur de $\Delta V$ à celle qu'elle aurait eue si la vase avait retenu sa porosité primitive, nous avons:

$$\frac{m'^2}{m^2} \cdot \times 0.980 \text{ volt} = \left(\frac{420}{402}\right)^2 \times 0.980 \text{ volt} = 1.034 \text{ volt}, (\Delta V)'$$

La vase étant nettoyée et remplie comme auparavant, il en écoulait en $4\frac{1}{2}$ heures : 84.53 gr. d'eau distillée ou en une heure 18.78 gr., dont

$$m = \sqrt[4]{\frac{18.78 \times 36}{2152.7}} = 0.421 \text{ mM.}$$

d'où il paraît que cette fois la porosité de la vase n'a pas changé.

$$Fe_2\, 3\, SO_4 + 9\, Aq.$$

Poids spécifique de la solution : 1.0340.
Pression latérale sur la paroi : 2225.9 gr., (*S*)
par laquelle fut expulsé en 3 heures : 56.23 gr.
ou en une heure : 18.74 gr. (*Q*).

## Transport

*de l'anode vers la kathode.*

$I = 1$ Amp.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h | 0m | 0s | — | 9h | 10m | 3s | ... 49 | gouttes. |
| | 10 | 3 | | | 20 | 1 | 49 | „ |
| | 20 | 1 | | | 30 | 6 | 50 | „ |
| | 30 | 6 | | | 40 | 10 | 50 | „ |
| | 40 | 10 | | | 50 | 0 | 49 | „ |
| | 50 | 0 | | 10 | 0 | 3 | 50 | „ |
| 10 | 0 | 3 | | | 10 | 3 | 50 | „ |
| | 10 | 3 | | | 20 | 10 | 51 | „ |
| | 20 | 10 | | | 30 | 2 | 50 | „ |
| | 30 | 2 | | | 40 | 7 | 51 | „ |
| | 40 | 7 | | | 50 | 10 | 51 | „ |
| | 50 | 10 | | 11 | 0 | 2 | 50 | „ |
| | | | | | | | 600 | gouttes. |

Poids des 600 gouttes . . . . . 71.25 gr.
Transport par amp.-heure . . 35 625 „ (*T*).

$I = 1$ Amp.

Différence potentielle
des parois intérieure et extérieure.
Résistance introduite : 478.2 Ohm.
Déclinaison du multiplicateur.

$$\begin{array}{r} \alpha = 23^\circ.5 \\ 23.5 \\ 22.5 \\ 23.0 \\ 23.5 \\ 23.0 \\ \hline 139^\circ.0 \\ 6 \\ \hline 23^\circ.2 \end{array}$$

23°.2, corresp. à une intensité : 0.00172 Amp.
$0.00172 \times 478.2 = 0.823$ Volt. ($\Delta V$).

Si nous réduisons cette valeur de $\Delta V$ à celle qu'elle aurait eue si la vase avait retenue sa porosité primitive, nous avons

$$\frac{m'^2}{m^2} \times 0.823 \text{ volt} = \left(\frac{421}{409}\right)^2 \times 0.823 \text{ Volt} = 0.847 \text{ Volt. } (\Delta V)'.$$

J'ai tâché de nettoyer la vase de la manière ordinaire, mais je n'y ai pu reussir qu'après avoir remplacé d'abord l'eau distillée par une solution faible d'acide oxalique; et il n'était qu'après qu'il m'avait paru que de l'eau distillée, qui en écoulait, était parfaitement pure, que j'en ai rempli la vase jusqu'à l'hauteur de 412 mM., sous la pression de laquelle il en écoulait en $2\frac{1}{2}$ heures : 61.28 gr. ou en une heure : 24.51 gr. Comme

$$m = \sqrt[4]{\frac{61.28 \times 3.6}{2152.7}} = 0.442 \text{ mM.}$$

il paraît que par ce nettoyement la parosité de la vase a été augmentée en raison de 421 à 442.

$FeSO_4 + 7\,Aq.$

Poids spécifique de la solution : 1.0266.
Pression latérale sur la paroi : 2210 gr. ($S$)
par laquelle fut expulsé en 3 heures : 70.44 gr.
ou en une heure : 23.48 gr. ($Q$),

Transport

*de l'anode vers la kathode.*

$I = 1$ Amp

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $9^h$ | $0^m$ | $0_s$ | — | $9^h$ | $10^m$ | $12^s$ ... | 36 gouttes. |
| | 10 | 12 | | | 20 | 5 | 35 „ |
| | 20 | 5 | | | 30 | 13 | 36 „ |
| | 30 | 13 | | | 40 | 6 | 35 „ |
| | 40 | 6 | | | 50 | 10 | 36 „ |
| | 50 | 10 | | 10 | 0 | 5 | 36 „ |
| 10 | 0 | 5 | | | 10 | 5 | 36 „ |
| | 10 | 5 | | | 20 | 0 | 36 „ |
| | 20 | 0 | | | 30 | 15 | 37 „ |
| | 30 | 15 | | | 40 | 13 | 37 „ |
| | 40 | 13 | | | 50 | 0 | 36 „ |
| | 50 | 0 | | 11 | 0 | 10 | 37 „ |
| | | | | | | | 433 gouttes. |

Poids des 433 gouttes . . . . . 49.65 gr.
Transport par amp.-heure . . . 24.875 „ ($T$).

$I = 1$ Amp.

Différence potentielle
des parois intérieure et extérieure.
Résistance introduite : 478.2 Ohm.
Déclinaison du multiplicateur.

$\alpha = 21°.0$
21. 5
22. 0
22. 5
22. 5
21. 5

131°.0

6

21°.82, corresp. à une intensité : 0.00158 Amp.
$0.00158 \times 478.2 = 0\ 756$ Volt. ($\Delta V$).

En réduisant cette valeur de $\Delta V$ à celle qu'elle aurait eue si la vase avait retenu sa porosité primitive, nous avons

$$\frac{m'^2}{m^2} \times 0.756 \text{ Volt} = \left(\frac{442}{409}\right)^2 \times 0.756 \text{ Volt} = 0.857 \text{ Volt } (\Delta V)'.$$

---

Après avoir de nouveau nettoyé la vase de la manière tout à l'heure indiquée, sa porosité me parut tellement accrue, que je

craignais, en ayant égard à la diminution correspondante de $\Delta V$, qu'elle ne serait plus propre à transporter les solutions des nitrates, auxquelles à présent je voulais étendre mes recherches et dont le transport pourtant déjà faible m'était connu par expérience.

C'est pourquoi je me suis servi pour ces recherches d'une autre vase, dont voici les dimensions.

VASE N°. 2.

Hauteur jusqu'à laquelle remplie . . . 142.00 mM.
Épaisseur moyenne de la paroi . . . . 4.15 „
Diamètre du fond . . . . . 66.00 „

Quand cette vase était remplie d'eau distillée, dont la pression latérale sur la paroi fut 2089.4 grammes, il en écoulait en 2 heures 37.93 gr. ou 18.965 gr. en une heure,

$$\text{dont: } m = \sqrt[4]{\frac{18.965 \times 4.15}{2089.4}} = 0.440 \text{ mM.}$$

$C_u N_2 O_6 + 6 Aq.$

Poids spécifique de la solution : 1.0392.
Pression latérale sur la paroi : 2150.4 gr. ($S$)
par laquelle fut expulsé en 2 heures : 42.38 gr.
ou en une heure : 21.19 gr. ($Q$)

Transport

*de la kathode vers l'anode.*

$I = 2$ Amp.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h | 0m | 0s | — 9h | 10m | 0s | ... 24 | gouttes. |
| | 10 | 0 | | 20 | 14 | 25 | „ |
| | 20 | 14 | | 30 | 21 | 25 | „ |
| | 30 | 21 | | 40 | 22 | 25 | „ |
| | 40 | 22 | | 50 | 10 | 25 | „ |
| | 50 | 10 | | 0 | 14 | 26 | „ |
| 10 | 0 | 14 | 10 | 10 | 21 | 27 | „ |
| | 10 | 21 | | 20 | 8 | 26 | „ |
| | 20 | 8 | | 30 | 12 | 27 | „ |
| | 30 | 12 | | 40 | 19 | 27 | „ |
| | 40 | 19 | | 50 | 0 | 27 | „ |
| | 50 | 0 | 11 | 0 | 12 | 28 | „ |
| | | | | | | 312 | gouttes. |

Poids des 312 gouttes . . . . . 39.28 gr.
Transport par amp.-heure. . . . 9.82 „ ($T$)

$I = 1$ Amp.

Différence potentielle
des parois intérieure et extérieure.
Résistance introduite : 478.2 Ohm.
Déclinaison du multiplicateur.

$$\begin{array}{r} \alpha = 17^\circ.5 \\ 18.0 \\ 18.0 \\ 18.0 \\ 17.5 \\ 17.5 \\ \hline 106^\circ.5 \\ 6 \\ \hline 17^\circ.75 \end{array}$$

, corresp. à une intensité : 0.00128 Amp.

$0.00128 \times 478.2 = 0.612$ Volt. ($\Delta V$).

En réduisant cette valeur à celle qu'elle aurait eue si la vase avait eu l'épaisseur et la porosité que la vase N°. 1 eut pendant la première recherche ($d = 3.6$ mM., $m = 0.409$ mM.), nous avons:

$$0.612 \times \frac{d}{d'} \times \frac{m'^2}{m^2} = 0.612 \times \frac{3.60}{4.15} \times \left(\frac{440}{409}\right)^2 = 0.635 \text{ Volt. } (\Delta V)'.$$

---

Après avoir nettoyé la vase il me parut, qu'en ayant égard à la quantité d'eau distillée qui en écoulait en une heure, le diamètre moyen $m$ du tuyau, qui seul peut remplacer les pores, s'était accru à 0 456 mM. Craignant qu'une vase de cette porosité ne transporterait que très imparfaitement une solution tellement réfractaire au transport par le courant que l'azotate de zinc, je m'ai choisi une dont l'épaisseur de la paroi était égale à celle de la vase N°. 2 et qui était moins poreuse. Comme telle se présentait la

VASE N°. 3,

dont voici les dimensions:

| | | |
|---|---|---|
| Hauteur jusqu'à laquelle remplie . . . | 142 00 | mM. |
| Épaisseur moyenne de la paroi . . . . | 4.15 | „ |
| Diamètre du fond . . . . . | 66.00 | „ |

Nonobstant que ces dimensions ne diffèrent pas de celles de la vase N°. 2, il n'en écoulait en 5 heures que 79.75 gr. ou 15.95 gr. en une heure, dont

$$m = \sqrt[4]{\frac{15.95 \times 4\ 15}{2089.4}} = 0\ 422 \text{ mM.}$$

$$Z_n N_2 O_6 + 6 Aq.$$

Poids spécifique de la solution : 1.0270.
Pression latérale sur la paroi : 2154 8 gr (*S*)
par laquelle fut expulsé en 2 heures : 30 46 gr.
ou en une heure : 15.23 gr (*Q*).

## Transport

*de la kathode vers l'anode.*

$I = 2$ Amp.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2h | 0m | 0s | — | 2h | 10m | 10s | ... | 20 gouttes. |
| | 10 | 10 | | | 20 | 10 | | 20 „ |
| | 20 | 10 | | | 30 | 5 | | 20 „ |
| | 30 | 5 | | | 40 | 9 | | 20 „ |
| | 40 | 9 | | | 50 | 12 | | 21 „ |
| | 50 | 12 | | 3 | 0 | 18 | | 20 „ |
| 3 | 0 | 18 | | | 10 | 12 | | 20 „ |
| | 10 | 12 | | | 20 | 4 | | 20 „ |
| | 20 | 4 | | | 30 | 10 | | 20 „ |
| | 30 | 10 | | | 40 | 22 | | 21 „ |
| | 40 | 22 | | | 50 | 8 | | 20 „ |
| | 50 | 8 | | 4 | 0 | 19 | | 21 „ |
| | | | | | | | | 243 gouttes, |

Poids des 243 gouttes . . . . . 19.95 gr.
Transport par amp.-heure . . 5.00 „ (*T*)

$I = 1$ Amp.

Différence potentielle
des parois intérieure et extérieure
Résistance introduite : 478.2 Ohm.
Déclinaison du multiplicateur.

$\alpha = 22°.0$
22. 0
21. 5
21. 0
20. 5
20. 5
107°.5
6

17°.9, corresp. à une intensité : 0.00158 Amp.
$0.00158 \times 478.2 = 0.764$ Volt. (*1V*).

En réduisant cette valeur à celle qu'elle aurait eue, si les dimen-

sions et la porosité de la vase avaient été égales à celle de la vase N°. 1 pendant la première recherche ($d = 3\,6$ mM, $m = 0.409$ mM), nous avons:

$$0.764 \times \frac{d}{d'} \times \frac{m'^2}{m^2} = 0.764 \times \frac{3.60}{4.15} \times \left(\frac{422}{409}\right)^2 = 0.725 \text{ Volt } (\Delta V)'.$$

---

Après avoir nettoyé la vase en faisant passer par sa paroi de l'eau distillée, sous une pression de 1.7 atm., jusqu'à ce que l'eau écoulante parut être parfaitement neutre, il en écoulait, sous la pression latérale 2089.4 gr., en 2 heures 36.43 gr. ou en une heure 18.215 gr., dont

$$m = \sqrt[4]{\frac{18.215 \times 4.15}{2089.4}} = 0.435 \text{ mM}.$$

$P_b N_2 O_6$.

Poids spécifique de la solution : 1.0428.
Pression latérale sur la paroi : 2178.8 gr. ($S$),
par laquelle fut expulsé en 2 heures : 35.83 gr
ou en une heure : 17.915 gr. ($Q$).

Transport

*de la kathode vers l'anode.*

$I = 1$ Amp.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h | 0m | 0s | — | 9h | 10m | 4s | ... 48 | gouttes. |
| | 10 | 4 | | | 20 | 6 | 49 | „ |
| | 20 | 6 | | | 30 | 3 | 48 | „ |
| | 30 | 3 | | | 40 | 3 | 50 | „ |
| | 40 | 3 | | | 50 | 5 | 49 | „ |
| | 50 | 5 | | 10 | 0 | 7 | 49 | „ |
| 10 | 0 | 7 | | | 10 | 9 | 51 | „ |
| | 10 | 9 | | | 20 | 8 | 50 | „ |
| | 20 | 8 | | | 30 | 9 | 50 | „ |
| | 30 | 9 | | | 40 | 7 | 50 | „ |
| | 40 | 7 | | | 50 | 6 | 50 | „ |
| | 50 | 6 | | 11 | 0 | 0 | 50 | „ |
| | | | | | | | 594 | gouttes. |

Poids des 594 gouttes . . : 60.45 gr.
Transport par amp.-heure : 30.225 „ ($T$).

$I = 1$ Amp.

Différence potentielle
des parois intérieure et extérieure.
Resistance introduite : 478.2 Ohm.
Déclinaison du multiplicateur.

$\alpha = 21°.0$
20. 0
20. 5
20. 5
20. 5
21. 0
---
123°.5
6 ---
20°.6, corresp. à une intensité : 0.00146 Amp.
0.00146 × 478.2 = 0.698 Volt. ($\Delta V$).

En réduisant cette valeur de $\Delta V$ à celle qu'elle aurait eue si la vase avait eu les dimensions $d = 3.6$ mM. et la parosité relative $m = 0.409$ mM. de la vase N°. 1 pendant la première recherche, nous avons

$$0.698 \times \frac{d}{d'} \times \frac{m'^2}{m^2} = 0.698 \times \frac{3.60}{4.15} \times \left(\frac{435}{409}\right)^2 = 0.680 \text{ Volt. } (\Delta V)'.$$

La vase étant de nouveau nettoyée de la manière tout à l'heure indiquée, il en écoulait sous la pression latérale de 2089.4 gr., 43.78 gr. en deux heures ou en une heure 21.89 gr. ; dont

$$m = \sqrt[4]{\frac{21.89 \times 4.15}{2089.4}} = 0.456 \text{ mM.}$$

$$Ni\,N_2\,O_6 + 6\,Aq.$$

Poids spécifique de la solution : 1.0252.
Pression latérale sur la paroi : 2142.1 gr. ($S$)
par laquelle fut expulsé en 2 heures : 44.58 gr.
ou en une heure : 22.29 gr. ($Q$).

## Transport

*de la kathode vers l'anode*

$I = 1$ Amp.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h | 0m | 0s | — | 9h | 10m | 10s | ... | 14 gouttes. |
| | 10 | 10 | | | 20 | 36 | | 13 „ |
| | 20 | 36 | | | 30 | 5 | | 12 „ |
| | 30 | 5 | | | 40 | 32 | | 14 „ |
| | 40 | 32 | | | 50 | 20 | | 14 „ |
| | 50 | 20 | | 10 | 0 | 31 | | 15 „ |
| 10 | 0 | 31 | | | 10 | 14 | | 15 „ |
| | 10 | 14 | | | 20 | 0 | | 15 „ |
| | 20 | 0 | | | 30 | 8 | | 16 „ |
| | 30 | 8 | | | 40 | 20 | | 17 „ |
| | 40 | 20 | | | 50 | 14 | | 17 „ |
| | 50 | 14 | | 11 | 0 | 5 | | 17 „ |
| | | | | | | | | 179 gouttes. |

Poids des 179 gouttes . . . . . : 18.35 gr.
Transport moyen en une amp.-heure : 9.175 „ ($T$).

$I = 1$ Amp.

**Différence potentielle**
**des parois intérieure et extérieure.**
**Résistance introduite : 478.2 Ohm.**
**Déclinaison du multiplicateur.**

$\alpha = 19°.0$
18. 5
18. 0
17. 5
17. 5
18. 5

109°.0
6

18°.2 corresp. à une intensité : 0.00122 Amp.

$0.00122 \times 478.2 = 0.583$ Volt. ($\Delta V$).

Si nous réduisons cette valeur de $\Delta V$ à celle, qu'elle aurait eue si nous nous étions servis de la vase N°. 1, — $d = 3.6$ mM., $m = 0.409$ mM. — alors elle devient:

$$0.583 \times \frac{3.60}{4.15} \times \left(\frac{456}{409}\right)^2 = 0.642 \text{ Volt. } (\Delta V)'.$$

Lorsque j'avais de nouveau pressé de l'eau distillée par la paroi de la vase, jusqu'à ce que l'eau qui en écoulait était parfaitement neutre, il me parut que par la pression de 2089.4 gr. il en fut expulsé 46.78 gr. en 2 heures ou en une heure 23.39 gr. Il en suit

$$m = \sqrt[4]{\frac{23.39 \times 4.15}{2089.4}} = 0.465 \text{ mM.}$$

$$Fe\,N_2\,O_6 + 6\,Aq.$$

Poids spécifique de la solution : 1.0213.
Pression latérale sur la paroi : 2133.9 gr. ($S$)
par laquelle fut expulsé en 2 heures : 46.78 gr.
ou en une heure 23.39 gr. ($Q$).

## Transport

*de la kathode vers l'anode.*

$I = 1$ Amp.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2h | 0m | 0s | — | 2h | 10m | 9s | ... 42 | gouttes. |
| | 10 | 9 | | | 20 | 6 | 41 | „ |
| | 20 | 6 | | | 30 | 0 | 41 | „ |
| | 30 | 0 | | | 40 | 9 | 42 | „ |
| | 40 | 9 | | | 50 | 8 | 42 | „ |
| | 50 | 8 | | 3 | 0 | 1 | 43 | „ |
| 3 | 0 | 1 | | | 10 | 8 | 45 | „ |
| | 10 | 8 | | | 20 | 0 | 44 | „ |
| | 20 | 0 | | | 30 | 0 | 45 | „ |
| | 30 | 0 | | | 40 | 3 | 47 | „ |
| | 40 | 3 | | | 50 | 10 | 48 | „ |
| | 50 | 10 | | 4 | 0 | 0 | 47 | „ |
| | | | | | | | 527 | gouttes. |

Poids des 527 gouttes . . . . . 68.25 gr.
Transport par amp.-heure . . . . 34.13 „

$I = 1$ Amp.

**Différence potentielle**
**des parois intérieure et extérieure.**
**Résistance introduite : 478.2 Ohm.**
**Déclinaison du multiplicateur.**

$\alpha = 13°.5$
13. 5
14. 0
14. 5
14. 5
14. 5
84°.5
6

14°.1 corresp. à une intensité : 0.00095 Amp,
$0.00095 \times 478{,}2 = 0.454$ Volt, $(\Delta V)$

Si l'on réduit cette valeur de $\Delta V$ à celle, qu'elle aurait eue si la vase avait eu les mêmes dimensions ($d = 3.6$ mM.) et la même porosité ($m = 0.409$ mM.) que pendant les premières recherches, il vient:

$$0.454 \times \frac{3.60}{4.15} \times \left(\frac{465}{409}\right)^2 = 0.514 \text{ Volt. } (\Delta V)'.$$

---

Comme je craignais qu'en nettoyant la paroi de la vase de l'oxyde, qui après le transport de la solution d'azotate de fer la teignit en jaune foncé, je ne ferais qu'augmenter encore sa porosité pourtant déjà assez grande, je me suis servi pour mes recherches concernant les solutions de chlorures d'une nouvelle vase, dont il m'avait paru que, par

une hauteur de l'eau de 142.00 mM.,
un diamètre du fond de 67.00 „
une épaisseur de paroi de 3.75 „ et
une pression conséquente de 2121 10 gr.,

elle fit écouler 30.98 gr. d'eau distillée en 2 heures, ou en une heure 15.49 gr. et dont, par conséquent, la porosité relative était donnée par la formule:

$$m = \sqrt[4]{\frac{15.49 \times 3.75}{2121.10}} = 0.410 \text{ mM.}$$

$Z_n Cl_2$.

Poids spécifique de la solution : 1.0417.

Pression latérale sur la paroi : 2176 5 gr. ($S$).

qui expulsait : 28.24 gr. en 2 heures ou 14.12 gr. par heure ($Q$).

Transport

*de la kathode vers l'anode.*

$I = 2$ Amp.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2h | 0m | 0s | — | 2h | 10m | 3s ... | 5 | gouttes. |
| | 10 | 3 | | | 20 | 17 | 5 | „ |
| | 20 | 17 | | | 30 | 15 | 5 | „ |
| | 30 | 15 | | | 40 | 21 | 5 | „ |
| | 40 | 21 | | | 50 | 21 | 5 | „ |
| | 50 | 21 | | 3 | 0 | 23 | 5 | „ |
| 3 | 0 | 23 | | | 10 | 17 | 5 | „ |
| | 10 | 17 | | | 20 | 28 | 5 | „ |
| | 20 | 28 | | | 30 | 30 | 5 | „ |
| | 30 | 30 | | | 40 | 96 | 6 | „ |
| | 40 | 96 | | | 50 | 5 | 5 | „ |
| | 50 | 5 | | 4 | 0 | 6 | 6 | „ |
| | | | | | | | 62 | gouttes. |

Poids des 62 gouttes. . . . . 6.4 gr

Transport par amp.-heure . . 1.6 „ ($T$).

$I = 1$ Amp.

Différence potentielle
des parois intérieure et extérieure.
Résistance introduite : 478.2 Ohm.
Déclinaison du multiplicateur.

$\alpha =$ 7°.0
7. 5
7. 0
7. 0
6. 0
5. 5

40°.0

6

6°.7, corresp. à une intensité : 0.00057 Amp.

$0.00057 \times 478.2 = 0.273$ Volt. ($\Delta V$).

En réduisant cette valeur de $\Delta V$ à celle qu'elle aurait eue, si les dimensions et la porosité de la vase avaient été égales à

celles de la vase, dont je me suis servi pour mes premières recherches ($d = 3.6$ mM., $m = 0.409$ mM ), il vient:

$$0.273 \times \frac{3.6}{3.75} \times \left(\frac{410}{409}\right)^2 = 0.263 \text{ Volt. } (\Delta V)'.$$

---

De la vase, de nouveau nettoyée, il écoulait en 2 heures 38.88 gr. d'eau distillée, ou 19.44 gr. par heure; comme la pression était la même que pendant les recherches précédente, la porosité relative est donnée par

$$m = \sqrt[4]{\frac{19.44 \times 3.75}{2121.10}} = 0.430 \text{ mM.}$$

$N_i\ Cl_2$.

Poids spécifique de la solution : 1.0230.
Pression latérale sur la paroi : 2131.7 gr. ($S$)
par laquelle fut expulsé en 2 heures : 27.13 gr.
ou en une heure : 13.57 gr. ($Q$).

Transport

*de la kathode vers l'anode.*

$I = 2$ Amp.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h | 0m | 0s | — | 9h | 10m | 30s | ... 12 | gouttes. |
| | 10 | 30 | | | 20 | 41 | 12 | „ |
| | 20 | 41 | | | 30 | 45 | 12 | „ |
| | 30 | 45 | | | 40 | 37 | 12 | „ |
| | 40 | 37 | | | 50 | 30 | 12 | „ |
| | 50 | 30 | | 10 | 0 | 18 | 12 | „ |
| 10 | 0 | 18 | | | 10 | 17 | 12 | „ |
| | 10 | 17 | | | 20 | 4 | 12 | „ |
| | 20 | 4 | | | 30 | 37 | 13 | „ |
| | 30 | 37 | | | 40 | 14 | 12 | „ |
| | 40 | 14 | | | 50 | 30 | 13 | „ |
| | 50 | 30 | | 11 | 0 | 39 | 13 | „ |
| | | | | | | | 147 | gouttes. |

Poids des 147 gouttes . . . . . 17.00 gr.
Transport par amp.-heure. . . 4.25 „ ($T$)

$I = 1$ Amp.

**Différence potentielle**
**des parois intérieure et extérieure.**
**Résistance introduite : 478.2 Ohm.**
**Déclinaison du multiplicateur.**

$$\begin{array}{r} \alpha = 11^\circ.0 \\ 10.\ 5 \\ 9.\ 5 \\ 9.\ 0 \\ 8.\ 5 \\ 8.\ 5 \\ \hline 57^\circ.0 \\ 6 \\ \hline 9^\circ.5 \end{array}$$

**9°.5, corresp. à une intensité : 0.00067 Amp.**

**$0.00067 \times 478.2 = 0.320$ Volt. ($\Delta V$).**

Si nous réduisons cette valeur à celle qu'elle aurait eue si la vase avait la même porosité et les même dimensions que celle dont je me suis servi pendant la première de ces recherches ($d = 3.60$ mM., $m = 0.409$ mM.) il vient:

$$0.320 \times \frac{3.60}{3.75} \times \left(\frac{430}{409}\right)^2 = 0.338 \text{ Volt. } (\Delta V)'.$$

---

Quand la vase avait été nettoyée il en écoulait, en 2 heures, 37.36 gr. d'eau distillée ou 18.815 gr. en une heure, correspondant, la pression étant restée invariable, à

$$m = \sqrt[4]{\frac{18.815 \times 3.75}{2121.10}} = 0.420 \text{ mM.}$$

$$C_u\, Cl_2 + 2\, Aq.$$

Poids spécifique de la solution : 1.0350.
Pression latérale sur la paroi : 2195.3 gr. ($S$)
par laquelle fut expulsé en 2 heures : 35.73 gr.
ou 17.67 gr. par heure. ($Q$)

## Transport

*de la kathode vers l'anode.*

$I = 2$ Amp.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h | 0m | 0s | — | 9h | 10m | 0s | ... 16 | gouttes. |
| | 10 | 0 | | | 20 | 5 | 16 | „ |
| | 20 | 5 | | | 30 | 23 | 16 | „ |
| | 30 | 23 | | | 40 | 10 | 15 | „ |
| | 40 | 10 | | | 50 | 12 | 16 | „ |
| | 50 | 12 | | 10 | 0 | 34 | 16 | „ |
| 10 | 0 | 34 | | | 10 | 25 | 15 | „ |
| | 10 | 25 | | | 20 | 32 | 14 | „ |
| | 20 | 32 | | | 30 | 27 | 15 | „ |
| | 30 | 27 | | | 40 | 40 | 15 | „ |
| | 40 | 40 | | | 50 | 17 | 14 | „ |
| | 50 | 17 | | 11 | 0 | 3 | 14 | „ |
| | | | | | | | 182 | gouttes. |

Poids des 182 gouttes. . . . . 24.20 gr.
Transport par amp.-heure . . . . . 5.05 „ ($T$).

$I = 1$ Amp.

**Différence potentielle**
**des parois intérieure et extérieure.**
**Résistance introduite : 478.2 Ohm.**
**Declinaison du multiplicateur.**

$\alpha = 8°.5$
8. 5
9. 0
9. 0
8. 5
8. 5

52°.0
6

8°.7, corresp. à une intensité : 0.000622 Amp.
$0.000622 \times 478.2 = 0.297$ ohm. ($\Delta V$).

En réduisant cette valeur à celle qu'elle aurait eue si les dimensions et la porosité de la vase avaient été égales à celles de la vase, dont je me suis servi pendant le premier examen ($d = 3.60$ mM., $m = 0.409$ mM.) il vient

$$0.297 \times \frac{3.60}{3.75} \times \left(\frac{420}{409}\right)^2 = 0.302 \text{ Volt. } (\Delta V).$$

La vase de nouveau nettoyée, laissait écouler, sous une même pression latérale; 45 43 gr. d'eau distillée en 2 heures, ou 22.72 gr. par heure; dont

$$m = \sqrt[4]{\frac{22.72 \times 3.75}{2121.10}} = 0.450 \text{ mM.}$$

$Fe_2\ Cl_6$

Poids spécifique de la solution : 1.0220.
Pression latérale sur la paroi : 2167.7 gr. ($S$),
par laquelle fut expulsé en 2 heures : 45.34 gr.
ou 22.67 gr. par heure ($Q$).

## Transport

*de la kathode vers l'anode.*

$I = 2$ Amp.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9h | 0m | 0s | — | 9h | 10m | 21s | ... 23 | gouttes, |
| | 10 | 21 | | | 20 | 16 | 22 | „ |
| | 20 | 16 | | | 30 | 12 | 22 | „ |
| | 30 | 12 | | | 40 | 21 | 23 | „ |
| | 40 | 21 | | | 50 | 22 | 23 | „ |
| | 50 | 22 | | 10 | 0 | 4 | 22 | „ |
| 10 | 0 | 4 | | | 10 | 4 | 23 | „ |
| | 10 | 4 | | | 20 | 9 | 23 | „ |
| | 20 | 9 | | | 30 | 23 | 24 | „ |
| | 30 | 23 | | | 40 | 12 | 23 | „ |
| | 40 | 12 | | | 50 | 10 | 23 | „ |
| | 50 | 10 | | 11 | 0 | 0 | 23 | „ |
| | | | | | | | 274 | gouttes. |

Poids des 274 gouttes . . . . . 36.45 gr.
Transport par amp.-heure . . . . . 9.11 „ ($T$).

$I = 1$ Amp.

Différence potentielle
des parois intérieure et extérieure.
Résistance introduite : 478.2 Ohm.
Déclinaison du multiplicateur.

$$\begin{array}{r} \alpha = 10^\circ.0 \\ 10.\,0 \\ 10.\,0 \\ 9.\,5 \\ 9.\,0 \\ 9.\,0 \\ \hline 57^\circ.5 \\ 6 \\ \hline 9^\circ.6 \end{array}$$

9°.6 corresp. à une intensité : 0.000676 Amp.

$0.000676 \times 478.2 = 0.323$ Volt. $(\Delta V)$

quelle valeur de $\Delta V$, réduite à celle qu'elle aurait eue si dès l'examen de la solution de sulfate de cuivre la vase n'avait pas changé, devient:

$$0.323 \times \frac{3.60}{3.75} \times \left(\frac{450}{409}\right)^2 = 0.376 \text{ Volt. } (\Delta V)'.$$

---

En résumant, il paraît que nous avons trouvé pour $\Delta V' = \frac{Id}{km^2}$, les valeurs suivantes:

| | | |
|---|---|---|
| pour la solution de sulfate de cuivre..... | 0.932 | Volt. |
| „ „ „ „ „ „ zinc..... | .913 | „ |
| „ „ „ „ „ „ nickel..... | 1.034 | „ |
| „ „ „ „ „ ferrique..... | 0.847 | „ |
| „ „ „ „ „ ferreux..... | .857 | „ |
| „ „ „ d'azotate de cuivre..... | .536 | „ |
| „ „ „ „ „ zinc..... | .525 | „ |
| „ „ „ „ „ plomb..... | .680 | „ |
| „ „ „ „ „ nickel..... | .642 | „ |
| „ „ „ „ „ fer..... | .514 | „ |
| „ „ „ de chlorure de cuivre.... | .302 | „ |
| „ „ „ „ „ „ zinc..... | .263 | „ |
| „ „ „ „ „ „ nickel.... | .338 | „ |
| „ „ „ „ „ ferrique..... | .376 | „ |

Comme ces valeurs ont toutes rapport à la même valeur de $I$, $d$ et $m$ elles sont entre elles comme celles de $^1/_k$; c.-à-d., elles sont les réciproques des pouvoirs conducteurs pour l'électricité

des différentes solutions. Ainsi arrangées elles font voir qu'il y a une différence carractéristique entre le pouvoir conducteur des sulfates, des azotates et des chlorures et que, du moins pour les solutions examinées, contenant 5 parties de sel sur 100 parties d'eau, vaut la règle:

**le pouvoir conducteur des solutions de chlorures surpasse celui des solutions d'azotates, qui lui-même surpasse celui des solutions de sulfates.**

En exprimant les valeurs trouvées dans celle du pouvoir conducteur d'une solution de chlorure de zinc de 5%, déterminée par M. LONG, selon la méthode de M. F. KOHLRAUSCH ($452.10^{-8}$ × celui du mercure à 18° C.), nous avons:

| Solution de | $k_{18}.10^8$ | Solution de | $k_{18}.10^8$ | Solution de | $k_{18}.10^8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| sulfate de cuivre.. | 128 | azotate de cuivre. | 222 | chlorure de cuivre | 393 |
| „ de zinc.... | 130 | „ de zinc... | 226 | „ de zinc.. | 452 |
| „ de nickel.. | 115 | „ de nickel. | 190 | „ de nickel | 352 |
| „ ferrique.... | 140 | „ de fer. .. | 231 | „ ferrique.. | 315 |
| „ ferreux.... | 140 | „ de plomb. | 190 | | |

Que le pouvoir conducteur électrique des solutions salines dépend en premier lieu de la composante electronegative du sel en solution, cela me paraît un fait qui, autant que je sais, n'a pas été relevé jusqu'à présent. Qu'il me sautait aux yeux comme résultat d'un examen, qui n'est qu'une partie subordonnée d'un examen plus étendu, cela s'explique par ce que ce dernier exigeait une juxtaposition du pouvoir conducteur *de solutions de concentration égale*. Si l'on compare les résultats répandus de déterminations directes, effectuées par plusieurs savants, alors il paraît qu'entre ces résultats existe une relation analogue.

Pour ce qui régarde la confiance à mettre en ces valeurs trouvées, pour ainsi dire, le long d'un chemin détourné, nous observons que, comme nous, M. M. KOHLRAUSCH et FREUND ont trouvé les pouvoirs conducteurs des solutions de $CuSO_4$ et de $ZnSO_4$, d'une concentration de 5%, à peu près égaux; qu'en l'exprimant dans la même unité que nous, M. LONG trouve pour

celui d'une solution de $Pb\,N_2\,O_6$ : 179 — nous 190 — et que, quoique il soit vrai que la valeur 341, trouvée par le même savant pour le pouvoir conducteur d'une solution de $Cu\,N_2\,O_6$, diffère beaucoup de la nôtre, 222, il en est de même avec la valeur trouvée par M. FREUND — 177 — qui s'en approche de beaucoup plus.

Quoiqu'il en soit, il me semble que le sujet est assez intéressant pour y vouer un examen tout exprès, qui non seulement s'étende sur les solutions de concentration différente de sels à base métallique, mais qui embrasse aussi celles de sels dites à base alcaline et alcalino-terreuse.

En revenant à présent à la détermination du rapport entre les forces transportantes, nous observons qu'une réduction des valeurs de $\Delta V$, obtenues au moyen des vases successives, comme si elles avaient été obtenues au moyen d'une d'elles, modifie les valeurs $\frac{T}{Q}.S$ dans le même rapport que les valeurs $\Delta V$. Bien est-il vrai que par cette échange les valeurs $T$ subissent encore une autre modification — selon la formule de M. POISEUILLE —; mais les valeurs de $Q$ étant modifiées selon la même formule, $\frac{T}{Q}$ reste constant et de même $E$. En indiquant par $\Delta V'$ la valeur réduite de $\Delta V$, par $T'$ celle de $T$, nous avons

$$K = E\Delta V' = \frac{T'}{Q} \cdot S \text{ grammes};$$

dont il suit, pour les valeurs successives de $E$:

$$E = \frac{T'}{Q} \cdot S \frac{\text{grammes}}{\text{volts}},$$

ou, en réduissant au système $C.G.S.$:

$$E = \frac{T'}{Q} \cdot S \frac{981 \text{ dyne}}{\Delta V' \times 300 \text{ dyne}} = \frac{T'}{Q} \cdot \frac{S}{\Delta V'} \cdot \frac{981}{300} \text{ unités électriques.}$$

Ces valeurs sont rassemblées dans le tableau suivant.

| Noms des solutions. | $T$ | $\Delta V$ | $\Delta V'$ | $T' = T \frac{\Delta V'}{\Delta V}$ | $Q$ | $S$ | $K = \frac{T'}{Q} S$ | $E = \frac{981}{300} \cdot \frac{K}{\Delta V}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sulfate de cuivre.. | 16.6gr. | 0.932V | 0.932V | 16.6 gr. | 16.0gr. | 2221gr. | 2304 gr. | 8085 U. E. |
| „ „ zinc... | 28.5 „ | .899 „ | .913 „ | 28.9 „ | 17.4 „ | 2210 „ | 3669 „ | 13141 „ |
| „ „ nickel.. | 18.1 „ | .980 „ | 1.034 „ | 19.1 „ | 15.5 „ | 2214 „ | 2730 „ | 8636 „ |
| „ ferrique... | 25.6 „ | .823 „ | 0.847 „ | 26.3 „ | 18.7 „ | 2226 „ | 2487 „ | 9600 „ |
| „ ferreux... | 24.9 „ | .756 „ | .857 „ | 28.2 „ | 22.5 „ | 2210 „ | 2770 „ | 10569 „ |
| Azotate de cuivre. | 9.8 „ | .583 „ | .536 „ | 9.0 „ | 21.2 „ | 2150 „ | 913 „ | 5572 „ |
| „ „ zinc... | 5.0 „ | .764 „ | .725 „ | 4.7 „ | 15.2 „ | 2155 „ | 666 „ | 2704 „ |
| „ „ plomb. | 30.2 „ | .698 „ | .680 „ | 29.4 „ | 17.9 „ | 2179 „ | 3577 „ | 17168 „ |
| „ „ nickel. | 9.2 „ | .583 „ | .642 „ | 8.4 „ | 22.3 „ | 2142 „ | 807 „ | 4110 „ |
| „ „ fer.... | 34.1 „ | .454 „ | .514 „ | 38.6 „ | 23.4 „ | 2134 „ | 3362 „ | 21386 „ |
| Chlorure de cuivre | 5.1 „ | .297 „ | .302 „ | 5.2 „ | 17.7 „ | 2195 „ | 646 „ | 6995 „ |
| „ „ zinc . | 1.6 „ | .273 „ | .263 „ | 1.5 „ | 14.1 „ | 2177 „ | 232 „ | 2880 „ |
| „ „ nickel | 4.3 „ | .320 „ | .338 „ | 4.5 „ | 13.6 „ | 2132 „ | 705 „ | 6824 „ |
| „ ferrique . | 9.1 „ | .323 „ | .376 „ | 10.5 „ | 22.7 „ | 2168 „ | 1054 „ | 8720 „ |

Il n'en paraît aucune relation générale, ni entre les valeurs des forces transportantes et la constitution des solutions salines transportées, ni entre celle-ci et les charges électriques des parois. D'où il ne suit nullement qu'une rélation de ce genre ne pourait exister dans le cas où le contact se fait invariablement avec la même paroi, qui de plus n'a pas été chargée par le contact avec une solution de constitution différente, auparavant transportée.

HAARLEM, juillet 1906.

# SUR QUELLE ÉCHELLE S'ACCOMPLIT LE PHÉNOMÈNE DU TRANSPORT ATMOSPHÉRIQUE DE SEL MARIN.

PAR

EUG. DUBOIS.

On sait depuis longtemps que, sur les rivages maritimes, les eaux pluviales renferment constamment du chlorure de sodium. Incontestablement il faut chercher l'origine de ce sel dans la mer, d'où il est emporté par les vents ayant fouetté les vagues.

Au temps d'un ouragan, sur nos côtes, comme sur les côtes atlantiques de la Grande Bretagne, quand la mer est blanche d'écume, on peut remarquer que l'atmosphère, claire ailleurs, est tout à fait brumeuse le long du rivage, par les brouillards de mousse fine enlevée par le vent des crêtes des brisants. Quoiqu'il soit certain que la plus grande partie de cette poussière d'eau de mer ne dépasse pas les régions du littoral, une certaine quantité en est emportée au loin, dans l'intérieur du pays. Ce sont surtout les pluies qui tombent qui la ramènent sur le sol; mais, déjà en conséquence de son propre poids, la plus grande partie de cette poussière ne peut aller loin.

L'importance du transport dépend de la force du vent. On a trouvé que l'eau de pluie recueillie à Lands End, dans le Cornwall, pendant un fort vent du sud-ouest, renfermait 359 millionièmes (milligrammes par litre) de chlorure de sodium [1]). Le regretté et éminent chimiste LOBRY DE BRUYN me disait qu'au Helder, à l'extrémité de la Hollande-Septentrionale, il avait observé que, lors de tempêtes, l'eau pluviale contenait du chlorure de sodium dans la proportion de 350 et même de 500 millionièmes. Dans

[1]) ANGUS SMITH, Air and Rain. Rivers Pollution Commission. 6th Report, p. 425. London 1874. Cité par A. GEIKIE, Text Book of Geology. 4th Edition, p. 449. London 1903.

les temps ordinaires, quand le vent est moins fort. le transport en question, et par conséquent la proportion moyenne dans laquelle le chlorure de sodium se trouve dans l'eau pluviale, est beaucoup moindre. Au Helder la proportion moyenne n'excède certainement pas 60 millionièmes.

Cette proportion, je l'ai déjà indiqué, diminue considérablement à mesure qu'on s'éloigne de la mer; la plus grande partie du sel, que les vents emportent, reste sur le littoral. Elle est aussi en rapport avec la direction des vents dominants. Cela ressort à l'évidence des recherches faites, entre autres, en Angleterre. Celles du Laboratoire d'Agriculture de Rothamsted (à une trentaine de kilomètres au nord-ouest de Londres) ont établi une proportion moyenne de 3.3 millionièmes, tandis que cette proportion est de 5.4 millionièmes à Cirencester, un endroit que se trouve à 110 kilomètres à l'ouest, c'est-à-dire rapproché des côtes atlantiques, qui reçoivent les vents dominants à encore une centaine de kilomètres plus à l'ouest [1]). La proportion moyenne, pour l'Angleterre, est de 3.6 millionièmes [2]). Sur les côtes, l'eau de pluie renferme bien plus de sel marin, sur celles de l'Écosse la proportion moyenne étant de 20 millionièmes environ, et le chiffre 30 paraît représenter ce à quoi peut atteindre la proportion moyenne sur le littoral hollandais.

Dans l'Amérique du Nord, à Troy, ville de l'état de New-York, éloignée de la mer d'environ deux cents kilomètres, la proportion moyenne est de 2.7 millionièmes [3]). Les circonstances de la situation relative et des vents semblent comparables à celles des régions orientales de l'Angleterre, ce qui a pour conséquence que les eaux pluviales y renferment le chlorure de sodium dans à peu près la même proportion.

En France, aux environs de Caen, non loin de la côte atlantique, les eaux pluviales, d'après M. J. Pierre, apportent annuellement 37.5 kilogrammes de chlorure de sodium sur un hectare de terrain. La hauteur moyenne annuelle de la pluie en ces lieux étant d'environ 750 millimètres, cela implique une proportion moyenne de 5 millionièmes du sel en question [4]). Ce chiffre assez

[1]) R. Warington, Journal Chem. Soc. of London for 1887, p. 502.

[2]) Angus Smith, l. c., p. 425.

[3]) W. P. Mason, Water Supply, p. 205. Cité par J. C. Russell, River Development, p. 76. New-York 1898.

[4]) Angus Smith, l. c., p. 233.

bas est la conséquence de ce que les vents dominants, en partant de la mer, ont encore eu à parcourir deux ou trois cents kilomètres sur terre. Il est plus bas encore, 2.5 millionièmes, à Bergerac, en Dordogne, lieu déjà éloigné de cent kilomètres de la mer [1]). A Nantes, au contraire, où cette distance n'est que le tiers ou la moitié, BOBIERRE avait trouvé, par des déterminations poursuivies pendant une année, que l'eau de pluie, en moyenne contenait en dissolution 14 millionièmes de chlorure de sodium [2]).

Dans les régions où les vents de mer ne sont pas dominants et ne soufflent que durant quelques mois, comme à Outacamund, ville du Sud de l'Inde anglaise, éloignée de 120 kilomètres de la côte, les eaux pluviales renferment beaucoup moins de ce sel. La proportion moyenne en ce lieu n'est que de 0.66 millionièmes [3]).

Il est à remarquer que la quantité du sel marin dans l'atmosphère diminue encore avec la hauteur, de sorte que la pluie qui tombe à des altitudes considérables en renferme bien moins. Ainsi au Pic-du-Midi, à 2877 mètres au-dessus du niveau de la mer, la proportion n'est que de 0.34 millionièmes [4]). Aussi la rosée et le givre, se condensant des couches inférieures et plus impures de l'atmosphère, renferment le sel marin dans une proportion plus considérable que la pluie. La moyenne pour la rosée est, en Angleterre, d'un quart plus élevée que pour la pluie [5]).

Ces dernières observations nous empêchent de regarder les données, ayant seulement rapport à la pluie, comme capables de faire connaître le transport atmosphérique réel de ce sel. Beaucoup du chlorure de sodium que les vents de mer apportent sur le continent ne peut jamais s'accuser dans le pluviomètre, vu qu'une grande partie de ce sel arrive directement sur le sol, où *ensuite*, il entre avec l'eau pluviale. En effet, maintes fois, dans les dunes de la Hollande, j'ai pu remarquer, comme un phénomène constant, qu'après des pluies et aux temps de brouillards, avec vent de l'ouest, il adhère aux branches des arbrisseaux et aux herbes

---

[1]) A. MUNTZ, Sur la répartition du sel marin suivant les altitudes. Comptes rendus de l'Académie des Sciences. T. 114, (1891), p. 447—449.

[2]) A. BOBIERRE. Comptes rendus de l'Académie des Sciences. T. 58, p. 755. Paris 1864.

[3]) ANGUS SMITH, l. c. p. 425.

[4]) MUNTZ, l. c.

[5]) Rivers Pollution Commission. 6th Report, p. 32.

mouillées assez de sel marin pour se trahir distinctement par le goût, si nous portons ces objets à la langue.

Pour arriver à une évaluation plus complète de la quantité du transport atmosphérique de chlorure de sodium, il importe donc de faire usage d'autres moyens que le simple examen de l'eau de pluie. On en a cherché un dans les déterminations de ce sel dans les eaux des fleuves, avec lesquelles il retourne à la mer, en prenant en considération que ces eaux résultent de la concentration de l'eau pluviale, par évaporation. Mais ici les autres origines de sel marin sont si multiples et en même temps si considérables qu'elles nous empêchent d'apprendre davantage par ces déterminations que par celles de la quantité à laquelle le chlorure de sodium entre dans la composition des eaux pluviales.

Évidemment, ce dont on a besoin est de connaître la proportion dans laquelle l'eau météorique *qui s'infiltre dans le sol non contaminé* renferme du chlorure de sodium d'origine atmosphérique. De plus, il faut que ce soit dans un sol appartenant à une région du littoral, qui, ainsi qu'il ressort des observations citées, retient la plus grande partie de ce sel, et encore faut il que ce littoral soit exposé à des vents avec direction dominante de la mer.

Or, je crois que, dans les dunes hollandaises, nous avons sous la main toutes les données nécessaires. Voici une région littorale, faisant face aux vents marins dominants de l'ouest, une région où la totalité de l'eau météorique non évaporée s'infiltre dans un sol vierge et sans contamination de quelque importance.

Il est bien établi, aujourd'hui, que l'eau douce de nos dunes ne peut avoir d'autre origine que dans la pluie. Or l'eau pluviale qui s'infiltre dans le sol des dunes a été exactement mesurée, ces dernières années, par la méthode lysimétrique. C'est grâce aux observations de M. H. E. DE BRUYN [1]), faites durant 8 années consécutives, dans les dunes entre la Haye et Schéveningue, que nous savons qu'il s'y infiltre annuellement une couche d'eau pluviale de 382 millimètres de hauteur. Des données d'autre ordre mènent l'éminent savant à une valeur analogue, entre 300 et 400 millimètres.

---

[1]) H. E. DE BRUYN, Over lysimeter-waarnemingen en de hoeveelheid drinkwater, die de duinen dienovereenkomstig kunnen geven. Handelingen van het 9de Natuur- en Geneeskundig Congres, gehouden te 's Gravenhage, p. 148—154. Haarlem 1903.

Quant à la quantité absolue de cette eau qui, sur la terre ferme des deux provinces de la Hollande-Septentrionale et -Méridionale, entre annuellement dans le sol des dunes, en tant qu'il est à plus de 1 mètre au-dessus du niveau de la mer, on peut estimer la superficie de ce littoral à 31000 hectares ou 310 000 000 mètres carrés, de sorte qu'on arrive à un apport annuel d'eau pluviale de 100 millions mètres cubes, en chiffre rond. Un état d'équilibre étant établi, il faut que la quantité d'eau douce qui, annuellement, s'écoule, vers les régions basses, à l'est, et vers la mer, à l'ouest, avec celle du captage par les différentes prises-d'eau, équivaille à cet apport. Remarquons encore qu'incontestablement la partie supérieure de l'eau douce souterraine des dunes, reposant presque partout sur des lits argileux, et étant d'ailleurs à une distance d'une cinquantaine de mètres, tout au moins, de l'eau salée sous-jacente, ne peut devoir son chlorure de sodium qu'à l'atmosphère. Or, la proportion, dans laquelle cette eau, dont la ville d'Amsterdam s'alimente depuis plus d'un demi siècle, contient du chlorure de sodium en dissolution est restée sensiblement constante, d'environ 55 millionièmes, et égale, à peu près, à celle dans la prise-d'eau de la Haye. Constatons que la prise-d'eau d'Amsterdam comprend environ le dixième des dunes du littoral en question, bande dont elle occupe à peu près le milieu de la longueur, dans toute sa largeur (5 kilomètres), excepté un bord étroit au coté de la mer. D'ailleurs partout,au milieu des dunes et vers leur bord oriental, on trouve dans l'eau à peu près la même proportion de chlorure de sodium. Seulement tout près du bord de la mer elle semble généralement être un peu plus élevée; ainsi au Helder elle est du double de la proportion moyenne. En admettant pour celle-ci 60 millionièmes on ne peut être loin de la valeur réelle, et on trouve ainsi que, sur la région du littoral hollandais que nous avons en vue, il doit y avoir un apport atmosphérique de chlorure de sodium d'une quantité absolue de $100\,000\,000 \times 1000 \times \frac{60}{1\,000\,000} = 6\,000\,000$ kilogrammes.

La quantité de sel marin qui *relativement* est si minime que c'est à peine qu'une solution, quarante fois plus forte, se trahit à notre goût, est cependant *absolument* énorme. Afin de nous en former une idée distincte, nous nous figurerons le sel qu'elle représente chargé sur des wagons. Il faudrait annuellement 20 trains de 30 wagons à 10 000 kilogrammes pour les transporter; c'est à dire.

que tous les 18 jours un train de 30 wagons devrait entrer dans les dunes, pour y amener autant de sel marin que les vents de l'ouest y apportent. Mais d'autre part, cela ne représente guère plus qu'une fois et demie, la consommation culinaire annuelle de sel de la population d'Amsterdam, si l'on calcule celle-ci, selon la consommation annuelle en Allemagne, à 7.6 kilogrammes par tête.

Ce transport est bien inférieur à celui d'autres matières, que l'eau météorique ne dissout qu'en entrant dans le sol ou en lavant celui ci, nommément le carbonate de chaux, et bien inférieur aussi à celui des matières en suspension, dont sont chargées les rivières et les fleuves.

Pour ne pas dépasser nos frontières, nous pouvons trouver un objet de comparaison dans le Rhin.

On sait, par des observations faites durant 16 années (de 1869 à 1885), que le débit annuel d'eau de ce fleuve, à Pannerden, où il entre dans notre pays, est de 74 000 000 000 mètres cubes [1]. D'après des analyses de cette eau, dans différentes circonstances; à Bonn par BISCHOF, à Cologne par VOHL, à Arnhem par GUNNING [2], on peut évaluer à 90 millionièmes la proportion moyenne dans laquelle elle contient, en dissolution, le carbonate de chaux, en entrant dans notre pays. Annuellement le Rhin nous apporte donc, en dissolution, une quantité de cette matière de $74\,000\,000\,000\,000 \times \frac{90}{1\,000\,000} = 6\,660\,000\,000$ kilogrammes. Pour obtenir la même quantité de carbonate de chaux à l'état solide, il faudrait qu'il nous arrivât annuellement d'Allemagne 22 200 trains, de 30 wagons, entièrement chargés de cette matière. C'est à dire qu'un tel train, chargé de pierre calcaire, devrait entrer dans notre pays toutes les 23 ou 24 minutes, jour et nuit.

Il m'a semblé utile de représenter l'énormité de ce transport vis-à-vis le transport atmosphérique de sel marin, encore d'une autre façon, afin de pouvoir le comparer à la consommation de ce sel. Dans ce but j'ai prié et obtenu l'obligeante assistance de M.

---

[1]) H. BLINK. Der Rhein in den Niederlanden. Forschungen zur Deutschen Landes- und Volkskunde, herausgegeben von A. KIRCHHOFF, p. 86. Stuttgart 1889.

[2]) G. BISCHOF, Lehrbuch der chemischen und physikalischen Geologie. 2e Auflage, Bd. I, p. 271. Bonn 1863. — J. VOHL, Dingler's Polytechn. Journal, Bd. 199 (1871), p. 316. — J. W. GUNNING, Onderzoek naar den oorsprong en de scheikundige samenstelling van eenige nederlandsche wateren, p. 66. Utrecht 1853.

REYNDERS, négociant en matériaux de construction à Haarlem, et expert en cette matière, afin d'arriver à une évaluation du volume moyen des briques et des pierres dont sont bâties les maisons et édifices de Haarlem et d'Amsterdam. Comme résultat principal de ces évaluations, que je crois bien fondées, il suffit ici de dire que la ville d'Amsterdam a été bâtie d'un volume de briques et de pierres de 2 700 000 mètres cubes. Pour la bâtir en „pierre bleue de Namur" ou autre calcaire, il en faudrait un poids de 7 000 000 000 kilogrammes, ce qui, en considération des impuretés de ces calcaires, revient assez exactement au débit annuel de carbonate de chaux du Rhin. Ce fleuve nous apporte donc, annuellement, en dissolution, la masse calcaire suffisante, à l'état solide, pour en bâtir une ville de la grandeur d'Amsterdam. Que l'on y compare la quantité de sel avec lequel les mets sont préparés dans cette ville!

Pour le Missisippi le transport annuel de carbonate de chaux est de 45 502 730 000 kilogrammes, d'après les recherches de M.M. HUMPHREYS et ABBOT et de M. W. J. JONES [1]), une masse qui, à l'état solide, suffirait à la construction de 7 villes de la grandeur d'Amsterdam. Il faudrait un train tous les 3 ou 4 minutes pour un transport égal à celui de ce „père des fleuves". Pour l'ensemble de tous les fleuves du monde, pareil calcul mène au résultat que le carbonate de chaux qu'ils apportent en dissolution à la mer suffirait, à l'état solide originaire, à bâtir chaque jour une ville de cette grandeur, et il faudrait 16 trains par minute pour un transport de même capacité.

Quant aux matières solides que tous les fleuves et les rivières apportent à la mer, leur quantité est encore bien plus énorme. Le débit annuel de matières en suspension du Mississippi est neuf fois aussi considérable que celui de carbonate de chaux.

En face de ces quantités, le transport atmosphérique de sel marin semble insignifiant. Mais n'oublions pas que jusqu'ici nous n'avons considéré qu'une côte de 120 kilomètres de longueur. Si nous appliquons le résultat, obtenu pour la côte hollandaise, à l'étendue totale des rivages maritimes, en admettant que l'effet

---

[1]) Report on the physics and hydraulics of the Mississippi River. Philadelphia 1865. — Report Louisiana State Board of Health for 1882, p. 370. Cités par J. C. RUSSELL, Geological History of Lake Lahontan. U. S. Geol. Survey. Vol. 11. (1885), p. 175.

relatif des vents est, *en moyenne* — pour les côtes exposées et non-exposées, — moins important que sur notre côte, de sorte que seulement la moitié de cette étendue doit être mise en compte, nous arrivons à un transport atmosphérique annuel de sel marin plus de mille fois plus élevé que sur le littoral de la terre ferme de notre pays. C'est autant que le transport annuel de carbonate de chaux par le Rhin. Encore n'est ce qu'un trois-centième de ce transport par l'ensemble de tous les fleuves du globe.

Les données existantes sur le transport atmosphérique de chlorure de sodium peuvent nous servir à élucider la question de l'origine de ce sel, accumulé dans les lacs salés.

Les bassins de certains de ceux-ci sont d'anciens lacs d'eau douce, plus étendus que ceux de nos jours. Ces derniers, qui n'occupent que les parties les plus profondes des anciens bassins, doivent leur salinité à un changement de climat, qui, d'humide qu'il était, est devenu aride. Quand l'aridité était devenue telle que l'évaporation excédait l'apport d'eau, — apport qui bientôt n'était plus contrebalancé par un écoulement, — le lac a commencé à devenir salé. A cette classe appartiennent la mer Morte et le grand Lac Salé de l'Utah.

On est généralement d'avis que ces lacs doivent leur chlorure de sodium à la concentration de l'eau apportée depuis le commencement de la période aride. Mais on n'est pas d'accord sur l'origine de ce sel. D'après les uns il proviendrait surtout d'émanations volcaniques et de la décomposition des roches silicatées. D'après d'autres la plus grande partie serait lavée, petit-à-petit, d'anciens dépôts marins, par les eaux météoriques. Enfin on a soutenu la thèse qu'il serait principalement dû au transport atmosphérique.

Cette dernière thèse me semble mal fondée. En effet on peut démontrer l'impossibilité, l'improbabilité pour le moins, que le chlorure de sodium contenu dans le grand Lac Salé, est de provenance atmosphérique.

On a évalué à plus de 4000 000 000 000 kilogrammes le chlorure de sodium de ce lac [1]). La superficie du bassin alimentaire

---

[1]) G. K. Gilbert, Lake Bonneville. Monograph I. U. S. Geol. Survey, p. 253. Washington 1890. Erronément la quantité de chlorure de sodium y figure seulement du dixième de la valeur réelle.

de l'ancien Lac Bonneville, dont le Lac Salé actuel n'occupe que la dixième partie (environ 5000 kilomètres carrés) en étendu, était de 140 000 kilomètres carrés (54000 square miles) [1]) L'étendue du bassin des affluents du Lac Salé est d'autant moindre, que le lac lui-même est moins grand que son ancêtre pleistocène. Ces affluents apportent annuellement le $^1/_{34\,200}$ de la quantité de chlorure de sodium que le lac contient [2]). Mais, outre ces rivières il y a de nombreuses sources littorales qui, en montant à travers les dépôts de l'ancien Lac Bonneville, salés par l'évaporation antérieure, se chargent dans ceux-ci du sel auquel elles doivent leur caractère saumâtre. Même il n'est point impossible que le tribut de sel, qu'elles apportent annuellement au lac, surpasse encore celui des rivières [3]). Il paraît aussi que l'une de ces rivières, le Jordan, doit une grande partie de son chlorure de sodium aux mêmes dépôts; car son eau en contient deux fois et demie autant que celle de l'affluent principal, la Bear River [4]). Cette dernière eau, prise à Evanston, au cours supérieur de la rivière et non loin du bord de l'ancien bassin alimentaire, ne renferme du chlorure de sodium que dans moins d'un septième de la proportion à laquelle il est contenu dans l'eau douce des dunes hollandaises. Dans ce cours supérieur l'évaporation relative à la pluie, quoiqu'elle surpasse certainement de beaucoup celle dans nos dunes, est bien moins considérable qu'elle n'est en général dans le bassin alimentaire du grand Lac Salé. Serait elle huit fois plus considérable que celle dans les dunes hollandaises, comme celle qui a lieu dans ce bassin [5]), alors le transport atmosphérique relatif de chlorure de sodium à ce dernier serait un soixantième de celui qui a lieu dans nos dunes, il serait un septième de la moyenne en Angleterre et un peu inférieur à celui d'Outacamund, dans l'Inde anglaise. Encore ce transport paraît être trop grand, malgré que la direction prévalente des vents ait

---

[1]) Ibid., p. 20.

[2]) Ibid., p. 207 et 255.

[3]) Ibid., p. 254.

[4]) Ibid., p. 207.

[5]) C'est la valeur que probablement elle obtient dans l'ancien bassin alimentaire du Lac Bonneville. En effet, l'évaporation du Lac Salé est 8 fois plus considérable que la moyenne de la pluie dans le grand bassin (GILBERT, l. c., p. 7). Une surface libre d'eau dans nos dunes, au contraire, perd annuellement, à peu près autant par évaporation qu'elle gagne par les eaux météoriques.

été du sud-ouest durant l'époque pleistocène et probablement jusqu'aujourd'hui [1]), si l'on considère que la distance de la mer au cours supérieur de la Bear River est de 1000 kilomètres et celle au milieu de l'ancien bassin alimentaire de 900 kilomètres, c'est-à-dire sept ou huit fois la distance de la mer à laquelle se trouve Outacamund.

Afin d'éviter cependant toute dépréciation des valeurs, ne mettons pas à moins d'*un cinquantième* du transport atmosphérique relatif de chlorure de sodium dans nos dunes celui qui a eu lieu au grand bassin, depuis l'accès du régime aride, où le Lac Bonneville a progressivement diminué pour aboutir à l'état actuel du grand Lac Salé, et aussi durant les deux périodes arides antérieures. Chacune de celles-ci était plus longue, il est vrai, que la période post-Bonnevillienne [2]), mais leur effet a été en grande partie effacé, pendant les deux périodes humides consécutives. Admettons que la moitié du sel, ainsi accumulé dans l'ancien bassin, y compris le sel „enterré" des périodes arides antérieures, soit arrivée dans le Lac Salé et qu'une quantité égale soit entrée dans le sol ou accumulée dans d'autres bassins secondaires. Il y aurait donc, dans l'ancien bassin, 8000 000 000 000 kilogrammes de chlorure de sodium, ce qui probablement reste bien en-dessous de la réalité. Et il est bien possible qu'autant ait disparu.

Alors, l'apport annuel de sel marin dans nos dunes étant de 20 000 kilogrammes par kilomètre carré, celui du bassin alimentaire du Lac Bonneville aurait été $\frac{20\,000}{50} \times 140\,000 = 56\,000\,000$ kilogrammes, et l'accumulation, pendant l'ensemble des trois périodes arides, aurait duré 143 000 années. Mais, probablement, il faut doubler ce nombre, en égard au sel disparu pendant les périodes humides.

Voilà un laps de temps qui pourrait être plusieurs fois plus long que celui que l'on regarde comme probable. La conclusion semble s'imposer qu'il faut rejeter, pour le chlorure de sodium contenu dans le grand Lac Salé, l'hypothèse de l'origine principalement marine et du transport atmosphérique.

Son origine principale réelle paraît tout indiquée, si nous

---

[1]) GILBERT, l. c., p. 332.

[2]) GILBERT, l. c., p. 261.

faisons entrer en considération les nombreuses manifestations volcaniques qui y ont eu lieu, depuis le temps du Lac Bonneville jusqu'au temps moderne.

La même origine volcanique est évidente pour la grande masse des chlorures contenus dans la mer Morte [1]).

[1]) Voir: L. LARTET, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, T. 60 (1865), p. 790, et Bulletin Soc. Géol. de France, (2), T. 22, p. 450 sqq; T. 23, p. 719.

*Haarlem*, Décembre 1906.

IMPRIMERIE LES HÉRITIERS LOOSJES À HAARLEM.

JAN 28 1914

3 2044 092 638 188